První zápočtový test – F

Příklad 1 (1 bod). Řecká abeceda se skládá z 24 písmen. Kolik slov majících právě šest písmen z ní lze utvořit. (Bez ohledu na to, zda tato slova mají nějaký jazykový význam.)

Řešení. Výsledek je

$$24^6.$$

□

Příklad 2 (1 bod). Definujte multinomický koeficient $P(k_1, k_2, \dots, k_n)$ pro nezáporná celá čísla $k_1, k_2, \dots, k_n$, přičemž $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$ a $n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Viz skriptum doc. Hilschera, dole na str. 5. (Pouze jsme zaměnili symboly m a n za po řadě symboly n a k.) □

Příklad 3 (2 body). Kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit 7 stejných hrušek a 5 stejných jablek bez krájení?

Řešení. Výsledek je

$$\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{2}.$$

□

Příklad 4 (2 body). Hodíme n kostkami ($n \in \mathbb{N}$). Jaká je pravděpodobnost, že mezi čísly, která padnou, *nebudou* hodnoty 1, 3 a 6?

Řešení. Výsledek je zřejmě

$$\left(\frac{3}{6}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

□

Příklad 5 (2 body). V osudí je 10 koulí, a to 5 černých a 5 bílých. Postupně budeme losovat po jedné kouli, přičemž vytaženou kouli nevrátíme zpět. Jaká je pravděpodobnost, že nejprve vytáhneme bílou, poté černou, pak bílou a v posledním čtvrtém tahu opět bílou kouli?

Řešení. Využijeme-li věty o násobení podmíněných pravděpodobností (viz skriptum doc. Hilschera, str. 9), dostaneme výsledek ve tvaru součinu

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}.$$

□

Příklad 6 (2 body). Určete pravděpodobnost, že v rodině s pěti dětmi je více chlapců než děvčat, za podmínky, že v rodině je alespoň jeden chlapec. (Narození dívky a chlapce považujeme za stejně pravděpodobné.)

Řešení. Výsledek je

$$\frac{16}{31}.$$

□

Příklad 7 (2 body). Urna obsahuje 5 bílých a 5 černých koulí. Náhodně vybereme 5 koulí a vložíme je do jiné, předtím prázdné urny. Z této druhé urny náhodně vytáhneme kouli a zjistíme, že je černá. Kouli nevrátíme zpět a vytáhneme ze druhé urny ještě jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že je bílá? Zdůvodněte.

Řešení. Výsledek je

$$\frac{5}{9}.$$

Uvažte, proč *není nutné* využít podmíněné pravděpodobnosti. □

Příklad 8 (3 body). Nalezněte pravděpodobnosti, že při hodu

(i) šesti kostkami padne aspoň jedna šestka,

(ii) dvanácti kostkami padnou aspoň dvě šestky,

(iii) osmnácti kostkami padnou aspoň tři šestky.

Řešení. Výsledky jsou

(i) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$,

(ii) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11}$,

(iii) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{18} - 18 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{17} - \binom{18}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{16}$.

$\square$