Opravný zápočtový test – B

Příklad 1 (5 bodů). Určete, kolika způsoby lze rozdělit 8 žen a 4 muže do 2 šestičlenných skupin (v nichž nerozlišujeme pořadí – jsou neuspořádané) tak, aby v každé skupině byl alespoň 1 muž.

Řešení. Výsledek je

$$\frac{1}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{8}{4}+4\cdot\binom{8}{5}=434=\frac{1}{2}\cdot\binom{12}{6}-\binom{8}{2}.$$

□

Příklad 2 (5 bodů). V písemce je 10 otázek a u každé se má vybrat jedna ze tří variant odpovědi. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň polovina odpovědí bude správná, vybíráme-li je zcela náhodně? Výsledek nemusíte vyčíslit.

Řešení. Výsledek je

$$1-\sum_{k=0}^{4}\binom{10}{k}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}.$$

□

Příklad 3 (5 bodů). Máme 6 uren. V první jsou 2 bílé kuličky a 1 černá, ve druhé a ve třetí jsou 3 bílé a 2 černé, ve čtvrté, páté a šesté jsou 2 bílé a 3 černé. Náhodně zvolíme urnu a z ní vybereme kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílá?

Řešení. Výsledek je

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{23}{45}.$$

□

Příklad 4 (5 bodů). Určete odchylku přímek

$$2x+y-5=0 \quad \text{a} \quad 6x-2y=-7.$$

Řešení. Výsledek je
$$\frac{\pi}{4}.$$
$\square$

Příklad 5 (5 bodů). Vypočítejte obsah čtyřúhelníku (v rovině) s vrcholy $[1,1]$, $[6,1]$, $[11,4]$, $[2,4]$.

Řešení. Výsledek je
$$21.$$
$\square$

Příklad 6 (5 bodů). Nechť je dána n-prvková konečná a zároveň neprázdná množina M. Určete, kolik celkem existuje reflexivních relací na M.

Řešení. Výsledek je
$$2^{n(n-1)}.$$
$\square$

Příklad 7 (5 bodů). Vektory
$$(1,2,1), \qquad (-1,1,0), \qquad (0,1,1)$$
jsou lineárně nezávislé, a proto z nich lze sestavit bázi $\mathbb{R}^3$. Každý trojrozměrný vektor je tedy nějakou jejich lineární kombinací. Jakou jejich lineární kombinací je vektor $(1,1,1)$? (Tj. vyjádřete vektor $(1,1,1)$ ve tvaru součtu nějakých skalárních násobků zadaných vektorů.)

Řešení. Výsledek je
$$(1,1,1) = \frac{1}{2}\cdot(1,2,1) - \frac{1}{2}\cdot(-1,1,0) + \frac{1}{2}\cdot(0,1,1).$$
$\square$

Příklad 8 (5 bodů). Stanovte hodnost matice

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Výsledek je

$$h(R) = 2.$$

$\square$

Příklad 9 (5 bodů). Vypočítejte

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Řešení. Výsledek je

$$9.$$

$\square$

Příklad 10 (5 bodů). Lineární zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je pro libovolná $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ určeno předpisem

$$\Phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, x_1 - 3x_2 + x_3).$$

Nalezněte matici lineární transformace Φ v bázi α určené po řadě vektory

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (0, 0, -1).$$

Máte tedy uvést matici, která přísluší danému lineárnímu zobrazení vzhledem k bázím α (vzhledem ke stejné bázi obou prostorů: oba jsou $\mathbb{R}^3$).

Řešení. Výsledek je

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Příklad 11 (5 bodů). Nechť je ve vektorovém prostoru $\mathcal{P}_2$ pro libovolné dva reálné polynomy stupně nejvýše 2

$$p = a_2(p) \cdot x^2 + a_1(p) \cdot x + a_0(p), \qquad q = a_2(q) \cdot x^2 + a_1(q) \cdot x + a_0(q)$$

definován jejich skalární součin vztahem

$$p \cdot q := a_2(p) \cdot a_2(q) + a_1(p) \cdot a_1(q) + a_0(p) \cdot a_0(q).$$

V tomto vektorovém prostoru se skalárním součinem určete délku (velikost, normu) vektoru $x^2 + 2x$.

Řešení. Výsledek je

$$\sqrt{5}.$$

□

Příklad 12 (5 bodů). Nalezněte všechna vlastní čísla matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Výsledek je

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

□