Druhý zápočtový test – F

Příklad 1 (1 bod). Napište parametrické vyjádření přímky p, je-li:

a) p souřadnicovou osou y;

b) $p:\ x - 3 = 0$.

Řešení. Hledané rovnice přímek jsou po řadě (přičemž $t \in \mathbb{R}$)

$$x = 0, \quad y = t;$$

$$x = 3, \quad y = t.$$

□

Příklad 2 (2 body). Za pomoci výpočtu *determinantu matice* určete obsah rovnoběžníku $ABCD$ v rovině, jestliže znáte (tři) jeho vrcholy

$$A = [2, 1], \quad B = [1, 3], \quad C = [-2, -1].$$

Řešení. Výsledek je

$$10.$$

□

Příklad 3 (1 bod). V rovině určete všechny vektory kolmé k vektorům

$$(1, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, 1)$$

zároveň. Kolmé ke každému vektoru z této trojice.

Řešení. První a třetí vektor jsou na sebe kolmé, z čehož plyne jejich lineární nezávislost. Generují tedy podprostor $\mathbb{R}^2$ dimenze 2 (tj. celé $\mathbb{R}^2$). Proto hledaný vektor existuje pouze jediný – nulový

$$(0, 0).$$

□

Příklad 4 (1 bod). Uveďte příklad zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které *není* lineární, a dokažte o něm, že není lineární.

Řešení. Takové zobrazení je např. zadáno konstantním přiřazením

$$u \mapsto (0,1), \quad u \in \mathbb{R}^2.$$

Neboť je vektor $(0,1)$ různý od nulového, nemůže být toto zobrazení lineární: nezobrazuje nulový vektor na triviální podprostor $\mathbb{R}^2$ (tj. nepřiřazuje mu nulový vektor). $\square$

Příklad 5 (3 body). Nechť je na množině $\mathbb{R}$ definována relace $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ vztahem

$$[a,b] \in R \iff \text{existuje } c \in \mathbb{R},\ c \geq 1 \text{ tak, že } c \cdot b = a.$$

Zjistěte, zda se jedná o relaci ekvivalence (dokažte to, nebo vyvraťte). Pokud se skutečně jedná o relaci ekvivalence, popište geometricky rozklad, který určuje. Případně rozhodněte (a odůvodněte své rozhodnutí – tj. dokažte to, nebo uveďte protipříklad), zda se jedná o relaci uspořádání.

Řešení. Lehce se vidí, že daná relace není symetrická – nemůže tedy být relací ekvivalence.

Jedná se však o relaci uspořádání, jak lze snadno dokázat. $\square$

Příklad 6 (2 body). Dokažte, že průnik libovolného počtu relací ekvivalence na nějaké množině M je opět relace ekvivalence na M. Pokud tvrdíte, že to neplatí, musíte to zdůvodnit.

Řešení. Tvrzení samozřejmě platí. Jeho platnost byla zdůvodněna na cvičení. $\square$

Příklad 7 (2 body). Definujte nějakou relaci ekvivalence a poté nějakou relaci uspořádání na množině všech přímek v rovině.

Řešení. Zavedeme-li relaci tak, aby dvě přímky byly v relaci právě tehdy, když jsou shodné, dostaneme „velmi přirozenou“ relaci ekvivalence, která je zároveň relací uspořádání. Předchozí (pro libovolnou množinu) zaznělo na cvičení. $\square$

Příklad 8 (2 body). Vypište – můžete i zakreslit – všechna zobrazení množiny $\{1, 2\}$ do množiny $\{\eta, \vartheta, \xi\}$. Kolik jich je? Dále uveďte, která z nich jsou injektivní, která surjektivní a která bijektivní.

Řešení. Celkem existuje 9 zobrazení. Z toho je 6 injektivních. Zřejmě žádné není surjektivní, a proto ani žádné nemůže být bijektivní. □

Příklad 9 (1 bod). Uveďte, jaký je rozdíl mezi formulacemi:

a) „dané zobrazení je zobrazením množiny X *do* množiny Y“;

b) „dané zobrazení je zobrazením množiny X *na* množinu Y“.

Řešení. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 21. □