Druhý zápočtový test – B

Příklad 1 (3 body). Stanovte výměru (rozlohu ve smyslu obsahu) pozemku, jenž je na pozemkové mapě ohraničen body o kótách $[-7, 1]$, $[-1, 0]$, $[24, 2]$, $[25, 1]$, $[29, 0]$ a $[17, 5]$. (Jednotky nás nezajímají. Jsou určeny poměrem pozemkové mapy vůči skutečnosti: výsledek je očekáván vzhledem ke kvadratickým jednotkám pozemkové mapy.)

Řešení. Uvažovaný šestiúhelník můžeme rozdělit např. na čtyři trojúhelníky s vrcholy $[-7, 1]$, $[-1, 0]$, $[17, 5]$; $[24, 2]$, $[-1, 0]$, $[17, 5]$; $[-1, 0]$, $[24, 2]$, $[25, 1]$; resp. $[-1, 0]$, $[25, 1]$, $[29, 0]$. Jejich obsahy jsou po řadě 24; $\frac{89}{2} = 44,5$; $\frac{27}{2} = 13,5$ a 15, a proto je výsledek

$$24 + 44\,\frac{1}{2} + 13\,\frac{1}{2} + 15 = 97.$$

$\square$

Příklad 2 (1 bod). Určete vzájemnou polohu přímek p, q v rovině, jestliže je p : $2x - y + 1 = 0$, $q : 3x + 2 = 0$. Jedná-li se o různoběžky, najděte jejich průsečík.

Řešení. Skutečně se jedná o různoběžky s průsečíkem

$$P = \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right].$$

$\square$

Příklad 3 (1 bod). Uveďte příklad nějaké matice, která má právě dva řádky a dva sloupce (je čtvercově dvojrozměrná) a která má determinant roven $\sqrt{5}$.

Řešení. Jednoduchým příkladem takové matice může být

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Příklad 4 (2 body). Určete, které hrany čtyřúhelníku zadaného vrcholy $[-2,-2]$, $[3,3]$, $[1,4]$ a $[2,1]$ jsou viditelné z pozice bodu $[3,\pi-2]$. Určit je musíte za pomoci výpočtu, nikoli obrázku!

Řešení. Úloha je řešitelná např. jako modelová úloha na viditelnost hran mnohoúhelníku v rovině (viz skriptum doc. Hilschera, str. 18). Doplňme, že vidět jsou právě dvě hrany čtyřúhelníku určené dvojicemi vrcholů $[-2,-2]$, $[2,1]$ a $[2,1]$, $[3,3]$. □

Příklad 5 (1 bod). Uveďte příklad množiny A, pro kterou platí, že $A \in 2^A$ a zároveň že $A \subset 2^A$.

Řešení. Toto platí pro $A = \emptyset$. □

Příklad 6 (2 body). Nechť R a S jsou relace na množině X. Dokažte, že pokud jsou obě tyto relace symetrické, *nemusí* být relace $S \circ R$ symetrická. (Dodejme, že jejich průnik i sjednocení je symetrickou relací, jak víme ze cvičení – to není potřeba dokazovat.)

Řešení. Stačí uvést jeden konkrétní protipříklad. Nechť je tedy např. $X = \{a,b,c\}$, $R = \{[a,b],[b,a]\}$ a $S = \{[b,c],[c,b]\}$. Potom je

$$S \circ R = \{[a,c]\}.$$

□

Příklad 7 (2 body). Na množině $M = \{1,2,3,\ldots,18,19,20\}$ je definována relace $\sim$ pro všechna $a,b \in M$ takto

$$a \sim b \iff \text{první číslice čísel } a,b \text{ jsou stejné.}$$

Tudíž, např. je $1 \sim 17$, $14 \sim 19$, $2 \sim 20$. Dokažte, že relace $\sim$ je ekvivalence a sestrojte rozklad příslušný ekvivalenci $\sim$.

Řešení. Dokázat, že se jedná o ekvivalenci je nesmírně jednoduché, a proto pouze uveďme, že rozklad jí určený je tvaru

$$\{\{1,10,11,12,\ldots,18,19\},\{2,20\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\},\{9\}\}.$$

□

Příklad 8 (2 body). Uveďte příklad zobrazení $f : X \to X$, které *je* injektivní, ale *není* surjektivní; a příklad zobrazení $g : X \to X$, které *je* surjektivní, ale *není* injektivní.

Řešení. Zaznělo na cvičení. $\square$

Příklad 9 (1 bod). Udejte příklad rozkladu na $\mathbb{R}$ (na množině reálných čísel), který má konečně mnoho tříd, přičemž každá třída obsahuje konečně mnoho prvků.

Řešení. Takový rozklad nekonečné množiny evidentně *neexistuje*. $\square$