Druhý zápočtový test – A

Příklad 1 (2 body). Rozhodněte, zda je níže zavedená relace R na množině celých čísel $\mathbb{Z}$ (tedy $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) tranzitivní. (Dokažte, že ano. Jinak uveďte protipříklad.) Nechť je definováno

a)
$$[a, b] \in R \iff |\,a\,| \leq |\,b\,|,$$

b)
$$[a, b] \in R \iff a \,|\, 2\,b.$$

Příklad 2 (1 bod). Napište všechny dvojice rovnic, které určují stejnou přímku, z následujících: $2x+3y-4=0$; $x-y+3=0$; $-2x+2y=-6$; $-x-\frac{3}{2}y+2=0$; $-5x-\frac{5}{2}y=-2$; $x=6t, y=5t$, $t \in \mathbb{R}$.

Příklad 3 (2 body). Za pomoci výpočtu determinantu dvojrozměrné matice (jiný způsob výpočtu nebude uznán), určete obsah čtyřúhelníku vymezeného jeho vrcholy $[0,-2]$, $[1,-1]$, $[-1,1]$ a $[1,5]$.

Příklad 4 (2 body). Najděte konvexní obal bodů $[-1,1]$, $[3,-5]$, $[1,7]$, $[0,4]$, $[0,2]$, $[0,0]$, $[-1,0]$, $[-1,-4]$, $[2,-4]$ a $[0,-4]$. *Výpočtem* determinantů (nikoli jinak) poté určete, které hrany vzniklého mnohoúhelníku jsou viditelné z pozice bodu $[-100\,000, 0]$. (Nemusíte vše vyčíslovat; pouze odhadnout, zda je výraz kladný, či záporný.)

Příklad 5 (2 body). Udejte příklad dvou nenulových 2×2 matic A, B (tj. matice A, B mají mít právě dva řádky a dva sloupce) takových, aby jejich součinem (v uvedeném pořadí) byla nulová matice.

Zároveň udejte příklad takové 2×2 matice C, aby jejím součinem (lhostejno zleva, či zprava) s nulovou 2×2 maticí byla nenulová matice.

Příklad 6 (1 bod). Napište nějakou relaci R na množině $\mathbb{N}$, která je symetrická, ale není reflexivní.

Příklad 7 (1 bod). Nechť je dáno zobrazení $f : A \to B$ (potažmo jsou tak zároveň dány množiny A, B). Uveďte definici grafu zobrazení f. (Zobrazení je zvláštní případ relace.)

Příklad 8 (2 body). Na množině $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je dán rozklad

$$\mathcal{R} = \{\{2, 3\}, \{1, 4, 5\}\},$$

tj. je dán rozklad množiny X, který má dvě třídy, a to $\{2, 3\}$ a $\{1, 4, 5\}$.

Určete relaci ekvivalence R (můžeme ji též značit jako $\sim$) na množině X příslušnou rozkladu $\mathcal{R}$.

Příklad 9 (1 bod). Uveďte příklad množiny A takové, aby uspořádaní $\subseteq$ na množině všech podmnožin množiny A bylo úplné. (Dokažte, že je úplné. Pokud taková množina neexistuje, objasněte proč.)

Příklad 10 (1 bod). Uveďte kolik lze definovat různých relací mezi množinami M a 2^M, jestliže je řád množiny M roven 3 (tedy má-li množina M tři prvky).

Druhý zápočtový test – B

Příklad 1 (3 body). Stanovte výměru (rozlohu ve smyslu obsahu) pozemku, jenž je na pozemkové mapě ohraničen body o kótách $[-7, 1]$, $[-1, 0]$, $[24, 2]$, $[25, 1]$, $[29, 0]$ a $[17, 5]$. (Jednotky nás nezajímají. Jsou určeny poměrem pozemkové mapy vůči skutečnosti: výsledek je očekáván vzhledem ke kvadratickým jednotkám pozemkové mapy.)

Příklad 2 (1 bod). Určete vzájemnou polohu přímek p, q v rovině, jestliže je p : $2x - y + 1 = 0$, $q : 3x + 2 = 0$. Jedná-li se o různoběžky, najděte jejich průsečík.

Příklad 3 (1 bod). Uveďte příklad nějaké matice, která má právě dva řádky a dva sloupce (je čtvercově dvojrozměrná) a která má determinant roven $\sqrt{5}$.

