Opravný zápočtový test – A

Příklad 1 (5 bodů). Kolika způsoby lze rozmístit 20 různých knížek do malé knihovny, která má 5 polic, jestliže se do každé police vejde právě 20 knížek?

Řešení. Výsledek je

$$\frac{24!}{4!}.$$

□

Příklad 2 (5 bodů). Dvě lodi mají doplout do přístaviště v daný den od 12.00 do 15.00, a to se stejnou šancí v každém okamžiku těchto 3 hodin. Obě se zdrží v přístavišti 1 hodinu a nemohou vykládat náklad současně. Jaká je pravděpodobnost, že posádka jedné lodi bude muset čekat, než druhá loď opustí přístaviště?

Řešení. Výsledek je

$$\frac{5}{9}.$$

□

Příklad 3 (5 bodů). Padesátkrát po sobě hodíme třemi mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň v jednom z těchto 50 hodů padnou 3 líce?

Řešení. Výsledek je

$$1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{50}.$$

□

Příklad 4 (5 bodů). Uveďte 2×2 matici, která reprezentuje lineární zobrazení, jímž je rotace roviny kolem počátku o předem daný úhel φ, vzhledem ke standardním bázím.

Řešení. Výsledek je

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

$\square$

Příklad 5 (5 bodů). Co to znamená, když o nějakém uspořádání $\preceq$ na množině A řekneme, že je *úplné*?

Řešení. Každé 2 prvky množiny A jsou porovnatelné (srovnatelné), tj. pro všechna $a, b \in A$ platí

$$a \preceq b$$

nebo

$$b \preceq a.$$

$\square$

Příklad 6 (5 bodů). Na množině $X = \{\xi, \varrho, \varsigma, \chi, \psi\}$ je zadán rozklad

$$X = \{\{\xi\}, \{\varrho\}, \{\varsigma\}, \{\chi, \psi\}\}.$$

Tento rozklad je jednoznačně určen jistou relací ekvivalence E na X. Uveďte tuto relaci ekvivalence E. (Uvědomte si, že každá relace ekvivalence je množina uspořádaných dvojic. V takové podobě ji musíte uvést.)

Řešení. Výsledek je

$$E = \{[\xi,\xi], [\varrho,\varrho], [\varsigma,\varsigma], [\chi,\chi], [\psi,\psi], [\chi,\psi], [\psi,\chi]\}.$$

$\square$

Příklad 7 (5 bodů). Vypočítejte součin matic $A \cdot B \cdot C$, jestliže je

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Řešení. Výsledek je

$$A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} -10 & 10 & -9 & -6\,\frac{5}{6} \\ -16 & 16 & -8 & -11 \\ -8 & 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Příklad 8 (5 bodů). Nechť je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Určete dim Ker A.

Řešení. Výsledek je

$$\dim \operatorname{Ker} A = 1.$$

$\square$

Příklad 9 (5 bodů). Nechť je opět dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Uveďte nějakou bázi Ker A.

Řešení. Neboť je dim Ker $A = 1$. Báze obsahuje jediný vektor. Jedná se o nějaký nenulový skalární násobek vektoru

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Příklad 10 (5 bodů). Popište (např. nějakou bází) ortogonální komplement podprostoru V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem, je-li V generován vektory $(-1, 2, 0, 1)$, $(3, 1, -2, 4)$, $(-4, 1, 2, -4)$, $(2, 3, -2, 5)$.

Řešení. Ortogonální doplněk (komplement) V je množina všech skalárních násobků vektoru

$$(4, 2, 7, 0)\,.$$

$\square$

Příklad 11 (5 bodů). V euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^3$ nalezněte ortogonální projekci vektoru $(3, -7, 8)$ do roviny určené vektory $(1, 1, -2)$, $(3, 1, -1)$.

Řešení. Výsledek je

$$\left(\frac{34}{15}, -\frac{10}{3}, \frac{142}{15}\right).$$

$\square$

Příklad 12 (5 bodů). Uveďte příklad takové reálné matice 3×3, která má všechny své prvky kladné (tj. je zadaná devíti čísly a všechna tato čísla jsou kladná), je pozitivně definitní a zároveň není symetrická. Pokud taková matice neexistuje, napište stručně, z čeho to plyne.

Řešení. Samozřejmě, že existuje. Takovou maticí je např.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\square$