Druhý zápočtový test – C

Příklad 1 (2 body). Rozhodněte, zda jsou zobrazení definovaná na $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s obory hodnot v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ značená

$$F([a, b]) := [a + 1, b - 1]$$

a

$$G([a, b]) := [6\,a - 5\,b, b - a]$$

lineární.

Uvědomte si, že na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ můžeme nahlížet jako na vektorový prostor a na uspořádané dvojice (*nikoli body*) značené $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, jako na vektory

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Řešení. Obě tato zobrazení jsou afinní (viz skriptum doc. Hilschera, str. 16 nahoře). Ovšem pouze zobrazení G je lineární (jak lze lehce ověřit přímo z definice lineárního zobrazení: aditivnosti a homogennosti) – lze jej reprezentovat maticí

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože F *nezobrazí* dvojici $[0, 0]$ samu na sebe, nemůže (viz opět skriptum doc. Hilschera, str. 16 nahoře) být lineární. □

Příklad 2 (3 body). Nechť je na množině $M = \{a, b, c, d\}$ dána relace R. Rozhodněte, zda je R relací uspořádání (pak nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny (M, R) a na jeho základě řekněte, jestli se jedná o úplné uspořádání), nebo relací ekvivalence, je-li:

(i) $R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [b, a], [b, c], [b, d]\}$;

(ii) $R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [d, a], [b, c]\}$.

Řešení. V obou případech se jedná o uspořádání, které není úplné. □

Příklad 3 (1 bod). Napište obecnou rovnici přímky $p : x = 2 - t,\ y = 1 + 3t,\ t \in \mathbb{R}$.

Řešení. Obecná rovnice přímky p je

$$3x + y - 7 = 0.$$

$\square$

Příklad 4 (2 body). Určete, které hrany pětiúhelníku zadaného vrcholy $[-2,-2]$, $[-2,2]$, $[1,4]$, $[3,1]$ a $[2,-\frac{11}{6}]$ jsou viditelné z pozice bodu $[300,1]$. Určit je musíte za pomoci výpočtu, nikoli obrázku! V případě jedné z hran můžete pouze podmínit její viditelnost splněním jisté nerovnosti (neuvést, zda tato nerovnost platí, či nikoliv – ale pouze říci, co by znamenalo, kdyby platila).

Řešení. Viditelné jsou tři hrany. Zvláště, hrana určená vrcholy $[-2,-2]$, $[2,-\frac{11}{6}]$ je viditelná z pozice bodu $[300,1]$. Zmíněná nerovnost je potom

$$302 \cdot \frac{17}{6} - 3 \cdot 298 < 0.$$

Její platnost implikuje, že uvedená hrana je vidět. $\square$

Příklad 5 (1 bod). Dokažte, že relace dělitelnosti na množině $\mathbb{N}$ (přirozených čísel) je antisymetrická, zatímco relace dělitelnosti na množině $\mathbb{Z}$ (celých čísel), $\mathbb{Q}$ (racionálních čísel) a $\mathbb{R}$ (reálných čísel) *není* antisymetrická.

Řešení. Opírá se o úvahy provedené na cvičení, kde jsme k tomuto závěru dospěli a kde jsme si řekli obecnou definici dělitelnosti (platnou nejen pro celá čísla). $\square$

Příklad 6 (2 body). Rozhodněte, zda dané zobrazení f je injektivní, resp. surjektivní, jestliže

a)

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad f((x,y)) = x + y - 10 \cdot x^2;$$

b)

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \qquad f(x) = (2x, 2x + x^2 + 10).$$

Svá tvrzení odůvodněte.

Řešení. V případě za „a)" se jedná o surjektivní zobrazení (stačí položit $x = 0$), které není injektivní (uvažme volby $(x, y) = (0, -9)$ a $(x, y) = (1, 0)$).

Ve druhém případě se naopak jedná o injektivní zobrazení (obě jeho složky, tj. funkce $2x$ a $2x + x^2 + 10$, jsou rostoucí), které není surjektivní (dvojice (1, 1) evidentně nemá vzor). □

Příklad 7 (2 body). Zjistěte, zda je tvrzení

$$a = b \iff \sup\{a, b\} = \inf\{a, b\}$$

pravdivé pro libovolnou uspořádanou množinu $(A, \leq)$ a libovolné prvky $a, b \in A$. (Uveďte důkaz, nebo protipříklad.)

Řešení. Tvrzení platí, což včetně odůvodnění de facto zaznělo na cvičení. □

Příklad 8 (1 bod). Za pomoci rekurentní formule

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \qquad B_0 = 1 \tag{1}$$

jsou pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zavedena tzv. Bellova čísla. Ze vzorce (1) bezprostředně dostáváme

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 2, \quad B_3 = 5, \quad B_4 = 15, \quad B_5 = 52, \quad B_6 = 203, \ldots$$

Tato čísla (myšlena Bellova) na n-prvkové množině NEUDÁVAJÍ:

(a) počet všech rozkladů, jenž je roven počtu všech ekvivalencí;

(b) počet všech reflexivních, symetrických a tranzitivní relací,
které nejsou antisymetrické, zvýšený o 1;

(c) počet všech reflexivních, symetrických a tranzitivní relací,
které nejsou antisymetrické.

Napište „a", „b", nebo „c".

Řešení. Správná odpověď je za „c", tj. Bellova čísla *neudávají* počet všech reflexivních, symetrických a tranzitivní relací, které nejsou antisymetrické. □

Příklad 9 (1 bod). Nechť je dána uspořádaná množina $(A, \leq)$ a neprázdná podmnožina B množiny A. Definujte supremum a infimum množiny B v množině A. (Uveďte definici nezaloženou na pomocných pojmech.)

Řešení. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 25. $\square$