Příklad 4 (2 body). Určete, které hrany čtyřúhelníku zadaného vrcholy $[-2, -2]$, $[3, 3]$, $[1, 4]$ a $[2, 1]$ jsou viditelné z pozice bodu $[3, \pi - 2]$. Určit je musíte za pomoci výpočtu, nikoli obrázku!

Příklad 5 (1 bod). Uveďte příklad množiny A, pro kterou platí, že $A \in 2^A$ a zároveň že $A \subset 2^A$.

Příklad 6 (2 body). Nechť R a S jsou relace na množině X. Dokažte, že pokud jsou obě tyto relace symetrické, *nemusí* být relace $S \circ R$ symetrická. (Dodejme, že jejich průnik i sjednocení je symetrickou relací, jak víme ze cvičení – to není potřeba dokazovat.)

Příklad 7 (2 body). Na množině $M = \{1, 2, 3, \dots, 18, 19, 20\}$ je definována relace $\sim$ pro všechna $a, b \in M$ takto

$$a \sim b \iff \text{první číslice čísel } a, b \text{ jsou stejné.}$$

Tudíž, např. je $1 \sim 17$, $14 \sim 19$, $2 \sim 20$. Dokažte, že relace $\sim$ je ekvivalence a sestrojte rozklad příslušný ekvivalenci $\sim$.

Příklad 8 (2 body). Uveďte příklad zobrazení $f : X \to X$, které *je* injektivní, ale *není* surjektivní; a příklad zobrazení $g : X \to X$, které *je* surjektivní, ale *není* injektivní.

Příklad 9 (1 bod). Udejte příklad rozkladu na $\mathbb{R}$ (na množině reálných čísel), který má konečně mnoho tříd, přičemž každá třída obsahuje konečně mnoho prvků.

Druhý zápočtový test – C

Příklad 1 (2 body). Rozhodněte, zda jsou zobrazení definovaná na $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s obory hodnot v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ značená

$$F([a,b]) := [a+1, b-1]$$

a

$$G([a,b]) := [6\,a - 5\,b, b-a]$$

lineární.

Uvědomte si, že na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ můžeme nahlížet jako na vektorový prostor a na uspořádané dvojice (*nikoli body*) značené $[a,b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, jako na vektory

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Příklad 2 (3 body). Nechť je na množině $M = \{a,b,c,d\}$ dána relace R. Rozhodněte, zda je R relací uspořádání (pak nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny (M,R) a na jeho základě řekněte, jestli se jedná o úplné uspořádání), nebo relací ekvivalence, je-li:

(i) $R = \{[a,a],[b,b],[c,c],[d,d],[b,a],[b,c],[b,d]\}$;

(ii) $R = \{[a,a],[b,b],[c,c],[d,d],[d,a],[b,c]\}$.

Příklad 3 (1 bod). Napište obecnou rovnici přímky $p: x = 2 - t,\ y = 1 + 3t,\ t \in \mathbb{R}$.

Příklad 4 (2 body). Určete, které hrany pětiúhelníku zadaného vrcholy $[-2,-2]$, $[-2,2]$, $[1,4]$, $[3,1]$ a $[2,-\frac{11}{6}]$ jsou viditelné z pozice bodu $[300,1]$. Určit je musíte za pomoci výpočtu, nikoli obrázku! V případě jedné z hran můžete pouze podmínit její viditelnost splněním jisté nerovnosti (neuvést, zda tato nerovnost platí, či nikoliv – ale pouze říci, co by znamenalo, kdyby platila).

Příklad 5 (1 bod). Dokažte, že relace dělitelnosti na množině $\mathbb{N}$ (přirozených čísel) je antisymetrická, zatímco relace dělitelnosti na množině $\mathbb{Z}$ (celých čísel), $\mathbb{Q}$ (racionálních čísel) a $\mathbb{R}$ (reálných čísel) *není* antisymetrická.

Příklad 6 (2 body). Rozhodněte, zda dané zobrazení f je injektivní, resp. surjektivní, jestliže

a)
$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad f((x, y)) = x + y - 10 \cdot x^2;$$

b)
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \qquad f(x) = (2x, 2x + x^2 + 10).$$

Svá tvrzení odůvodněte.

