První zápočtový test – D

Příklad 1 (1 bod). Lze tipovat výsledky 15 zápasů – zda vyhrají domácí, hosté, či skončí nerozhodně. Určete, kolik je všech možných tipů.

Řešení. Výsledek je

$$3^{15}.$$

□

Příklad 2 (1 bod). Která z rovností

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{5-k} = 16,$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} k\binom{5}{k} = 32,$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \binom{5}{k} = 31$

platí? (Uveďte ji. Nelze však uvést více než jednu možnost.)

Řešení. Správná odpověď je „c“, neboť (jak vyplývá ze cvičení)

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{5-k} = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} = 2^5 = 32 \neq 16,$$

$$\sum_{k=0}^{5} k\binom{5}{k} = 5 \cdot 2^{5-1} = 80 \neq 32$$

a zároveň je

$$\sum_{k=1}^{5} \binom{5}{k} = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} - 1 = 32 - 1 = 31.$$

□

Příklad 3 (2 body). Určete, kolika způsoby lze rozdělit 8 chlapců a 4 děvčata do dvou šestičlenných skupin tak, aby v každé skupině byla alespoň jedna dívka.

Řešení. Lze tak učinit

$$\frac{1}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{8}{4} + 4 \cdot \binom{8}{5} = 434 = \frac{1}{2} \cdot \binom{12}{6} - \binom{8}{2}$$

způsoby. □

Příklad 4 (2 body). V klobouku máme 8 bílých, 7 černých a 5 modrých kuliček. Vybereme z něho náhodně bez vracení 3 kuličky. Jaká je pravděpodobnost, že právě dvě budou bílé?

Řešení. Příklad je řešitelný využitím obecného řešení tzv. hypergeometrického rozdělení (viz skriptum doc. Hilschera, str. 8). Výsledek je

$$\frac{\binom{8}{2} \cdot 12}{\binom{20}{3}} = \frac{\binom{8}{2} \cdot 7 + \binom{8}{2} \cdot 5}{\binom{20}{3}}.$$

□

Příklad 5 (2 body). Dvanáctkrát nezávisle na sobě házíme třemi mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň v jednom hodu padnou tři líce?

Řešení. Určíme-li nejprve pravděpodobnost opačného jevu, dostaneme výsledek

$$1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{12}.$$

□

Příklad 6 (2 body). Jaká je pravděpodobnost, že součet dvou náhodně zvolených kladných čísel menších než 1 bude menší než $\frac{3}{8}$?

Řešení. Jde o jednoduchý příklad na geometrickou pravděpodobnost s řešením

$$\frac{\left(\frac{3}{8}\right)^2}{2}.$$

□

Příklad 7 (2 body). Odvoďte větu o násobení podmíněných pravděpodobností pro 3 jevy.

Řešení. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 9 – uprostřed. □

Příklad 8 (2 body). V urně jsou 2 bílé, 3 černé a 2 modré kuličky. Náhodně je vytahujeme bez vracení. Jaká je pravděpodobnost, že dříve vytáhneme bílou než černou?

Řešení. Výsledek je

$$\frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

□

Příklad 9 (1 bod). Stanovte $P(A/B) = P(A|B)$ (tj. určete pravděpodobnost jevu A podmíněnou jevem B – nalezněte konkrétní číslo) pro $A = B$ a také tehdy, když jsou jevy A a B neslučitelné. (Pochopitelně požadujeme, aby $P(B) \neq 0$.)

Řešení. Zřejmě je

$$P(B/B) = 1; \qquad P(A/B) = 0, \quad \text{je-li} \quad A \cap B = \emptyset.$$

□