Třetí zápočtový test – B

Příklad 1 (2 body). Spočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Výsledek je

$$-105.$$

□

Příklad 2 (1 bod). Definujte skalární součin dvou vektorů v $\mathbb{R}^n$ a uveďte, co znamená, když o dvou n-rozměrných reálných vektorech řekneme, že jsou kolmé, a když o nich řekneme, že jsou lineárně (ne)závislé. (Číslo $n \in \mathbb{N}$ je libovolné.)

Řešení. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 35, str. 39-40. □

Příklad 3 (2 body). Vypočítejte

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete také hodnost výsledné matice.

Řešení. Výsledek je

$$\begin{pmatrix} 49 & 38 & 114 & 0 \\ -13 & -12 & -28 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je zřejmě rovna 2. □

Příklad 4 (2 body). Lineární zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je zadáno vztahem

$$F((x_1, x_2, x_3)) = (2x_3 - x_1, 5x_3 + x_1, 0, x_1 - 2x_2 + 7x_3), \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Napište matici – označme ji jako A, která toto zobrazení zadává (vzhledem ke standardním bázím), a určete dim Ker A a dim Im A.

Řešení. Zřejmě je (viz cvičení)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

a

$$\dim \operatorname{Im} A = 3, \quad \dim \operatorname{Ker} A = 0.$$

□

Příklad 5 (2 body). Jakou dimenzi má prostor reálných polynomů stupně nejvýše n, přičemž $n \in \mathbb{N}$ je blíže neupřesněné. Uveďte nějaké dvě jeho navzájem odlišné báze.

Řešení. Dimenze uvedeného prostoru je $n + 1$ (viz skriptum doc. Hilschera, str. 81). Jeho bázi tvoří například lineárně nezávislé vektory

$$x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n$$

nebo kupř.

$$25, x - 1, 6x^2 + 2, x^3, \ldots, x^{n-1}, x^n$$

apod. □

Příklad 6 (1 bod). Uveďte nějaký vektorový prostor, který nemá konečnou bázi. (Říkáme, že má nekonečnou dimenzi.)

Řešení. Hledaným vektorovým prostorem je např. $\mathcal{P}$. Viz skriptum doc. Hilschera, 10. kapitola – Příklad 95, (e); Důsledek 2. □

Příklad 7 (1 bod). Nalezněte inverzní matici k $n \times n$ matici ($n > 1$)

$$A = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \end{pmatrix}.$$

Napovězme, že

$$A^{-1} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pro nějaké $a \in \mathbb{R}$.

Řešení. Výsledek je

$$a = \frac{1}{n-1}.$$

□

Příklad 8 (2 body). Nechť jsou dány nějaké lineárně nezávislé vektory u, v, w, z v nějakém vektorovém prostoru V. Zjistěte, zda jsou ve V lineárně závislé, či nezávislé, vektory

$$u - 8v, \qquad 3u + w - z,$$

$$u - 4v + w + 2z,$$

$$4v + 8w + 4z.$$

Řešení. Lze snadno ukázat (viz cvičení), že dané vektory jsou nezávislé. Vyplývá to mj. např. z toho, že je

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = -324 \neq 0.$$

□

Příklad 9 (2 body). V závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{R}$ rozhodněte o řešitelnosti (má, nebo nemá řešení), resp. o počtu řešení (bez hledání těchto řešení) soustavy lineárních rovnic, která je zadaná maticí přidružené homogenní soustavy

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & a \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & -1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

a vektorem pravé strany

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Pro $a = 0$ nemá uvažovaný systém řešení; pro $a \neq 0$ má nekonečně mnoho řešení. $\square$