Druhý zápočtový test – E

Příklad 1 (2 body). Napište obecné rovnice s *celočíselnými* koeficienty těchto tří přímek. Té (značme ji p), která prochází bodem $[2,3]$ a je rovnoběžná s přímkou

$$x - 3y + 2 = 0,$$

přímky q procházející body $[1,3]$ a $[-2,1]$ a přímky $r:\ x = 1 - t, y = 3 + 2t,\ t \in \mathbb{R}$.

Řešení. Hledané rovnice přímek jsou po řadě

$$x - 3y + 7 = 0, \qquad 2x - 3y + 7 = 0$$

a

$$2x + y - 5 = 0.$$

□

Příklad 2 (2 body). Na nejvýše kolik částí dělí rovinu n kružnic?

Řešení. Viz skriptum doc. Hilschera, Příklad 22, str. 19. Výsledek je

$$2 + n\,(n-1).$$

□

Příklad 3 (1 bod). Vypočítejte odchylku přímek

$$p:\ x = 1 + t,\ y = 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$q:\ 2x + y - 1 = 0.$$

Řešení. Výsledek je

$$\frac{\pi}{4}, \quad \text{raději než } 45^{\circ}.$$

□

Příklad 4 (1 bod). Uveďte příklad zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které je lineární, a příklad zobrazení $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jenž lineární *není.* (Daná zobrazení musí být zadána formálně správně.)

Řešení. Příkladem lineárního zobrazení F je identita:

$$u \mapsto u, \quad u \in \mathbb{R}^2.$$

Velmi jednoduchým příkladem hledaného zobrazení G je potom zobrazení:

$$u \mapsto \vec{a}, \quad u \in \mathbb{R}^2,$$

kde $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ je nenulové (alespoň v jedné složce) a neměnné (tj. konstantní). $\square$

Příklad 5 (2 body). Nechť je na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definována relace $R \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times$ $\times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ vztahem

$$[[a, b], [c, d]] \in R \iff a - c = 0.$$

Zjistěte, zda se jedná o relaci ekvivalence (dokažte to, nebo vyvraťte). Pokud se jedná o relaci ekvivalence, popište geometricky rozklad, který určuje.

Řešení. Lehce se ověří, že se jedná o relaci ekvivalence, jíž příslušný rozklad rozdělí rovinu na přímky rovnoběžné s druhou osou (tj. osou y) – se stejnou první souřadnicí. (Dva body v rovině jsou v relaci, pokud přímka jimi zadaná je kolmá na osu x.) $\square$

Příklad 6 (2 body). Určete, kolik různých rozkladů lze utvořit na množině M, jestliže je:

a) $M = \{1, 2\}$;

b) $M = \{1, 2, 3\}$;

c) $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

Řešení. V prvním případě zřejmě existují pouze dva rozklady (tj. pouze 2 různé relace ekvivalence), ve druhém 5 a ve třetím případu (pro čtyřprvkovou množinu) potom 15 rozkladů. (Viz také tzv. Bellova čísla.) $\square$

Příklad 7 (1 bod). Nechť jsou dány nějaké relace uspořádání R a S na jisté množině X. Je relace $R \cap S$ také uspořádání?

Řešení. Ano, je. Zaznělo na cvičení (včetně krátkého objasnění). $\square$

Příklad 8 (2 body). Nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $\left(2^A, \subseteq\right)$, je-li:

a) $A = \{a\}$;

b) $A = \{b, c\}$;

c) $A = \{d, e, f\}$.

Řešení. Vyplývá z Příkladu 22 uvedeného na demonstrativním cvičení. $\square$

Příklad 9 (2 body). Nechť je na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$ definována relace R tak, že dvě čísla jsou v relaci, právě když jsou nesoudělná (tedy neexistuje-li přirozené číslo různé od 1, které v oboru přirozených čísel obě čísla dělí, tj. neobsahuje-li prvočíselný rozklad uvažovaných dvou čísel ani jedno stejné prvočíslo, což nastane jen a jen tehdy, když neexistuje prvočíslo, které vynásobené dvěma (ne nutně různými) přirozenými čísly dá v prvním případě hodnotu prvního čísla, ve druhém pak druhého).

Rozhodněte, zda je tato relace reflexivní, symetrická, antisymetrická, resp. tranzitivní. Své odpovědi musíte zdůvodnit!

Řešení. Uvážíme-li dvojici stejných čísel

$$[n, n] \notin R \quad \text{pro } n \geq 2, \tag{1}$$

je evidentní, že se nejedná o reflexivní relaci.

Být „soudělný“ nebo „nesoudělný“ pro dvojici přirozených čísel je zřejmě vlastností neuspořádané dvojice – nezávislé na uvedení pořadí těchto dvou čísel, a proto je relace R symetrická.

Z toho, že relace R je symetrická, plyne, že nemůže být antisymetrická, neboť zřejmě existují $s, t \in \mathbb{N}$, $s \neq t$ s vlastností

$$[s, t] \in R.$$

Jak právě zaznělo, není obtížné najít dvě čísla, která jsou spolu v relaci R. Lze např. (jakkoli) zvolit dvě různá prvočísla. Protože $[p, p] \notin R$ pro libovolné prvočíslo p (viz (1)), ale zároveň je R symetrickou (viz výše), není tato relace tranzitivní. $\square$