Čtvrtý zápočtový test – C

Příklad 1 (3 body). V euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte nějakou ortogonální bázi podprostoru všech lineárních kombinací vektorů $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, -7)$, $(4, -2, 4, 14)$ a podprostoru generovaného vektory $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$.

Řešení. Hledaných bází je v obou případech nekonečně mnoho. Při zachování pořadí podprostorů ze zadání jsou jimi např.

$$((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, -7))$$

a

$$((1, 2, 2, -1), (2, 3, -3, 2), (2, -1, -1, -2)).$$

□

Příklad 2 (2 body). Nechť je lineární transformace $f : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ reprezentována v bázi $(1, x, x^2)$ maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jaká je maticová reprezentace tohoto zobrazení v bázi

$$(x - x^2, x^2 + 1 - x, x - 1)?$$

Řešení. Výsledek je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 3 (1 bod). V euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^4$ najděte nějakou bázi ortogonálního doplňku podprostoru $U \subset \mathbb{R}^4$ zadaného systémem homogenních lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

(Předešlým se rozumí, že U je podprostorem $\mathbb{R}^4$ všech řešení dané homogenní soustavy.) Nepočítejte, přemýšlejte.

Řešení. Hledanou bází je např.

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Podívejte se na koeficienty jednotlivých rovnic. □

Příklad 4 (2 body). Doplňte posloupnost vektorů $1-x^2+x^3$, $1+x^2+x^3$, $1-x-x^3$ na nějakou bázi $\mathcal{P}_3$.

Řešení. Přidáte-li např. k těmto vektorům v $\mathcal{P}_3$ polynom x, dostaneme bázi $\mathcal{P}_3$. □

Příklad 5 (2 body). Uveďte Cauchy-Schwarzovu nerovnost a dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a libovolná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí odhad

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Řešení. Viz skriptum doc. Hilschera (str. 98) a především cvičení. □

Příklad 6 (1 bod). Nechť je dán euklidovský (Euklidovský) vektorový prostor $\mathbb{R}^n$. Určete čemu se rovná $\{0\}^\perp$ a $(\mathbb{R}^n)^\perp$? Čemu potom $\left((\mathbb{R}^n)^\perp\right)^\perp$ a $\left(\{0\}^\perp\right)^\perp$?

Řešení. Platí

$$\{0\}^\perp = \mathbb{R}^n, \quad (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}, \quad \left((\mathbb{R}^n)^\perp\right)^\perp = \mathbb{R}^n, \quad \left(\{0\}^\perp\right)^\perp = \{0\}.$$

□

Příklad 7 (3 body). V euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální projekci vektoru $(-2, 2, 2, 5)$ do podprostoru $\langle\, (1, 1, -1, 2), (3, 1, 0, 1), (2, 0, 1, -1)\,\rangle$.

Řešení. Výsledek je

$$(-1, 1, -2, 3).$$

□

Příklad 8 (1 bod). V prostoru $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$ je libovolné, definujte nějaké dvě navzájem různé normy. Alespoň v jednom případě poté uveďte, zda je daná norma odvozena od skalárního součinu, tj. napište, zda existuje takový skalární součin na $\mathbb{R}^n$, který indukuje právě tuto normu.

Řešení. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 110. □