První zápočtový test – B

Příklad 1 (1 bod). Kolik čtyřciferných čísel, v nichž se žádná číslice neopakuje, lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 5, 6, 7 a 9.

Řešení. K dispozici máme sedm různých číslic. Ptáme se vlastně na to, kolik různých uspořádaných čtveřic můžeme z nich vybrat. Výsledek je proto $(7)_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$. □

Příklad 2 (1 bod). Rozepíšeme-li výraz $(a+b)^n$, přičemž $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, do tvaru součtu reálných násobků „členů“ $a^{n-j} \cdot b^j$, kde $j \in \{0, \ldots, n\}$, potom u členu $a \cdot b^{n-1}$ bude vždy (tj. pro všechna uvažovaná a, b, n) koeficient:

(a) $\binom{n-1}{1}$; (b) $\binom{n-1}{0}$; (c) $\binom{n}{1}$.

Napište „a“, „b“, či „c“.

Řešení. Správná odpověď je pochopitelně za „c“, neboť je

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$$

pro všechna přirozená čísla n (tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$). □

Příklad 3 (3 body). K vytrvalostnímu závodu, v němž běžci vybíhají jeden po druhém s pevnými časovými odstupy, se přihlásilo k závodníků, mezi nimi také tři kamarádi. Určete, kolika způsoby lze sestavit rozvrh startů tak, aby žádní dva z trojice kamarádů nestartovali těsně po sobě. (Uvažujeme $k \geq 5$.)

Řešení. Ostatních $k-3$ závodníků můžeme seřadit $(k-3)!$ způsoby. Pro uvažované tři kamarády pak máme $k-2$ míst (začátek, konec a $k-4$ mezer), na které je můžeme rozmístit $(k-2)_3$ způsoby. Podle kombinatorického pravidla součinu je tak výsledek

$$(k-3)! \cdot (k-2) \cdot (k-3) \cdot (k-4) = (k-2)! \cdot (k-3) \cdot (k-4).$$

□

Příklad 4 (2 body). Do urny s m ($m \in \mathbb{N}$ je sudé) žlutými tenisovými míčky vložíme $2m$ obarvených (dejme tomu, že červených) tenisových míčků. Jak je pravděpodobné, že když najednou z urny vysypeme m míčků, bude právě polovina vysypaných míčků žlutá?

Řešení. Příklad je řešitelný využitím obecného řešení tzv. hypergeometrického rozdělení (viz skriptum doc. Hilschera, str. 8). Výsledek je

$$\frac{\binom{2m}{\frac{m}{2}} \cdot \binom{m}{\frac{m}{2}}}{\binom{3m}{m}}.$$

□

Příklad 5 (2 body). Dva střelci střílejí nezávisle na sobě do jednoho terče, každý po jednom výstřelu. Pravděpodobnost zásahu terče je pro prvního střelce 0,7, pro druhého je 0,5. Jaká je pravděpodobnost, že po střelbě bude v terči právě jeden zásah?

Řešení. Výsledek stanovíme tak, že sečteme pravděpodobnosti těchto dvou neslučitelných jevů: trefil se první střelec a druhý nikoli; první střelec minul, zatímco druhý terč zasáhl. Podle vlastností stochasticky nezávislých jevů (viz skriptum doc. Hilschera, str. 11 uprostřed) je tedy výsledek

$$0,7 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,5.$$

Zkuste nalézt řešení úvahou nad situací, kdy bude nejprve střílet první střelec. □

Příklad 6 (2 body). Tyč o délce 2 m je náhodně rozřezána na tři části. Nalezněte pravděpodobnost jevu, že třetí část měří méně než $1,5$ m.

Řešení. Tento příklad je na užití geometrické pravděpodobnosti. Navíc je podobný příkladu uvedenému na cvičení: hledáme pravděpodobnost toho, že součet délek prvních dvou částí je větší než čtvrtina délky tyče. Pravděpodobnost opačného jevu je tudíž rovna podílu obsahu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku s délkou odvěsny 0,5 a obsahu s ním shodného (jenž je jeho zvětšeninou v poměru 1 : 4) trojúhelníku s délkou odvěsny 2. Tj. výsledek je

$$1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Zamyslete se nad tím, jaká je pravděpodobnost, že když náhodně (a nezávisle na sobě) určíte dvě místa, kde tyč rozříznout, budou obě v první čtvrtině tyče. □

Příklad 7 (2 body). Uveďte příklady dvou funkcí P a R, které jsou pravděpodobnostmi na množině všech podmnožin $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, přičemž požadujeme, aby funkce P nabývala alespoň jedné hodnoty, které nenabývá R.

Řešení. Například zaveďme funkci R tak, že nabývá hodnoty 1 v prvcích množiny všech podmnožin $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ (značené 2^Ω), jimiž jsou právě ty podmnožiny Ω, které obsahují prvek ω_1, jinak – jinde – nechť je funkce R nulová.

Funkci P pak můžeme zvolit tak, že bude v libovolném prvku A množiny 2^Ω nabývat hodnoty

$$\frac{|\,A\,|}{3}, \qquad \text{kde } |\,A\,| \text{ udává řád množiny } A,$$

tj. $|\,A\,|$ je číslo z množiny $\{0, 1, 2, 3\}$ určené počtem prvků A. □

Příklad 8 (2 body). Hodíme deseti kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na třech padne šestka.

Řešení. Podle Bernoulliova vzorce (viz také binomické rozdělení, skriptum na str. 12) známého ze střední školy je výsledek

$$\sum_{k=3}^{10} \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k} = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

□