Druhý zápočtový test – A

Příklad 1 (2 body). Rozhodněte, zda je níže zavedená relace R na množině celých čísel $\mathbb{Z}$ (tedy $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) tranzitivní. (Dokažte, že ano. Jinak uveďte protipříklad.) Nechť je definováno

a)

$$[a, b] \in R \iff |\, a \,| \leq |\, b \,|,$$

b)

$$[a, b] \in R \iff a \,|\, 2\, b.$$

Řešení. V prvním případě relace R tranzitivní *je*, tj.

$$[a, b] \in R, \ [b, c] \in R \implies [a, c] \in R,$$

protože platí

$$|\, a \,| \leq |\, b \,|, \ |\, b \,| \leq |\, c \,| \implies |\, a \,| \leq |\, c \,|.$$

Za „b)“. Relace R tranzitivní *není*. Stačí si uvědomit, že

$$[4, 2], \ [2, 1] \in R,$$

ale zároveň

$$[4, 1] \notin R.$$

□

Příklad 2 (1 bod). Napište všechny dvojice rovnic, které určují stejnou přímku, z následujících: $2x+3y-4=0$; $x-y+3=0$; $-2x+2y=-6$; $-x-\frac{3}{2}y+2=0$; $-5x-\frac{5}{2}y=-2$; $x=6t, y=5t$, $t \in \mathbb{R}$.

Řešení. První (tj. $2x + 3y - 4 = 0$) a čtvrtá (tj. $-x - \frac{3}{2}y + 2 = 0$) rovnice určují stejnou přímku. Jiná dvojice rovnic ze zadání neexistuje. (Uvažte, že zde vlastně vytváříte jednoduchou relaci ekvivalence (a tím také rozklad): rovnice jsou v relaci, právě když určují stejnou přímku.) □

Příklad 3 (2 body). Za pomoci výpočtu determinantu dvojrozměrné matice (jiný způsob výpočtu nebude uznán), určete obsah čtyřúhelníku vymezeného jeho vrcholy $[0, -2]$, $[1, -1]$, $[-1, 1]$ a $[1, 5]$.

Řešení. Obsah trojúhelníku určeného vrcholy $[0, -2]$, $[1, -1]$ a $[-1, 1]$ (resp. $[0, 0]$, $[1, 1]$ a $[-1, 3]$) je 2, zatímco obsah trojúhelníku určeného vrcholy $[1, -1]$, $[-1, 1]$ a $[1, 5]$ je 6. Proto je výsledek 8. (Obdržíme ho jako součet obsahů uvedených trojúhelníků.) $\square$

Příklad 4 (2 body). Najděte konvexní obal bodů $[-1, 1]$, $[3, -5]$, $[1, 7]$, $[0, 4]$, $[0, 2]$, $[0, 0]$, $[-1, 0]$, $[-1, -4]$, $[2, -4]$ a $[0, -4]$. *Výpočtem* determinantů (nikoli jinak) poté určete, které hrany vzniklého mnohoúhelníku jsou viditelné z pozice bodu $[-100\,000, 0]$. (Nemusíte vše vyčíslovat; pouze odhadnout, zda je výraz kladný, či záporný.)

Řešení. Konvexním obalem uvedených bodů je čtyřúhelník s vrcholy $[3, -5]$, $[1, 7]$, $[-1, 1]$, $[-1, -4]$, jehož všechny hrany jsou viditelné s jedinou výjimkou – hranou spojující body $[3, -5]$ a $[1, 7]$. $\square$

Příklad 5 (2 body). Udejte příklad dvou nenulových 2×2 matic A, B (tj. matice A, B mají mít právě dva řádky a dva sloupce) takových, aby jejich součinem (v uvedeném pořadí) byla nulová matice.

Zároveň udejte příklad takové 2×2 matice C, aby jejím součinem (lhostejno zleva, či zprava) s nulovou 2×2 maticí byla nenulová matice.

Řešení. V případě matic A, B lze odkázat na skriptum doc. Hilschera, str. 15 dole. Ve druhém případě nelze uvést žádný příklad: hledaná matice C neexistuje – vyplývá to z toho, jak je definován součin dvou matic. $\square$

Příklad 6 (1 bod). Napište nějakou relaci R na množině $\mathbb{N}$, která je symetrická, ale není reflexivní.

Řešení. Takovou relací $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je např.

$$\{[1, 2], [2, 1]\}.$$

$\square$

Příklad 7 (1 bod). Nechť je dáno zobrazení $f : A \to B$ (potažmo jsou tak zároveň dány množiny A, B). Uveďte definici grafu zobrazení f. (Zobrazení je zvláštní případ relace.)

Řešení. Odpovědí by mělo být

$$\{[a, f(a)]\,;\, a \in A\}.$$

Viz skriptum doc. Hilschera, str. 21. $\square$

Příklad 8 (2 body). Na množině $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je dán rozklad

$$\mathcal{R} = \{\{2, 3\}, \{1, 4, 5\}\},$$

tj. je dán rozklad množiny X, který má dvě třídy, a to $\{2, 3\}$ a $\{1, 4, 5\}$.

Určete relaci ekvivalence R (můžeme ji též značit jako $\sim$) na množině X příslušnou rozkladu $\mathcal{R}$.

Řešení. Výsledek je

$$R = \{[1,1]\,,[2,2]\,,[3,3]\,,[4,4]\,,[5,5]\,,[2,3]\,,[3,2]\,,[1,4]\,,[1,5]\,,[4,1]\,,[4,5]\,,[5,1]\,,[5,4]\}.$$

$\square$

Příklad 9 (1 bod). Uveďte příklad množiny A takové, aby uspořádaní $\subseteq$ na množině všech podmnožin množiny A bylo úplné. (Dokažte, že je úplné. Pokud taková množina neexistuje, objasněte proč.)

Řešení. Volba $A := \emptyset$, resp. volba jednoprvkové množiny A, určuje jednoprvkovou, resp. dvouprvkovou, (tzv. lineárně, mluvíme o řetězci – viz cvičení) uspořádanou množinu $\left(2^A, \subseteq\right)$, jejíž všechny prvky jsou evidentně srovnatelné. $\square$

Příklad 10 (1 bod). Uveďte kolik lze definovat různých relací mezi množinami M a 2^M, jestliže je řád množiny M roven 3 (tedy má-li množina M tři prvky).

Řešení. Výsledek je

$$2^{24},$$

neboť množina $M \times 2^M$ má 24 prvků. $\square$