# Čtvrtý zápočtový test – D

**Příklad 1 (1 bod).** Rozhodněte, zda jsou (či nejsou) matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -9 \\ 0 & 7 & 159 \\ 0 & 7 & 1123 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{113} \end{pmatrix}$$

podobné.

*Řešení.* Matice zjevně podobné nejsou: matice $A$ je regulární, zatímco matice $B$ nikoli. V relaci ekvivalence na množině čtvercových matic daného rozměru zvané „podobnost“ jsou pouze matice se stejným determinantem. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 97. $\square$

**Příklad 2 (3 body).** Stanovte dim Ker $A^T$, je-li:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) Im $A = \{k \cdot (1);\ k \in \mathbb{R}\}$;

c) Im $A = \{k \cdot (1,2)^T + l(0,-1)^T;\ k, l \in \mathbb{R}\}$.

*Řešení.* Ve všech třech případech je dim Ker $A^T = 0$ . $\square$

**Příklad 3 (3 body).** Nechť je dáno lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Určete matici transformace $f$ v bázi $\varepsilon$ prostoru $\mathbb{R}^3$ tvořené po řadě vektory

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tj. při značení ze cvičení najděte $(f)_{\varepsilon,\varepsilon}$.

Přitom víte, že

$$f\left(\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},$$

kde všechny uvedené vektory jsou vyjádřeny ve standardní bázi $\varepsilon$.

*Řešení.* Výsledek je (viz cvičení)

$$\begin{pmatrix}2 & -11 & 6\\1 & -7 & 4\\2 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

□

**Příklad 4 (1 bod).** Vypište všechny ortogonální matice řádu 1 (tj. rozměru $1 \times 1$).

*Řešení.* Jednorozměrné ortogonální matice existují pouze dvě. Jsou to

$$\begin{pmatrix}1\end{pmatrix} \quad \text{a} \quad (-1).$$

□

**Příklad 5 (2 body).** Nechť jsou v euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^4$ dány vektory

$$(1,-2,2,1), \qquad (1,3,2,1).$$

Doplňte tyto dva vektory libovolným způsobem na ortogonální bázi celého $\mathbb{R}^4$. (Můžete k tomu využít kupř. Gram-Schmidtův ortogonalizační proces.)

*Řešení.* Hledaných doplnění je nekonečně mnoho. Jedním (skutečně jednoduchým) je např.

$$(1,-2,2,1), \quad (1,3,2,1), \quad (1,0,0,-1), \quad (1,0,-1,1).$$

□

**Příklad 6 (2 body).** Jsou v euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^4$ vektory

a) $(1, -2, 2, 1), \quad (1, 3, 2, 1), \quad (-1, 0, 1, -1)$,

b) $(1, 0, 1, 4), \quad (1, -4, 0, -1)$,

c) $(1, 2, \sqrt{3}, 4)$,

d) $(-1, 0, 1, 0), \quad (-1, 0, -1, 2), \quad (8, 4, 8, 8)$

ortogonální? Tj. ptáme se (protože dané vektory jsou vždy lineárně nezávislé), zda tvoří ortogonální bázi podprostoru, který generují? Ano, či ne?

*Řešení.* Správné odpovědi jsou:

a) Ano.

b) Ne.

c) Ano.

d) Ano.

$\square$

**Příklad 7 (3 body).** V reálném prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem najděte metodou nejmenších čtverců bod roviny $\langle\,(1, 1, -2), (3, 1, -1)\,\rangle$, který je nejblíže bodu $[\,3, -7, 8\,]$.

*Řešení.* Výsledek je

$$\left[\frac{34}{15}, -\frac{10}{3}, \frac{142}{15}\right].$$

$\square$