První zápočtový test – A

Příklad 1 (1 bod). Sešlo se pět přátel a navzájem si potřásli rukama. Určete počet potřesení.

Řešení. Výsledek je $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$. □

Příklad 2 (1 bod). Nechť je $n > 3$. Který z následujících vztahů

(a) $\displaystyle\binom{n}{n-1} = \binom{n}{2}$, (b) $\displaystyle\binom{n}{n-1} < \binom{n}{2}$, (c) $\displaystyle\binom{n}{n-1} > \binom{n}{2}$

platí? (Ten např. zatrhněte – musí být *zjevně* rozpoznatelné, co je odpovídáno!)

Řešení. Správná odpověď je za „b“, tj. platí

$$\binom{n}{n-1} < \binom{n}{2}$$

pro všechna $n \geq 4$. □

Příklad 3 (2 body). Určete kolika způsoby lze z 10 kosmonautů vybrat čtyřčlennou posádku, není-li možné (z jistých důvodů), aby jistí dva kosmonauti letěli spolu.

Řešení. Výsledek je

$$\binom{10}{4} - \binom{8}{2} = 182.$$

Obdržíme ho tak, že nejprve určíme počet všech možných výběrů a pak od něj odečteme počet těch výběrů, kdy jsou členy posádky zmínění dva kosmonauti. □

Příklad 4 (2 body). Ze sady 52 karet (26 červených a 26 černých) náhodně vyberme polovinu. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme 13 červených a 13 černých karet?

Řešení. Úloha je řešitelná např. jako modelová úloha na hypergeometrické rozdělení (viz skriptum doc. Hilschera). Výsledek je potom

$$\frac{\binom{26}{13} \cdot \binom{26}{13}}{\binom{52}{26}},$$

což po úpravě dává

$$\frac{(26!)^4}{52! \cdot (13!)^4}.$$

□

Příklad 5 (2 body). Z karetní hry o 32 kartách vytahujeme postupně šestkrát bez vracení po jedné kartě. Jaká je pravděpodobnost, že eso bude taženo až v posledním tahu?

Řešení. Podle věty o násobení podmíněných pravděpodobností je výsledek

$$\frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31} \cdot \frac{26}{30} \cdot \frac{25}{29} \cdot \frac{24}{28} \cdot \frac{4}{27},$$

tj. $\frac{65}{899}$. □

Příklad 6 (2 body). Máme 6 klobouků. V prvním klobouku jsou 2 bílé kuličky a 1 černá, ve druhém a ve třetím jsou 3 bílé a 2 černé, ve čtvrtém, pátém a šestém klobouku jsou 2 bílé a 3 černé. Náhodně vybereme klobouk a z něj potom náhodně vylosujeme kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílá?

Řešení. Věta o celkové pravděpodobnosti (formule úplné pravděpodobnosti) dává

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5},$$

tedy výsledek $\frac{23}{45}$. □

Příklad 7 (2 body). Určete pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padla na obou prvočísla, jestliže padl součet 8.

Řešení. Příklad je nejsnáze řešitelný jednoduchým výčtem možností (těch je 5, z čehož 2 výsledky jsou příznivé vyšetřovanému jevu). Výsledek je 0,4. □

Příklad 8 (1 bod). Kolika způsoby lze na šachovnici (8 x 8 polí) postavit bílou a černou věž tak, aby se neohrožovaly (nebyly ve stejném řádku ani sloupci)?

Řešení. Nejprve umístíme např. bílou věž. Pro ni máme na výběr z 8^2 polí. Ve druhém kroku umístíme věž černou: nyní máme „k dispozici“ 7^2 polí. Podle kombinatorického pravidla součinu je výsledek $8^2 \cdot 7^2 = 3136$. $\square$

Příklad 9 (2 body). Nechť je zcela náhodně rozdělena tyč o délce m na tři části. Určete pravděpodobnost, že její nejdelší část bude kratší než součet zbývajících dvou.

Řešení. Délka tyče nemá zjevně vliv na hodnotu hledané pravděpodobnosti. Tento příklad je tedy přeformulováním „Příkladu 16“ z minulého čtvrtečního demonstrativního cvičení. $\square$