První zápočtový test – G

Příklad 1 (1 bod). Kolika způsoby se může 35 cestujících rozsadit v autobuse, kde je 35 míst?

Řešení. Výsledek je 35! – evidentně. $\square$

Příklad 2 (1 bod). Kterých čísel je víc mezi prvním miliónem přirozených čísel – těch, která mají některou číslici rovnou 5, nebo těch, která číslici 5 neobsahují? Víme, že je $8^6 = 262\,144$, $9^6 = 531\,441$, $(9)_6 \cdot 6 = 362\,880$, $(10)_5 \cdot 6 = 181\,440$, $(10)_4 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$, $(10)_3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 86\,400$, $(10)_2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 32\,400$. Odpověď zdůvodněte.

Řešení. Čísel neobsahujících pětku je více: je jich

$$9^6 = 531\,441.$$

$\square$

Příklad 3 (2 body). Jaká je pravděpodobnost, že z dobře rozmíchané sady 32 karet vytáhnu 5 karet téže barvy?

Řešení. Výsledek je

$$\frac{4 \cdot \binom{8}{5}}{\binom{32}{5}}.$$

$\square$

Příklad 4 (2 body). Při házení kostkou padla desetkrát za sebou šestka. Jaká je pravděpodobnost, že padne pojedenácté?

Řešení. Výsledek je zjevně

$$\frac{1}{6}.$$

$\square$

Příklad 5 (2 body). Co je pravděpodobnější? V rodině se 2 dětmi jsou chlapec a děvče, nebo v rodině se 4 dětmi jsou dva chlapci a dvě děvčata? (Pravděpodobnost narození chlapce považujme za 0,5.)

Řešení. Podle binomického rozdělení (Bernoulliova vzorce – viz také skriptum na str. 12) je pravděpodobnější, že v rodině se 2 dětmi jsou chlapec a děvče, neboť platí

$$\frac{1}{2} > \frac{6}{16},$$

což jsou pravděpodobnosti jevů ze zadání. □

Příklad 6 (2 body). V prvním klobouku je 1 bílá a 2 černé kuličky. Ve druhém klobouku 3 bíle a 1 černá a ve třetím klobouku 2 bílé a 3 černé. Náhodně vybereme z každého klobouku 1 kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že tak dostaneme 2 bílé a 1 černou kuličku?

Řešení. Výsledek je

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5},$$

tj. $\frac{23}{60}$. □

Příklad 7 (2 body). Jsou dva disjunktní jevy, z nichž ani jeden není nemožný, nezávislé?

Řešení. Každé dva jevy A, B, pro které je $A \cap B \emptyset$, $P(A), P(B) \neq 0$, *nejsou* nezávislé, protože můžeme vyjádřit

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \cdot P(B).$$

Nastane-li jeden jev, nenastane druhý – závislost. □

Příklad 8 (1 bod). Kolika způsoby můžeme mezi 4 chlapce rozdělit 40 stejných kuliček?

Řešení. Přidejme ke 40 kuličkám troje zápalky. Poskládáme-li kuličky a zápalky do řady, rozdělí sirky kuličky na 4 úseky. Náhodně seřaďme (rozlišitelné) chlapce.

Dáme-li prvnímu chlapci všechny kuličky z prvního úseku, druhému chlapci všechny kuličky z druhého úseku atd., je již vidět, že všech rozdělení je právě

$$\binom{43}{3} = 12\,341.$$

$\square$

Příklad 9 (2 body). Nechť je zcela náhodně rozdělena tyč o délce 10 na tři části. Určete pravděpodobnost, že její první díl nebude delší než 1.

Řešení. Jedná se o příklad na geometrickou pravděpodobnost s výsledkem

$$\frac{\frac{10^2}{2} - \frac{9^2}{2}}{\frac{10^2}{2}} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 0,19.$$

$\square$