První zápočtový test – A

Příklad 1 (1 bod). Sešlo se pět přátel a navzájem si potřásli rukama. Určete počet potřesení.

Příklad 2 (1 bod). Nechť je $n > 3$. Který z následujících vztahů

(a) $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{2}$, (b) $\binom{n}{n-1} < \binom{n}{2}$, (c) $\binom{n}{n-1} > \binom{n}{2}$

platí? (Ten např. zatrhněte – musí být *zjevně* rozpoznatelné, co je odpovídáno!)

Příklad 3 (2 body). Určete kolika způsoby lze z 10 kosmonautů vybrat čtyřčlennou posádku, není-li možné (z jistých důvodů), aby jistí dva kosmonauti letěli spolu.

Příklad 4 (2 body). Ze sady 52 karet (26 červených a 26 černých) náhodně vyberme polovinu. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme 13 červených a 13 černých karet?

Příklad 5 (2 body). Z karetní hry o 32 kartách vytahujeme postupně šestkrát bez vracení po jedné kartě. Jaká je pravděpodobnost, že eso bude taženo až v posledním tahu?

Příklad 6 (2 body). Máme 6 klobouků. V prvním klobouku jsou 2 bílé kuličky a 1 černá, ve druhém a ve třetím jsou 3 bílé a 2 černé, ve čtvrtém, pátém a šestém klobouku jsou 2 bílé a 3 černé. Náhodně vybereme klobouk a z něj potom náhodně vylosujeme kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílá?

Příklad 7 (2 body). Určete pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padla na obou prvočísla, jestliže padl součet 8.

Příklad 8 (1 bod). Kolika způsoby lze na šachovnici (8 x 8 polí) postavit bílou a černou věž tak, aby se neohrožovaly (nebyly ve stejném řádku ani sloupci)?

Příklad 9 (2 body). Nechť je zcela náhodně rozdělena tyč o délce m na tři části. Určete pravděpodobnost, že její nejdelší část bude kratší než součet zbývajících dvou.

První zápočtový test – B

Příklad 1 (1 bod). Kolik čtyřciferných čísel, v nichž se žádná číslice neopakuje, lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 5, 6, 7 a 9.

Příklad 2 (1 bod). Rozepíšeme-li výraz $(a+b)^n$, přičemž $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, do tvaru součtu reálných násobků „členů“ $a^{n-j} \cdot b^j$, kde $j \in \{0, \ldots, n\}$, potom u členu $a \cdot b^{n-1}$ bude vždy (tj. pro všechna uvažovaná a, b, n) koeficient:

(a) $\binom{n-1}{1}$; (b) $\binom{n-1}{0}$; (c) $\binom{n}{1}$.

Napište „a“, „b“, či „c“.

Příklad 3 (3 body). K vytrvalostnímu závodu, v němž běžci vybíhají jeden po druhém s pevnými časovými odstupy, se přihlásilo k závodníků, mezi nimi také tři kamarádi. Určete, kolika způsoby lze sestavit rozvrh startů tak, aby žádní dva z trojice kamarádů nestartovali těsně po sobě. (Uvažujeme $k \geq 5$.)

Příklad 4 (2 body). Do urny s m ($m \in \mathbb{N}$ je sudé) žlutými tenisovými míčky vložíme $2m$ obarvených (dejme tomu, že červených) tenisových míčků. Jak je pravděpodobné, že když najednou z urny vysypeme m míčků, bude právě polovina vysypaných míčků žlutá?

Příklad 5 (2 body). Dva střelci střílejí nezávisle na sobě do jednoho terče, každý po jednom výstřelu. Pravděpodobnost zásahu terče je pro prvního střelce 0,7, pro druhého je 0,5. Jaká je pravděpodobnost, že po střelbě bude v terči právě jeden zásah?

Příklad 6 (2 body). Tyč o délce 2 m je náhodně rozřezána na tři části. Nalezněte pravděpodobnost jevu, že třetí část měří méně než $1,5$ m.

Příklad 7 (2 body). Uveďte příklady dvou funkcí P a R, které jsou pravděpodobnostmi na množině všech podmnožin $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, přičemž požadujeme, aby funkce P nabývala alespoň jedné hodnoty, které nenabývá R.

Příklad 8 (2 body). Hodíme deseti kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na třech padne šestka.

První zápočtový test – C

Příklad 1 (1 bod). Kolik slov lze vytvořit ze slova „automobilka“ změnou pořadí písmen? (Pochopitelně se nebere ohled na to, zda vzniklá slova mají jazykový smysl.)

Příklad 2 (1 bod). Které z čísel

(a) $\binom{m+n-1}{n-1}$, (b) m^n, (c) $\binom{m+n-1}{m-1}$

udává, kolika způsoby lze rozmístit n nerozlišitelných předmětů do m rozlišitelných přihrádek (pro obecná $m, n \in \mathbb{N}$)? Napište a, b, nebo c.