Příklad 7 (2 body). Zjistěte, zda je tvrzení

$$a = b \iff \sup\{a, b\} = \inf\{a, b\}$$

pravdivé pro libovolnou uspořádanou množinu $(A, \leq)$ a libovolné prvky $a, b \in A$. (Uveďte důkaz, nebo protipříklad.)

Příklad 8 (1 bod). Za pomoci rekurentní formule

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \qquad B_0 = 1 \tag{1}$$

jsou pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zavedena tzv. Bellova čísla. Ze vzorce (1) bezprostředně dostáváme

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 2, \quad B_3 = 5, \quad B_4 = 15, \quad B_5 = 52, \quad B_6 = 203, \ \ldots$$

Tato čísla (myšlena Bellova) na n-prvkové množině NEUDÁVAJÍ:

(a) počet všech rozkladů, jenž je roven počtu všech ekvivalencí;

(b) počet všech reflexivních, symetrických a tranzitivní relací, které nejsou antisymetrické, zvýšený o 1;

(c) počet všech reflexivních, symetrických a tranzitivní relací, které nejsou antisymetrické.

Napište „a“, „b“, nebo „c“.

Příklad 9 (1 bod). Nechť je dána uspořádaná množina $(A, \leq)$ a neprázdná podmnožina B množiny A. Definujte supremum a infimum množiny B v množině A. (Uveďte definici nezaloženou na pomocných pojmech.)

Druhý zápočtový test – D

Příklad 1 (2 body). Uveďte matici, která reprezentuje zrcadlení vzhledem k přímce se směrovým vektorem svírajícím úhel ϕ s vektorem $e_1 := (1, 0)$.

Příklad 2 (2 body). V rovině ja dáno $n \in \mathbb{N}$ přímek tak, že žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři nemají společný bod. Na kolik částí rozdělují rovinu?

Příklad 3 (1 bod). Uveďte hodnotu determinantu obecné dvojrozměrné čtvercové (tzn., že počet jejích sloupců se rovná počtu jejích řádků) reálné matice.

Příklad 4 (2 body). Za pomoci výpočtu determinantu dvojrozměrné matice (jiný způsob výpočtu nebude uznán), určete obsah trojúhelníku vymezeného jeho vrcholy $[-8, 1]$, $[-2, 0]$, $[5, 9]$.

Příklad 5 (3 body). Rozhodněte, zda je níže uvedená relace R na množině $\mathbb{Z}$ (tj. $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) ekvivalencí. Pokud ano, tato ekvivalence určuje rozklad množiny $\mathbb{Z}$ – uveďte jej (nikoli pouze popište).

Nechť pro libovolná čísla $a, b \subset \mathbb{Z}$ platí

$$[a, b] \in R \iff 2 \mid a - b,$$

tj. a, b jsou spolu v relaci právě tehdy, když mají stejný zbytek po dělení 2.

Je relace R uspořádání? Pokud ano, jedná se o úplné uspořádání?

Příklad 6 (2 body). Nechť je $M = \{a, b\}$. Vypište všechny relace na M, které *nejsou* antisymetrické. Které z nich *jsou* tranzitivní?

Příklad 7 (2 body). Uveďte příklad nekonečné uspořádané množiny $(X, \leq)$, která *neobsahuje* žádné různé srovnatelné prvky.

Uveďte příklad tříprvkové uspořádané množiny $(Y, \preceq)$ a její dvouprvkové podmnožiny, která má infimum, ale nemá supremum.

Příklad 8 (1 bod). Co znamená, že relace R na množině X *není* ekvivalencí? Dále uveďte libovolný příklad nějaké množiny a relace na této množině, která *není* ekvivalencí.

Druhý zápočtový test – E

Příklad 1 (2 body). Napište obecné rovnice s *celočíselnými* koeficienty těchto tří přímek. Té (značme ji p), která prochází bodem $[2,3]$ a je rovnoběžná s přímkou

$$x - 3y + 2 = 0,$$

přímky q procházející body $[1,3]$ a $[-2,1]$ a přímky $r:\ x = 1 - t, y = 3 + 2t,\ t \in \mathbb{R}$.

Příklad 2 (2 body). Na nejvýše kolik částí dělí rovinu n kružnic?

