První zápočtový test – E

Příklad 1 (1 bod). Výletu se zúčastní 35 lidí. Podle požadavků organizátorů se musí libovolným způsobem rozdělit do čtyř skupin tak, aby první skupina měla 17 účastníků, druhá 8, třetí 6 a poslední čtvrtá potom 4. Určete kolika způsoby se mohou výletníci rozdělit do těchto čtyř skupin.

Řešení. Výsledek je

$$\frac{35!}{17! \cdot 8! \cdot 6! \cdot 4!}.$$

□

Příklad 2 (1 bod). Napište prvních šest řádků Pascalova trojúhelníku. (Upozorněme, že prvním řádkem rozumíme samotné číslo 1.)

Řešení. Odkažme na skriptum doc. Hilschera, na str. 4, kde je uvedeno právě prvních šest řádků Pascalova trojúhelníku (ve tvaru kombinačních čísel i ve vyčíslené podobě). □

Příklad 3 (2 body). Kolika způsoby lze postavit na šachovnici (64 polí – 32 bílých, 32 černých) pět rozlišitelných figurek tak, aby dvě stály na bílých a tři na černých polích?

Řešení. Výsledek je

$$5! \cdot \binom{32}{2} \cdot \binom{32}{3} = 295\,219\,200.$$

□

Příklad 4 (2 body). Tři hráči dostanou po 10 kartách a 2 zbudou (z balíčku připraveného na mariáš nebo prší – 32 karet, z toho 4 esa). Je pravděpodobnější, že někdo dostane alespoň dvě esa, nebo to, že zbyla dvě esa? Svou odpověď musíte zdůvodnit (nemusíte však nutně počítat pravděpodobnosti zadaných jevů).

Řešení. Protože pravděpodobnost, že nějaký z hráčů dostane tři esa, je rovna hodnotě (všimněte si, že ji počítáme jinak, než je obvyklé)

$$\frac{3 \cdot \binom{29}{7}}{\binom{32}{10}},$$

zatímco pravděpodobnost, že zbudou dvě esa, je rovna číslu

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}},$$

je pravděpodobnější, že nějaký z hráčů dostal alespoň dvě esa.

Poznamenejme, že dokázat nerovnost

$$\frac{3 \cdot \binom{29}{7}}{\binom{32}{10}} > \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}}$$

lze například úpravou obou jejích stran, kdy opakovaným krácením (po vyjádření kombinačních čísel dle definice) lehce dostaneme

$$9 \cdot 8 > 4 \cdot 3,$$

tj.

$$6 > 1.$$

Ovšem existují výrazně jednodušší způsoby, jak lze dojít k závěru, který z vyšetřovaných jevů je pravděpodobnější. □

Příklad 5 (3 body). Řada v divadle se skládá z $2\,m$ míst k sezení. Pokud ji obsadí m mužů a m žen, jaká je pravděpodobnost, že žádné dvě osoby stejného pohlaví nebudou sedět vedle sebe?

Řešení. Tento příklad je možné řešit podobně jako na cvičení uvedený příklad o společnosti $2\,m$ žen a m mužů, kterou náhodně rozdělíme do m tříčlenných skupin, přičemž nás zajímá, jak je pravděpodobné, že v každé skupině bude právě jeden muž. Analogicky uvedenému způsobu řešení této úlohy lze obdržet výsledek

$$\frac{2 \cdot (m!)^2}{(2m)!}.$$

□

Příklad 6 (2 body). V malém tichomořském přístavu kotví pouze dvě obchodní lodě. Ty se zde mohou během dne potkat s pravděpodobností 0,3. Za předpokladu, že denní provozy těchto lodí jsou nezávislé, určete pravděpodobnost, že během týdne se tyto dvě lodě v přístavu potkají právě třikrát.

Řešení. Podle Bernoulliova vzorce (viz také binomické rozdělení – skriptum doc. Hilschera, str. 12) je výsledek

$$\binom{7}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^4.$$

□

Příklad 7 (2 body). V urně jsou čtyři lístky s čísly 001, 100, 010, 111. Označme A_i (kde $i \in \{1, 2, 3\}$) jev, že náhodně vytažený lístek má jedničku na i-té pozici. Zjistěte (a odůvodněte své zjištění), zda jsou jevy A_1, A_2, A_3 stochasticky nezávislé.

Řešení. Pravděpodobnost společného nastoupení jevů A_1, A_2, A_3 je zjevně rovna $\frac{1}{4}$. Avšak pravděpodobnost každého z jevů A_1, A_2, A_3 je $\frac{1}{2}$, a proto by, kdyby tyto jevy byly stochasticky nezávislé, muselo platit

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Jevy A_1, A_2, A_3 tedy nemohou být stochasticky nezávislé. □

Příklad 8 (2 body). Z 32 karet táhneme dvakrát po jedné kartě. Nalezněte pravděpodobnost, že druhá tažená karta bude král, když první kartu vrátíme, a také tehdy, když ji do balíčku nevrátíme (druhou kartu potom vybíráme z balíčku 31 karet).

Řešení. Evidentně, výsledek je v obou případech

$$\frac{1}{8}.$$

Ve druhém případě uvažte, proč není nutné využít podmíněné pravděpodobnosti. Uvědomte si, proč platí

$$\frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} + \frac{28}{32} \cdot \frac{4}{31} = \frac{1}{8}.$$

□