Čtvrtý zápočtový test – B

Příklad 1 (1 bod). Vypočítejte stopu matice

$$\begin{pmatrix} -7 & -6\pi & -5 \\ 2 & 7\pi & 714 \\ -12\lambda & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Výsledek je (viz skriptum doc. Hilschera, str. 97)

$$7\pi - 7.$$

$\square$

Příklad 2 (2 body). Dokažte zobecnění Pythagorovy věty v podobě:
Je-li V vektorový prostor se skalárním součinem, potom pro libovolné dva v něm na sebe kolmé vektory u, v platí

$$||\, u + v\,||^2 = ||\, u\,||^2 + ||\, v\,||^2 .$$

Řešení. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 108. $\square$

Příklad 3 (2 body). Nechť jsou dány dvě báze

$$\alpha = ((1, 0, -1, 2, 3), (-2, 1, 4, -3, 1)), \qquad \beta = ((0, 1, 2, 1, 7), (-1, 2, 5, 0, 11))$$

nějakého podprostoru $\mathbb{R}^5$. Určete matici přechodu od báze α k bázi β a poté matici přechodu od báze β k bázi α. Explicitně uveďte, která matice je která.

Řešení. Matice přechodu od báze α k bázi β je

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a matice přechodu od báze β k bázi α je

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Příklad 4 (3 body). Nalezněte všechny hodnoty parametrů $\xi, \chi \in \mathbb{R}$, pro které jsou vektory $(0, \xi+2, \xi+1, \xi+1)$ a $(\chi-2, 1-\chi, \chi+1, 3-\chi)$ v euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^4$ normované. (Samozřejmě, pro každý vektor zvlášť.)

Řešení. V prvním případě existují dvě možné volby parametru

$$\xi = -1, \qquad \xi = -\frac{5}{3}.$$

Ve druhém případě hledané χ neexistuje. □

Příklad 5 (2 body). Nechť je zadáno lineární zobrazení $F : \mathrm{Mat}_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ předpisem

$$F : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(-a + b + \frac{5}{2}c + \frac{1}{2}d, -2a + b + 2c + d\right), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}.$$

Určete matici reprezentující toto zobrazení v bázích

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$(1, 0), \qquad (0, 1).$$

Řešení. Výsledek je (viz cvičení)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 6 (2 body). Body v rovině $[1, 0]$, $[-3, 0]$, $[-1, 4]$, $[0, 2]$, $[-2, 0]$ proložte regresní přímku. Nalezněte tedy nejlepší aproximaci (minimalizujte hodnotu součtu obsahů čtverců s délkami stran rovnými velikosti rozdílu souřadnic y pro jednotlivá x) těchto bodů přímkou za pomoci metody nejmenších čtverců.

Řešení. Hledaná přímka je

$$y = \frac{1}{5}x + 1\,\frac{2}{5}.$$

□

Příklad 7 (2 body). V euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^5$ uvažujte podprostor určený vektory $(1, 1, -1, -1, 0)$, $(1, -1, -1, 0, -1)$, $(1, 1, 0, 1, 1)$, $(-1, 0, -1, 1, 1)$. Nalezněte nějakou ortogonální bázi jeho ortogonálního doplňku.

Řešení. Hledaná báze obsahuje jediný vektor. Je jím nějaký nenulový skalární násobek vektoru

$$(3, -7, 1, -5, 9).$$

□

Příklad 8 (1 body). Ve vektorovém prostoru reálných 2×2 matic je libovolným dvěma maticím

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

přiřazeno reálné číslo $a \cdot g + b \cdot f + 4\, c \cdot e + d \cdot g$. Jedná se o skalární součin? Svou odpověď musíte odůvodnit.

Řešení. Nejedná. Stačí uvážit např.

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□