# Druhý zápočtový test – D

**Příklad 1 (2 body).** Uveďte matici, která reprezentuje zrcadlení vzhledem k přímce se směrovým vektorem svírajícím úhel $\phi$ s vektorem $e_1 := (1, 0)$.

*Řešení.* Hledanou maticí je

$$\begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}.$$

Jeden z možných způsobů jejího určení je uveden ve skriptu doc. Hilschera na str. 17. □

**Příklad 2 (2 body).** V rovině ja dáno $n \in \mathbb{N}$ přímek tak, že žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři nemají společný bod. Na kolik částí rozdělují rovinu?

*Řešení.* Jak bylo ukázáno (spočteno) na cvičení, výsledek je

$$\binom{n+1}{2} + 1.$$

□

**Příklad 3 (1 bod).** Uveďte hodnotu determinantu obecné dvojrozměrné čtvercové (tzn., že počet jejích sloupců se rovná počtu jejích řádků) reálné matice.

*Řešení.* Determinant matice (pro libovolná čísla $p, q, r, s \in \mathbb{R}$)

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

je

$$p \cdot s - q \cdot r.$$

□

**Příklad 4 (2 body).** Za pomoci výpočtu determinantu dvojrozměrné matice (jiný způsob výpočtu nebude uznán), určete obsah trojúhelníku vymezeného jeho vrcholy $[-8, 1]$, $[-2, 0]$, $[5, 9]$.

*Řešení.* Výsledek je
$$\frac{61}{2}.$$
$\square$

**Příklad 5 (3 body).** Rozhodněte, zda je níže uvedená relace $R$ na množině $\mathbb{Z}$ (tj. $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) ekvivalencí. Pokud ano, tato ekvivalence určuje rozklad množiny $\mathbb{Z}$ – uveďte jej (nikoli pouze popište).

Nechť pro libovolná čísla $a, b \subset \mathbb{Z}$ platí
$$[a, b] \in R \iff 2 \,|\, a - b,$$
tj. $a, b$ jsou spolu v relaci právě tehdy, když mají stejný zbytek po dělení 2.

Je relace $R$ uspořádání? Pokud ano, jedná se o úplné uspořádání?

*Řešení.* Lehce se ověří, že se jedná o relaci ekvivalence, která nemůže být uspořádáním, neboť je různá od tzv. identické relace, zvané někdy relace rovnosti (viz cvičení). Uvedeným rozkladem jsou dvě množiny tvořené v případě té první všemi sudými (v případě druhé pak lichými) celými čísly. $\square$

**Příklad 6 (2 body).** Nechť je $M = \{a, b\}$. Vypište všechny relace na $M$, které *nejsou* antisymetrické. Které z nich *jsou* tranzitivní?

*Řešení.* Hledané relace, které nejsou antisymetrické jsou čtyři. Jsou to právě ty podmnožiny $\{a, b\} \times \{a, b\}$, které obsahují prvky $[a, b]$, $[b, a]$. Z těchto čtyř je tranzitivní pouze jediná relace
$$\{[a, a], [b, b], [a, b], [b, a]\} = M \times M.$$
$\square$

**Příklad 7 (2 body).** Uveďte příklad nekonečné uspořádané množiny $(X, \leq)$, která *neobsahuje* žádné různé srovnatelné prvky.

Uveďte příklad tříprvkové uspořádané množiny $(Y, \preceq)$ a její dvouprvkové podmnožiny, která má infimum, ale nemá supremum.

*Řešení.* Nechť je např. $X = \mathbb{Z}$. Potom nutně pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ je $a \leq b$ jen a jen tehdy, když je $a = b$ (tzv. identická relace je uspořádání, jak zaznělo na cvičení).

Pro $Y = \{a, b, c\}$ můžeme zavést hledané uspořádání např. úplným výčtem všech vztahů (všech dvojic prvků, jenž jsou v relaci) takto

$$a \preceq a,\ \ b \preceq b,\ \ c \preceq c,\ \ a \preceq b,\ \ a \preceq c.$$

Lehce se nahlédne, že se skutečně jedná o uspořádání. Hledanou dvouprvkovou podmnožinou $Y$ je potom množina $\{b, c\}$, která supremum v $Y$ nemá, ale infimum ano – je jím prvek $a$. $\square$

**Příklad 8 (1 bod).** Co znamená, že relace $R$ na množině $X$ *není* ekvivalencí? Dále uveďte libovolný příklad nějaké množiny a relace na této množině, která *není* ekvivalencí.

*Řešení.* Viz skriptum doc. Hilschera, str. 23 (Příklad 26, (c)). $\square$