První zápočtový test – C

Příklad 1 (1 bod). Kolik slov lze vytvořit ze slova „automobilka“ změnou pořadí písmen? (Pochopitelně se nebere ohled na to, zda vzniklá slova mají jazykový smysl.)

Řešení. Výsledek je

$$\frac{11!}{2! \cdot 2!} = \frac{11!}{4}.$$

□

Příklad 2 (1 bod). Které z čísel

(a) $\binom{m+n-1}{n-1}$, (b) m^n, (c) $\binom{m+n-1}{m-1}$

udává, kolika způsoby lze rozmístit n nerozlišitelných předmětů do m rozlišitelných přihrádek (pro obecná $m, n \in \mathbb{N}$)? Napište a, b, nebo c.

Řešení. Správná odpověď je „c“, tedy

$$\binom{m+n-1}{m-1} = \binom{m+n-1}{n}.$$

□

Příklad 3 (2 body). Kolika způsoby lze rozdělit mezi tři osoby A, B a C 33 různých mincí tak, aby osoby A a B měly dohromady dvakrát více mincí, než má osoba C.

Řešení. Výsledek je

$$\binom{33}{11} \cdot 2^{22}.$$

□

Příklad 4 (2 body). Z karetní hry o 108 kartách (2 x 52 + 4 žolíci) bez vracení vybereme 4 karty. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jedna z nich je eso nebo žolík?

Řešení. Výsledek je

$$1 - \frac{\binom{96}{4}}{\binom{108}{4}}.$$

$\square$

Příklad 5 (2 body). V jednom klobouku je 5 bílých a 2 černé kuličky, ve druhém 3 bílé a 7 černých. Náhodně zvolíme jeden klobouk a vytáhneme z něj kuličku. Určete pravděpodobnost, že bude bílá.

Řešení. Výsledek podle věty o celkové pravděpodobnosti (formule úplné pravděpodobnosti; viz mj. skriptum doc. Hilschera, str. 10 nahoře) je

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{71}{140} \doteq 0,507.$$

$\square$

Příklad 6 (2 body). Z klobouku, v němž je 9 bílých a 1 černá kulička, namátkou vytáhneme kuličku a vrátíme ji zpět. Kolikrát tento pokus musíme provést, aby pravděpodobnost, že aspoň jednou vytáhneme černou kuličku, byla větší než 0,9?

Řešení. Upozorněme, že podobný příklad byl řešen na cvičení. Výsledkem tohoto příkladu je, že daný pokus musíme provést alespoň dvaadvacetkrát.

Řešení, k němuž by pak měli dojít studenti, je stanovení (nikoli vyčíslení) hodnoty

$$\xi := \frac{\log_a 0,1}{\log_a 0,9}, \tag{1}$$

která určuje výsledek (hledaný počet opakování hry) tak, že jím je nejmenší přirozené číslo větší než reálné číslo ξ zavedené v (1), kde a je libovolné reálné číslo větší než 1. (Povšimněme si, prosím, „bohaté matematické“ mluvy.) $\square$

Příklad 7 (2 body). Řekněte, co znamená, že blíže neupřesněné jevy A, B, C, D jsou stochasticky nezávislé? (Neuvádějte intuitivní vystižení podstaty, nýbrž definici!)

Řešení. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 12, druhý odstavec. $\square$

Příklad 8 (2 body). Zvolme zcela náhodně dvě nezáporná reálná čísla ostře menší 1. Jaká je pravděpodobnost, že součet jejich druhých mocnin je menší nebo roven 1?

Řešení. Výsledek je $\frac{\pi}{4}$. (Viz skriptum doc. Hilschera, str. 13, Příklad 19.) $\square$

Příklad 9 (1 bod). Napište, čemu se rovná $(n)_k$ pro *všechna* $n, k \in \mathbb{N}$.

Řešení. Výběr bez opakování je zaveden jako

$$(n)_k := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

pro $n \geq k$ a jako

$$(n)_k := 0,$$

je-li $n < k$. $\square$