Čtvrtý zápočtový test – A

Příklad 1 (1 bod). Rozhodněte, zda je matice

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ortogonální. Svou odpověď *musíte* zdůvodnit.

Příklad 2 (2 body). Jestliže lineární transformaci $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ reprezentuje v nějaké bázi označené jako α matice

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

a lineární zobrazení $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ zadává v bázi α prostoru $\mathbb{R}^3$ a bázi β prostoru $\mathbb{R}^5$ matice

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 7 \\ 2 & -4 & 7 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix},$$

určete matici reprezentující lineární zobrazení $G \circ F$ v bázích α a β.

Příklad 3 (3 body). Nalezněte Ker L a Im L lineárního zobrazení $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ zadaného vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1 + x_2 + 2x_3, 4x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + x_3)$$

pro libovolný vektor $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Příklad 4 (1 bod). Kdy jsou dvě čtvercové matice A a B stejného řádu (téhož rozměru) podobné? Uveďte definici nebo nějakou nutnou a současně postačující podmínku.

Příklad 5 (2 body). Vypočítejte (či jinak určete) ortogonální doplněk (komplement) podprostoru U prostoru $\mathbb{R}^4$, jestliže je nadrovina U generována vektory

$$(1,-8,0,1), \quad (11,3,0,1), \quad (4,0,0,-1), \quad (0,5,0,6), \quad (-11,-3,0,1).$$

Příklad 6 (2 body). Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$. Zvolme n různých bodů $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Potom v prostoru $\mathcal{P}_n$ reálných polynomů stupně nejvýše n pro libovolné funkce $p, q \in \mathcal{P}_n$ položme

$$\langle\, p, q \,\rangle := \sum_{k=1}^{n} p(x_k) \cdot q(x_k).$$

Dokažte, nebo vyvraťte, že se jedná o skalární součin. Pokud se jedná o skalární součin, určete vzdálenost vektorů 1 a -1 v $\mathcal{P}_n$.

Příklad 7 (3 body). V trojrozměrném reálném prostoru se standardním skalárním součinem určete odchylku (směrového vektoru) přímky zadané rovnicemi

$$x + y + 3z = 0,$$

$$x - y - \ \ z = 0$$

od roviny

$$2x + y + z = 0$$

metodou nejmenším čtverců (jiný způsob výpočtu nebude uznán).

Uvědomte si, že byste mohli začít výpočtem ortogonálních doplňků.

Příklad 8 (1 bod). Napište nějakou ortonormální bázi prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ s tzv. Frobeniovou normou. (Norma v tomto případě (viz cvičení) zpětně určuje skalární součin – tím i pojem kolmosti vektorů.)

Čtvrtý zápočtový test – B

Příklad 1 (1 bod). Vypočítejte stopu matice

$$\begin{pmatrix} -7 & -6\pi & -5 \\ 2 & 7\pi & 714 \\ -12\lambda & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2 (2 body). Dokažte zobecnění Pythagorovy věty v podobě:
Je-li V vektorový prostor se skalárním součinem, potom pro libovolné dva v něm na sebe kolmé vektory u, v platí

$$||\, u + v\, ||^2 = ||\, u\, ||^2 + ||\, v\, ||^2 .$$

Příklad 3 (2 body). Nechť jsou dány dvě báze

$$\alpha = ((1, 0, -1, 2, 3), (-2, 1, 4, -3, 1)), \qquad \beta = ((0, 1, 2, 1, 7), (-1, 2, 5, 0, 11))$$

nějakého podprostoru $\mathbb{R}^5$. Určete matici přechodu od báze α k bázi β a poté matici přechodu od báze β k bázi α. Explicitně uveďte, která matice je která.

Příklad 4 (3 body). Nalezněte všechny hodnoty parametrů $\xi, \chi \in \mathbb{R}$, pro které jsou vektory $(0, \xi + 2, \xi + 1, \xi + 1)$ a $(\chi - 2, 1 - \chi, \chi + 1, 3 - \chi)$ v euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^4$ normované. (Samozřejmě, pro každý vektor zvlášť.)

Příklad 5 (2 body). Nechť je zadáno lineární zobrazení $F : \mathrm{Mat}_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ předpisem

$$F : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(-a + b + \frac{5}{2}c + \frac{1}{2}d, -2a + b + 2c + d \right), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}.$$

Určete matici reprezentující toto zobrazení v bázích

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$(1, 0), \qquad (0, 1).$$

Příklad 6 (2 body). Body v rovině $[1, 0]$, $[-3, 0]$, $[-1, 4]$, $[0, 2]$, $[-2, 0]$ proložte regresní přímku. Nalezněte tedy nejlepší aproximaci (minimalizujte hodnotu součtu obsahů čtverců s délkami stran rovnými velikosti rozdílu souřadnic y pro jednotlivá x) těchto bodů přímkou za pomoci metody nejmenších čtverců.