Příklad 3 (2 body). Kolika způsoby lze rozdělit mezi tři osoby A, B a C 33 různých mincí tak, aby osoby A a B měly dohromady dvakrát více mincí, než má osoba C.

Příklad 4 (2 body). Z karetní hry o 108 kartách (2 x 52 + 4 žolíci) bez vracení vybereme 4 karty. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jedna z nich je eso nebo žolík?

Příklad 5 (2 body). V jednom klobouku je 5 bílých a 2 černé kuličky, ve druhém 3 bílé a 7 černých. Náhodně zvolíme jeden klobouk a vytáhneme z něj kuličku. Určete pravděpodobnost, že bude bílá.

Příklad 6 (2 body). Z klobouku, v němž je 9 bílých a 1 černá kulička, namátkou vytáhneme kuličku a vrátíme ji zpět. Kolikrát tento pokus musíme provést, aby pravděpodobnost, že aspoň jednou vytáhneme černou kuličku, byla větší než 0,9?

Příklad 7 (2 body). Řekněte, co znamená, že blíže neupřesněné jevy A, B, C, D jsou stochasticky nezávislé? (Neuvádějte intuitivní vystižení podstaty, nýbrž definici!)

Příklad 8 (2 body). Zvolme zcela náhodně dvě nezáporná reálná čísla ostře menší 1. Jaká je pravděpodobnost, že součet jejich druhých mocnin je menší nebo roven 1?

Příklad 9 (1 bod). Napište, čemu se rovná $(n)_k$ pro *všechna* $n, k \in \mathbb{N}$.

První zápočtový test – D

Příklad 1 (1 bod). Lze tipovat výsledky 15 zápasů – zda vyhrají domácí, hosté, či skončí nerozhodně. Určete, kolik je všech možných tipů.

Příklad 2 (1 bod). Která z rovností

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{5-k} = 16,$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} k\binom{5}{k} = 32,$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \binom{5}{k} = 31$

platí? (Uveďte ji. Nelze však uvést více než jednu možnost.)

Příklad 3 (2 body). Určete, kolika způsoby lze rozdělit 8 chlapců a 4 děvčata do dvou šestičlenných skupin tak, aby v každé skupině byla alespoň jedna dívka.

Příklad 4 (2 body). V klobouku máme 8 bílých, 7 černých a 5 modrých kuliček. Vybereme z něho náhodně bez vracení 3 kuličky. Jaká je pravděpodobnost, že právě dvě budou bílé?

Příklad 5 (2 body). Dvanáctkrát nezávisle na sobě házíme třemi mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň v jednom hodu padnou tři líce?

Příklad 6 (2 body). Jaká je pravděpodobnost, že součet dvou náhodně zvolených kladných čísel menších než 1 bude menší než $\frac{3}{8}$?

Příklad 7 (2 body). Odvoďte větu o násobení podmíněných pravděpodobností pro 3 jevy.

Příklad 8 (2 body). V urně jsou 2 bílé, 3 černé a 2 modré kuličky. Náhodně je vytahujeme bez vracení. Jaká je pravděpodobnost, že dříve vytáhneme bílou než černou?

Příklad 9 (1 bod). Stanovte $P(A/B) = P(A|B)$ (tj. určete pravděpodobnost jevu A podmíněnou jevem B – nalezněte konkrétní číslo) pro $A = B$ a také tehdy, když jsou jevy A a B neslučitelné. (Pochopitelně požadujeme, aby $P(B) \neq 0$.)

První zápočtový test – E

Příklad 1 (1 bod). Výletu se zúčastní 35 lidí. Podle požadavků organizátorů se musí libovolným způsobem rozdělit do čtyř skupin tak, aby první skupina měla 17 účastníků, druhá 8, třetí 6 a poslední čtvrtá potom 4. Určete kolika způsoby se mohou výletníci rozdělit do těchto čtyř skupin.

Příklad 2 (1 bod). Napište prvních šest řádků Pascalova trojúhelníku. (Upozorněme, že prvním řádkem rozumíme samotné číslo 1.)

Příklad 3 (2 body). Kolika způsoby lze postavit na šachovnici (64 polí – 32 bílých, 32 černých) pět rozlišitelných figurek tak, aby dvě stály na bílých a tři na černých polích?

Příklad 4 (2 body). Tři hráči dostanou po 10 kartách a 2 zbudou (z balíčku připraveného na mariáš nebo prší – 32 karet, z toho 4 esa). Je pravděpodobnější, že někdo dostane alespoň dvě esa, nebo to, že zbyla dvě esa? Svou odpověď musíte zdůvodnit (nemusíte však nutně počítat pravděpodobnosti zadaných jevů).

Příklad 5 (3 body). Řada v divadle se skládá z 2 m míst k sezení. Pokud ji obsadí m mužů a m žen, jaká je pravděpodobnost, že žádné dvě osoby stejného pohlaví nebudou sedět vedle sebe?

