Opravný zápočtový test – A

Příklad 1 (5 bodů). Kolika způsoby lze rozmístit 20 různých knížek do malé knihovny, která má 5 polic, jestliže se do každé police vejde právě 20 knížek?

Příklad 2 (5 bodů). Dvě lodi mají doplout do přístaviště v daný den od 12.00 do 15.00, a to se stejnou šancí v každém okamžiku těchto 3 hodin. Obě se zdrží v přístavišti 1 hodinu a nemohou vykládat náklad současně. Jaká je pravděpodobnost, že posádka jedné lodi bude muset čekat, než druhá loď opustí přístaviště?

Příklad 3 (5 bodů). Padesátkrát po sobě hodíme třemi mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň v jednom z těchto 50 hodů padnou 3 líce?

Příklad 4 (5 bodů). Uveďte 2×2 matici, která reprezentuje lineární zobrazení, jímž je rotace roviny kolem počátku o předem daný úhel φ, vzhledem ke standardním bázím.

Příklad 5 (5 bodů). Co to znamená, když o nějakém uspořádání $\preceq$ na množině A řekneme, že je *úplné*?

Příklad 6 (5 bodů). Na množině $X = \{\xi, \varrho, \varsigma, \chi, \psi\}$ je zadán rozklad

$$X = \{\{\xi\}, \{\varrho\}, \{\varsigma\}, \{\chi, \psi\}\}.$$

Tento rozklad je jednoznačně určen jistou relací ekvivalence E na X. Uveďte tuto relaci ekvivalence E. (Uvědomte si, že každá relace ekvivalence je množina uspořádaných dvojic. V takové podobě ji musíte uvést.)

Příklad 7 (5 bodů). Vypočítejte součin matic $A \cdot B \cdot C$, jestliže je

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Příklad 8 (5 bodů). Nechť je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Určete dim Ker A.

Příklad 9 (5 bodů). Nechť je opět dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Uveďte nějakou bázi Ker A.

Příklad 10 (5 bodů). Popište (např. nějakou bází) ortogonální komplement podprostoru V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem, je-li V generován vektory $(-1, 2, 0, 1)$, $(3, 1, -2, 4)$, $(-4, 1, 2, -4)$, $(2, 3, -2, 5)$.

Příklad 11 (5 bodů). V euklidovském (Euklidovském) prostoru $\mathbb{R}^3$ nalezněte ortogonální projekci vektoru $(3, -7, 8)$ do roviny určené vektory $(1, 1, -2)$, $(3, 1, -1)$.

Příklad 12 (5 bodů). Uveďte příklad takové reálné matice 3×3, která má všechny své prvky kladné (tj. je zadaná devíti čísly a všechna tato čísla jsou kladná), je pozitivně definitní a zároveň není symetrická. Pokud taková matice neexistuje, napište stručně, z čeho to plyne.

Opravný zápočtový test – B

Příklad 1 (5 bodů). Určete, kolika způsoby lze rozdělit 8 žen a 4 muže do 2 šestičlenných skupin (v nichž nerozlišujeme pořadí – jsou neuspořádané) tak, aby v každé skupině byl alespoň 1 muž.

Příklad 2 (5 bodů). V písemce je 10 otázek a u každé se má vybrat jedna ze tří variant odpovědi. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň polovina odpovědí bude správná, vybíráme-li je zcela náhodně? Výsledek nemusíte vyčíslit.

Příklad 3 (5 bodů). Máme 6 uren. V první jsou 2 bílé kuličky a 1 černá, ve druhé a ve třetí jsou 3 bílé a 2 černé, ve čtvrté, páté a šesté jsou 2 bílé a 3 černé. Náhodně zvolíme urnu a z ní vybereme kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílá?

Příklad 4 (5 bodů). Určete odchylku přímek

$$2x + y - 5 = 0 \quad \text{a} \quad 6x - 2y = -7.$$

Příklad 5 (5 bodů). Vypočítejte obsah čtyřúhelníku (v rovině) s vrcholy $[1,1]$, $[6,1]$, $[11,4]$, $[2,4]$.

Příklad 6 (5 bodů). Nechť je dána n-prvková konečná a zároveň neprázdná množina M. Určete, kolik celkem existuje reflexivních relací na M.

Příklad 7 (5 bodů). Vektory

$$(1,2,1), \quad (-1,1,0), \quad (0,1,1)$$

jsou lineárně nezávislé, a proto z nich lze sestavit bázi $\mathbb{R}^3$. Každý trojrozměrný vektor je tedy nějakou jejich lineární kombinací. Jakou jejich lineární kombinací je vektor $(1,1,1)$? (Tj. vyjádřete vektor $(1,1,1)$ ve tvaru součtu nějakých skalárních násobků zadaných vektorů.)

Příklad 8 (5 bodů). Stanovte hodnost matice

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 9 (5 bodů). Vypočítejte

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Příklad 10 (5 bodů). Lineární zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je pro libovolná $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ určeno předpisem

$$\Phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, x_1 - 3x_2 + x_3).$$

Nalezněte matici lineární transformace Φ v bázi α určené po řadě vektory

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (0, 0, -1).$$

Máte tedy uvést matici, která přísluší danému lineárnímu zobrazení vzhledem k bázím α (vzhledem ke stejné bázi obou prostorů: oba jsou $\mathbb{R}^3$).

Příklad 11 (5 bodů). Nechť je ve vektorovém prostoru $\mathcal{P}_2$ pro libovolné dva reálné polynomy stupně nejvýše 2

$$p = a_2(p) \cdot x^2 + a_1(p) \cdot x + a_0(p), \qquad q = a_2(q) \cdot x^2 + a_1(q) \cdot x + a_0(q)$$

definován jejich skalární součin vztahem

$$p \cdot q := a_2(p) \cdot a_2(q) + a_1(p) \cdot a_1(q) + a_0(p) \cdot a_0(q).$$

V tomto vektorovém prostoru se skalárním součinem určete délku (velikost, normu) vektoru $x^2 + 2x$.

Příklad 12 (5 bodů). Nalezněte všechna vlastní čísla matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$