Třetí zápočtový test – D

Příklad 1 (2 body). Za pomoci násobení elementárními maticemi zprava vypočítejte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x - 5y + 2u + 4z &= 2, \\ 5x + 7y - 4u - 6z &= 3, \\ 7x - 4y + u + 3z &= 5. \end{aligned}$$

Řešení. Soustava je neřešitelná (tj. nemá řešení). □

Příklad 2 (2 body). V reálném trojrozměrném prostoru určete nějaký (lhostejno jaký) nenulový vektor w kolmý k oběma vektorům u a v. Přitom

a) $u = (1, -1, 2), \quad v = (3, 1, 1)$,

b) $u = (1, 0, 1), \quad v = (-1, 3, 2)$,

c) $u = (1, -1, 3), \quad v = (0, 0, 1)$.

Řešení. Uvážíme-li, jak je definováno, že dva vektory jsou kolmé, potažmo definici skalární součinu, zjistíme, že se zřejmě jedná o jednoduchou úlohu na nalezení alespoň jednoho nenulového řešení homogenní soustavy lineárních rovnic, která má nekonečně mnoho řešení. Výsledkem je např.

$$w_{\mathrm{a})} = (-3, 5, 4), \quad w_{\mathrm{b})} = (1, 1, -1), \quad w_{\mathrm{c})} = (1, 1, 0).$$

□

Příklad 3 (2 body). Napište nějaké dvě matice A a B, které mají nuly na (hlavní) diagonále a které splňují tyto tři podmínky

$$A^2 = I, \quad B^2 = -I, \quad A^2 + B^2 = 0,$$

přičemž symbolem I označujeme jednotkovou a symbolem 0 nulovou čtvercovou matici stejného rozměru, jakého jsou matice A a B.

Dále uveďte nějakou matici C, pro niž zároveň platí

$$C^2 = C, \quad C \neq I, \quad C \neq 0.$$

Řešení. Můžeme např. položit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Viz demonstrativní cvičení, Příklad 35. $\square$

Příklad 4 (3 body). Vypočítejte adjungované matice k maticím

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (b) \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ 3-2i & 6 \end{pmatrix},$$

přičemž i označuje imaginární jednotku.

Řešení. Výslednými maticemi jsou

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}, \qquad (b) \begin{pmatrix} 6 & -2i \\ -3+2i & 1+i \end{pmatrix}.$$

$\square$

Příklad 5 (3 body). Vyřešte níže uvedenou maticovou rovnici, tj. nalezněte všechny dvojrozměrné čtvercové matice X, pro něž platí

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Hledaná matice existuje právě jedna, a to

$$\begin{pmatrix} 18 & -32 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Příklad 6 (2 body). Zjistěte, zda je množina $V = \{(1, x);\ x \in \mathbb{R}\}$ s operacemi

$$\oplus : V \times V \to V, \quad (1, y) \oplus (1, z) := (1, z + y) \text{ pro všechna } y, z \in \mathbb{R},$$

$$\odot : \mathbb{R} \times V \to V, \quad z \odot (1, y) := (1, y \cdot z) \text{ pro všechna } y, z \in \mathbb{R}$$

vektorovým prostorem? Které z axiomů A1, A2, ..., A8 splňuje? Platí podmínky U1 a U2? Své odpovědi musíte zdůvodnit!

Řešení. Lehce se ověří, že se jedná o vektorový prostor. První souřadnice neovlivňuje výpočty součtů vektorů ani hodnoty skalárních násobků vektorů: jedná se o přeznačený prostor $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ – obecně, každé těleso (tj. pole) je vektorový prostor sám nad sebou (viz cvičení). $\square$

Příklad 7 (1 bod). Napište matici zobrazení rotací o úhel ϕ kolem osy y v $\mathbb{R}^3$.

Řešení. Viz demonstrativní cvičení (Příklad 31). Výsledek je

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

$\square$