Příklad 3 (1 bod). Vypočítejte odchylku přímek

$$p:\ x = 1 + t,\ y = 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$q:\ 2x + y - 1 = 0.$$

Příklad 4 (1 bod). Uveďte příklad zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které je lineární, a příklad zobrazení $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jenž lineární *není.* (Daná zobrazení musí být zadána formálně správně.)

Příklad 5 (2 body). Nechť je na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definována relace $R \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ vztahem

$$[[a,b],[c,d]] \in R \iff a - c = 0.$$

Zjistěte, zda se jedná o relaci ekvivalence (dokažte to, nebo vyvraťte). Pokud se jedná o relaci ekvivalence, popište geometricky rozklad, který určuje.

Příklad 6 (2 body). Určete, kolik různých rozkladů lze utvořit na množině M, jestliže je:

a) $M = \{1,2\}$;

b) $M = \{1,2,3\}$;

c) $M = \{1,2,3,4\}$.

Příklad 7 (1 bod). Nechť jsou dány nějaké relace uspořádání R a S na jisté množině X. Je relace $R \cap S$ také uspořádání?

Příklad 8 (2 body). Nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $\left(2^A, \subseteq\right)$, je-li:

a) $A = \{a\}$;

b) $A = \{b, c\}$;

c) $A = \{d, e, f\}$.

Příklad 9 (2 body). Nechť je na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$ definována relace R tak, že dvě čísla jsou v relaci, právě když jsou nesoudělná (tedy neexistuje-li přirozené číslo různé od 1, které v oboru přirozených čísel obě čísla dělí, tj. neobsahuje-li prvočíselný rozklad uvažovaných dvou čísel ani jedno stejné prvočíslo, což nastane jen a jen tehdy, když neexistuje prvočíslo, které vynásobené dvěma (ne nutně různými) přirozenými čísly dá v prvním případě hodnotu prvního čísla, ve druhém pak druhého).

Rozhodněte, zda je tato relace reflexivní, symetrická, antisymetrická, resp. tranzitivní. Své odpovědi musíte zdůvodnit!

Druhý zápočtový test – F

Příklad 1 (1 bod). Napište parametrické vyjádření přímky p, je-li:

a) p souřadnicovou osou y;

b) $p: \ x - 3 = 0$.

Příklad 2 (2 body). Za pomoci výpočtu *determinantu matice* určete obsah rovnoběžníku $ABCD$ v rovině, jestliže znáte (tři) jeho vrcholy

$$A = [2, 1], \quad B = [1, 3], \quad C = [-2, -1].$$

Příklad 3 (1 bod). V rovině určete všechny vektory kolmé k vektorům

$$(1, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, 1)$$

zároveň. Kolmé ke každému vektoru z této trojice.

Příklad 4 (1 bod). Uveďte příklad zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které *není* lineární, a dokažte o něm, že není lineární.

Příklad 5 (3 body). Nechť je na množině $\mathbb{R}$ definována relace $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ vztahem

$$[a, b] \in R \iff \text{existuje } c \in \mathbb{R},\ c \geq 1 \text{ tak, že } c \cdot b = a.$$

Zjistěte, zda se jedná o relaci ekvivalence (dokažte to, nebo vyvraťte). Pokud se skutečně jedná o relaci ekvivalence, popište geometricky rozklad, který určuje. Případně rozhodněte (a odůvodněte své rozhodnutí – tj. dokažte to, nebo uveďte protipříklad), zda se jedná o relaci uspořádání.

Příklad 6 (2 body). Dokažte, že průnik libovolného počtu relací ekvivalence na nějaké množině M je opět relace ekvivalence na M. Pokud tvrdíte, že to neplatí, musíte to zdůvodnit.

Příklad 7 (2 body). Definujte nějakou relaci ekvivalence a poté nějakou relaci uspořádání na množině všech přímek v rovině.

Příklad 8 (2 body). Vypište – můžete i zakreslit – všechna zobrazení množiny $\{1, 2\}$ do množiny $\{\eta, \vartheta, \xi\}$. Kolik jich je? Dále uveďte, která z nich jsou injektivní, která surjektivní a která bijektivní.

Příklad 9 (1 bod). Uveďte, jaký je rozdíl mezi formulacemi:

a) „dané zobrazení je zobrazením množiny X *do* množiny Y“;

b) „dané zobrazení je zobrazením množiny X *na* množinu Y“.