Příklad 6 (2 body). V malém tichomořském přístavu kotví pouze dvě obchodní lodě. Ty se zde mohou během dne potkat s pravděpodobností 0,3. Za předpokladu, že denní provozy těchto lodí jsou nezávislé, určete pravděpodobnost, že během týdne se tyto dvě lodě v přístavu potkají právě třikrát.

Příklad 7 (2 body). V urně jsou čtyři lístky s čísly 001, 100, 010, 111. Označme A_i (kde $i \in \{1, 2, 3\}$) jev, že náhodně vytažený lístek má jedničku na i-té pozici. Zjistěte (a odůvodněte své zjištění), zda jsou jevy A_1, A_2, A_3 stochasticky nezávislé.

Příklad 8 (2 body). Z 32 karet táhneme dvakrát po jedné kartě. Nalezněte pravděpodobnost, že druhá tažená karta bude král, když první kartu vrátíme, a také tehdy, když ji do balíčku nevrátíme (druhou kartu potom vybíráme z balíčku 31 karet).

První zápočtový test – F

Příklad 1 (1 bod). Řecká abeceda se skládá z 24 písmen. Kolik slov majících právě šest písmen z ní lze utvořit. (Bez ohledu na to, zda tato slova mají nějaký jazykový význam.)

Příklad 2 (1 bod). Definujte multinomický koeficient $P(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ pro nezáporná celá čísla $k_1, k_2, \ldots, k_n$, přičemž $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$ a $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 3 (2 body). Kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit 7 stejných hrušek a 5 stejných jablek bez krájení?

Příklad 4 (2 body). Hodíme n kostkami ($n \in \mathbb{N}$). Jaká je pravděpodobnost, že mezi čísly, která padnou, *nebudou* hodnoty 1, 3 a 6?

Příklad 5 (2 body). V osudí je 10 koulí, a to 5 černých a 5 bílých. Postupně budeme losovat po jedné kouli, přičemž vytaženou kouli nevrátíme zpět. Jaká je pravděpodobnost, že nejprve vytáhneme bílou, poté černou, pak bílou a v posledním čtvrtém tahu opět bílou kouli?

Příklad 6 (2 body). Určete pravděpodobnost, že v rodině s pěti dětmi je více chlapců než děvčat, za podmínky, že v rodině je alespoň jeden chlapec. (Narození dívky a chlapce považujeme za stejně pravděpodobné.)

Příklad 7 (2 body). Urna obsahuje 5 bílých a 5 černých koulí. Náhodně vybereme 5 koulí a vložíme je do jiné, předtím prázdné urny. Z této druhé urny náhodně vytáhneme kouli a zjistíme, že je černá. Kouli nevrátíme zpět a vytáhneme ze druhé urny ještě jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že je bílá? Zdůvodněte.

Příklad 8 (3 body). Nalezněte pravděpodobnosti, že při hodu

(i) šesti kostkami padne aspoň jedna šestka,

(ii) dvanácti kostkami padnou aspoň dvě šestky,

(iii) osmnácti kostkami padnou aspoň tři šestky.

První zápočtový test – G

Příklad 1 (1 bod). Kolika způsoby se může 35 cestujících rozsadit v autobuse, kde je 35 míst?

Příklad 2 (1 bod). Kterých čísel je víc mezi prvním miliónem přirozených čísel – těch, která mají některou číslici rovnou 5, nebo těch, která číslici 5 neobsahují? Víme, že je $8^6 = 262\,144$, $9^6 = 531\,441$, $(9)_6 \cdot 6 = 362\,880$, $(10)_5 \cdot 6 = 181\,440$, $(10)_4 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$, $(10)_3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 86\,400$, $(10)_2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 32\,400$. Odpověď zdůvodněte.

Příklad 3 (2 body). Jaká je pravděpodobnost, že z dobře rozmíchané sady 32 karet vytáhnu 5 karet téže barvy?

Příklad 4 (2 body). Při házení kostkou padla desetkrát za sebou šestka. Jaká je pravděpodobnost, že padne pojedenácté?

Příklad 5 (2 body). Co je pravděpodobnější? V rodině se 2 dětmi jsou chlapec a děvče, nebo v rodině se 4 dětmi jsou dva chlapci a dvě děvčata? (Pravděpodobnost narození chlapce považujme za 0,5.)

Příklad 6 (2 body). V prvním klobouku je 1 bílá a 2 černé kuličky. Ve druhém klobouku 3 bíle a 1 černá a ve třetím klobouku 2 bílé a 3 černé. Náhodně vybereme z každého klobouku 1 kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že tak dostaneme 2 bílé a 1 černou kuličku?

Příklad 7 (2 body). Jsou dva disjunktní jevy, z nichž ani jeden není nemožný, nezávislé?

Příklad 8 (1 bod). Kolika způsoby můžeme mezi 4 chlapce rozdělit 40 stejných kuliček?

Příklad 9 (2 body). Nechť je zcela náhodně rozdělena tyč o délce 10 na tři části. Určete pravděpodobnost, že její první díl nebude delší než 1.