Třetí zápočtový test – A

Příklad 1 (1 bod). Rozhodněte, zda jsou matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 2 & 7 & 159 \\ 2 & 7 & 1123 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1489 & \sqrt{113} \end{pmatrix}$$

řádkově ekvivalentní. Svou odpověď musíte zdůvodnit.

Řešení. Obě matice jsou zřejmě regulární, a proto jsou obě řádkově ekvivalentní s trojrozměrnou jednotkovou maticí. Řádková ekvivalence na množině všech matic daných rozměrů je ovšem relací ekvivalence, a tudíž jsou matice A a B řádkově ekvivalentní. □

Příklad 2 (2 body). Za pomoci výpočtu inverzní matice vyřešte

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 5. \end{aligned}$$

Řešení. Neboť inverzní maticí k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

je

$$\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

dostáváme výsledek

$$x_1 = 3\,\frac{1}{4}, \quad x_2 = -\frac{3}{4}, \quad x_3 = -\frac{3}{4}, \quad x_4 = \frac{1}{4}.$$

□

Příklad 3 (2 body). Nechť je dána množina

$$X = \{1 + 2x - x^5, 6 + x^3, 1 - x - 3x^5, x^7 - x^{25}, 1 - x^7, x^3 - x^4, x^2 - 4x^7\}$$

reálných polynomů v $\mathcal{P}$. Zjistěte, zda patří polynom

$$-3x^5 + 2x^4 + 6x + 15$$

do vektorového podprostoru $\mathcal{P}$ generovaného množinou X.

Řešení. Ano, patří. Platí například

$$3(1 + 2x - x^5) + 2(6 + x^3) - 2(x^3 - x^4) = -3x^5 + 2x^4 + 6x + 15.$$

□

Příklad 4 (2 body). Jestliže lineárnímu zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ přísluší (vzhledem ke standardní bázi $\mathbb{R}^3$) matice

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

a lineárnímu zobrazení $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ odpovídá (vzhledem ke standardním bázím) matice

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 7 \\ 2 & -4 & 7 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix},$$

určete matici, která zadává lineární zobrazení $G \circ F$ (vzhledem ke standardním bázím).

Řešení. Výsledek je (viz cvičení)

$$\begin{pmatrix} 2 & -11 & -9 \\ 13 & -5 & -4 \\ 12 & 5 & -23 \\ 12 & 5 & -23 \\ 12 & 5 & -23 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 5 (2 body). Najděte všechny matice Q, pro které platí

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

Zároveň dokažte, že jste uvedli všechny takové matice – že žádná jiná matice Q splňující podmínku $(*)$ neexistuje.

Řešení. Zaznělo na cvičení. Hledané matice existují dvě, a to

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 6 (2 body). Zjistěte, jestli je množina $V = \{(a,b);\ a,b \in \mathbb{R}\}$ s operacemi

$$\oplus :\ V \times V \to V, \quad (a,b) \oplus (c,d) := (a+c, b+d), \quad a,b,c,d \in \mathbb{R},$$

$$\odot :\ \mathbb{R} \times V \to V, \quad k \odot (a,b) := (2ka, 2kb), \quad a,b,k \in \mathbb{R}$$

vektorovým prostorem? Pokud ne, které z axiomů A1, A2, ..., A8 nesplňuje? Pouze doplňme, že podmínky U1 a U2 očividně platí.

Řešení. Lehce se ověří, že se nejedná o vektorový prostor, neboť *nejsou* splněny axiomy A7 a A8. □

Příklad 7 (2 body). Určete číslo $t \in \mathbb{R}$ tak, aby vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ byly navzájem kolmé, je-li:

a) $u = (t, 2, -1), \quad v = (1, -t, 3)$;

b) $u = (1, 1, 2t), \quad v = (t, t, -1)$;

c) $u = (1, 2-t, 3), \quad v = (-t, 2, 1+t)$.

Řešení. V první případě je $t = -3$, ve druhém můžeme zvolit $t \in \mathbb{R}$ jakkoliv, ve třetím potom hledané $t \in \mathbb{R}$ neexistuje. □

Příklad 8 (2 body). Spočítejte determinant $m \times m$ matic ($m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ x_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$R = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-m & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-m & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-m \end{pmatrix}.$$

Řešení. V případě matice P je vhodné od prvního řádku odečíst všechny ostatní. Takto dostaneme, že

$$|\,P\,| = -(x_2 + x_3 + \cdots + x_m).$$

V případě matice R je naopak vhodné k prvnímu řádku přičíst všechny ostatní – tak lze totiž odhalit, že se jedná o singulární matici. □