Příklad 7 (2 body). V euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^5$ uvažujte podprostor určený vektory $(1, 1, -1, -1, 0)$, $(1, -1, -1, 0, -1)$, $(1, 1, 0, 1, 1)$, $(-1, 0, -1, 1, 1)$. Nalezněte nějakou ortogonální bázi jeho ortogonálního doplňku.

Příklad 8 (1 body). Ve vektorovém prostoru reálných 2×2 matic je libovolným dvěma maticím

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

přiřazeno reálné číslo $a \cdot g + b \cdot f + 4\, c \cdot e + d \cdot g$. Jedná se o skalární součin? Svou odpověď musíte odůvodnit.

Čtvrtý zápočtový test – C

Příklad 1 (3 body). V euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte nějakou ortogonální bázi podprostoru všech lineárních kombinací vektorů $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,-7)$, $(4,-2,4,14)$ a podprostoru generovaného vektory $(1,2,2,-1)$, $(1,1,-5,3)$, $(3,2,8,-7)$.

Příklad 2 (2 body). Nechť je lineární transformace $f : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ reprezentována v bázi $(1, x, x^2)$ maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jaká je maticová reprezentace tohoto zobrazení v bázi

$$(x - x^2, x^2 + 1 - x, x - 1)?$$

Příklad 3 (1 bod). V euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^4$ najděte nějakou bázi ortogonálního doplňku podprostoru $U \subset \mathbb{R}^4$ zadaného systémem homogenních lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

(Předešlým se rozumí, že U je podprostorem $\mathbb{R}^4$ všech řešení dané homogenní soustavy.) Nepočítejte, přemýšlejte.

Příklad 4 (2 body). Doplňte posloupnost vektorů $1 - x^2 + x^3$, $1 + x^2 + x^3$, $1 - x - x^3$ na nějakou bázi $\mathcal{P}_3$.

Příklad 5 (2 body). Uveďte Cauchy-Schwarzovu nerovnost a dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a libovolná reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí odhad

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Příklad 6 (1 bod). Nechť je dán euklidovský (Euklidovský) vektorový prostor $\mathbb{R}^n$. Určete čemu se rovná $\{0\}^\perp$ a $(\mathbb{R}^n)^\perp$? Čemu potom $\left((\mathbb{R}^n)^\perp\right)^\perp$ a $\left(\{0\}^\perp\right)^\perp$?

Příklad 7 (3 body). V euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortogonální projekci vektoru $(-2, 2, 2, 5)$ do podprostoru $\langle\, (1, 1, -1, 2), (3, 1, 0, 1), (2, 0, 1, -1)\,\rangle$.

Příklad 8 (1 bod). V prostoru $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$ je libovolné, definujte nějaké dvě navzájem různé normy. Alespoň v jednom případě poté uveďte, zda je daná norma odvozena od skalárního součinu, tj. napište, zda existuje takový skalární součin na $\mathbb{R}^n$, který indukuje právě tuto normu.

Čtvrtý zápočtový test – D

Příklad 1 (1 bod). Rozhodněte, zda jsou (či nejsou) matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -9 \\ 0 & 7 & 159 \\ 0 & 7 & 1123 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{113} \end{pmatrix}$$

podobné.

Příklad 2 (3 body). Stanovte dim Ker A^T, je-li:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\operatorname{Im} A = \{k \cdot (1); k \in \mathbb{R}\}$;

c) $\operatorname{Im} A = \{k \cdot (1,2)^T + l(0,-1)^T; k, l \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 3 (3 body). Nechť je dáno lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Určete matici transformace f v bázi ε prostoru $\mathbb{R}^3$ tvořené po řadě vektory

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tj. při značení ze cvičení najděte $(f)_{\varepsilon,\varepsilon}$.

Přitom víte, že

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

kde všechny uvedené vektory jsou vyjádřeny ve standardní bázi ε.

Příklad 4 (1 bod). Vypište všechny ortogonální matice řádu 1 (tj. rozměru 1×1).

Příklad 5 (2 body). Nechť jsou v euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^4$ dány vektory

$$(1, -2, 2, 1), \qquad (1, 3, 2, 1).$$

Doplňte tyto dva vektory libovolným způsobem na ortogonální bázi celého $\mathbb{R}^4$. (Můžete k tomu využít kupř. Gram-Schmidtův ortogonalizační proces.)

Příklad 6 (2 body). Jsou v euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^4$ vektory

a) $(1, -2, 2, 1), \quad (1, 3, 2, 1), \quad (-1, 0, 1, -1),$

b) $(1, 0, 1, 4), \quad (1, -4, 0, -1),$

c) $(1, 2, \sqrt{3}, 4),$

d) $(-1, 0, 1, 0), \quad (-1, 0, -1, 2), \quad (8, 4, 8, 8)$

ortogonální? Tj. ptáme se (protože dané vektory jsou vždy lineárně nezávislé), zda tvoří ortogonální bázi podprostoru, který generují? Ano, či ne?

Příklad 7 (3 body). V reálném prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem najděte metodou nejmenších čtverců bod roviny $\langle (1, 1, -2), (3, 1, -1) \rangle$, který je nejblíže bodu $[3, -7, 8]$.