Třetí zápočtový test – C

Příklad 1 (1 bod). Co znamená, když o nějakém systému lineárních rovnic řekneme, že je *konzistentní*, nebo *nekonzistentní*?

Řešení. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 28. □

Příklad 2 (1 bod). Uveďte příklad čtvercové pětirozměrné matice A, jejíž všechny prvky jsou nenulové, takové, že

$$\det A = |\,A\,| = 0.$$

Řešení. Jednoduchým příkladem hledané matice je např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě je hodnost této matice rovna 1, a proto je její determinant roven 0. (Determinant čtvercové matice je nenulový, právě když jsou vektory určené jejími sloupci (resp. řádky) lineárně nezávislé.) □

Příklad 3 (2 body). Užitím Kramerova pravidla (jiný způsob výpočtu nebude uznán) vypočítejte

$$\begin{aligned} 4x + 5y + 4z &= 2, \\ 4x + 2y + 6z &= 0, \\ 2x + 4y + 2z &= 2. \end{aligned}$$

Řešení. Výsledek je

$$x = -\frac{1}{3}, \quad y = \frac{2}{3}, \quad z = 0,$$

neboť podle Kramerova pravidla je

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}}, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}}, \quad z = \frac{\det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}}.$$

□

Příklad 4 (3 body). Libovolným způsobem určete A^{-1}, jestliže je

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$, přičemž i je imaginární jednotka,

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení. V prvním případě je

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Ve druhém je potom

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 5 (2 body). Zjistěte, zda matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$.

Řešení. Uvedené čtyři matice jsou jako vektory v prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ lineárně nezávislé. Vyplývá to z faktu, že matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

je regulární (tj. její hodnost je rovna 4, tj. je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí, tj. existuje k ní matice inverzní, tj. má nenulový determinant – roven 116, tj. jí zadaná homogenní soustava lineárních rovnic má pouze nulové řešení, tj. každý nehomogenní lineární systém s levou stranou určenou touto maticí má právě jedno řešení, tj. jádro této matice je triviální (pod)prostor, tj. obor hodnot lineárního zobrazení, jenž zadává, je vektorový prostor dimenze 4, tj. toto zobrazení je injektivní). $\square$

Příklad 6 (2 body). Nechť je zobrazení $F : \mathrm{Mat}_{2\times 2} \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}$ zadáno předpisem

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}. \tag{$*$}$$

Rozhodněte (a svou odpověď odůvodněte), zda je F lineární. Pokud je lineární, lze jej reprezentovat vhodnou maticí – označme ji jako A (nějakou takovou – tato matice, pokud je F lineární, není dána jednoznačně). Je-li F lineární, určete $\dim \mathrm{Ker}\, A$ a $\dim \mathrm{Im}\, A$.

Řešení. Rozepsáním předpisu $(*)$ vzhledem k prvkům matice X lze dokázat, že zobrazení F je lineární (viz cvičení). Bez ohledu na to, jakou maticí jej budeme reprezentovat (tedy vzhledem k jaké bázi), vždy musí vyjít $\dim \mathrm{Ker}\, A = 1$ a $\dim \mathrm{Im}\, A = 3$. (Viz také druhá polovina 10. kapitoly ve skriptu doc. Hilschera.) $\square$

Příklad 7 (2 body). Rozhodněte, zda existuje homogenní soustava lineárních rovnic tří reálných proměnných, jejíž množinou řešení je:

a) $\{(0, 0, 0)\}$;

b) $\{(0, 1, 0), (0, 0, 0), (1, 1, 0)\}$;

c) $\{(x, 1, 0);\ x \in \mathbb{R}\}$;

d) $\{(0, 2x, x);\ x \in \mathbb{R}\}$.

Řešení. Při zachování pořadí jsou správné odpovědi: „ano“, „ne“, „ne“ a „ano“. $\square$

Příklad 8 (1 bod). Který z následujících vztahů

a) $h(A) = \dim \operatorname{Im} A$,

b) $\left(A^T\right)^T = A$,

c) A určuje lineární zobrazení $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$,

d) $n = h(A) + \dim \operatorname{Ker} A$

neplatí pro všechny reálné matice A o rozměrech $m \times n$? Napište „a“, „b“, „c“, nebo „d“. (Čísla $m, n \in \mathbb{N}$ jsou libovolná.)

Řešení. Matice A vzhledem ke svým rozměrům zadává lineární zobrazení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Mělo být odpovězeno „c“ (uvažte $n \neq m$). □

Příklad 9 (1 bod). Nechť jsou dány dvě symetrické matice A a B. Platí, že pokud je jejich součin symetrickou maticí, potom matice A a B komutují?

Řešení. Ano, platí. Viz skriptum doc. Hilschera, Kapitola 8, Tvrzení 8. Také např. platí, že je-li matice A regulární, je symetrická rovněž matice A^{-1}, a několik dalších zajímavých tvrzení. □