Třetí zápočtový test – E

Příklad 1 (3 body). Nechť je dán vektorový prostor V a nějaká jeho báze tvořená vektory u, v, w, z a vektorový prostor U a dva v něm lineárně *závislé* vektory x, y. Zjistěte, zda jsou (v daných vektorových prostorech V a U) vektory

a) $u - 3v + z, \quad v - 5w - z, \quad 3w - 7z, \quad u - 81w + z$

b) $x - 3y, \quad 5x - y$

lineárně závislé, nebo nezávislé.

Řešení. V prvním případě jsou vektory lineárně nezávislé, jak lze snadno zjistit (viz cvičení). Ve druhém jsou potom lineárně závislé, neboť x je skalárním násobkem y (x a y jsou závislé), a proto jsou všechny jejich lineární kombinace násobkem jistého vektoru. □

Příklad 2 (2 body). Za pomoci Frobeniovy věty rozhodněte o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 &= 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 &= 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 &= 6. \end{aligned}$$

Tedy určete, jestli má, či nemá řešení.

Řešení. Soustava má řešení (dokonce nekonečně mnoho), protože je

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 3 (2 body). Uveďte definici transponované matice k libovolné matici C. Co znamená, že dvě čtvercové matice A a B stejného rozměru komutují? Co znamená, když o nich řekneme, že A a B jsou (řádkově) ekvivalentní?

Řešení. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 49, resp. 54. □

Příklad 4 (2 body). Jsou množiny

$$U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4);\ a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R},\ a_1 - 5a_3 + \sqrt{2}a_4 = 0\},$$

$$V = \{(b_1, b_2, b_3, b_4);\ b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R},\ b_1 = 1\},$$

$$W = \{(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4);\ \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \in \mathbb{R},\ \phi_1 = \phi_3\},$$

vlastní podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$? Které z těchto množin jsou? Které nejsou?

Řešení. Vlastními podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou množiny U a W. Množina V je (obecnějším) afinním prostorem, který není vektorový, neboť rovnice $b_1 = 1$ je nehomogenní (dané podprostory jsou vlastně množiny řešení daných rovnic). □

Příklad 5 (2 body). Vypočítejte determinanty matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 74 & -11 & 51 & 1 & 16 \\ -7 & 2 & -8 & 4 & 1117 \\ 21 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1178 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Výsledky jsou

$$|\,A\,| = 76, \quad |\,B\,| = 0.$$

Uvědomte si, že poslední tři řádky matice B jsou skalárními násobky řádkového vektoru

$$(1, 0, 0, 0, 0),$$

a proto jsou lineárně závislé. To již implikuje, že determinant B je roven 0. □

Příklad 6 (1 bod). Popište, jak vypadá podprostor vektorového prostoru $\mathcal{P}$ generovaný množinou

$$M = \{0, 3x^2, 1 - x, 2x^2 + x, x - 111, 1 - x^2, x^2 - 17, -4x\}.$$

Řešení. Zřejmě je

$$\langle M \rangle = \mathcal{P}_2.$$

$\square$

Příklad 7 (2 body). Nechť je dáno

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Najděte taková reálná čísla b_1, b_2, b_3, aby reálný systém lineárních rovnic $A \cdot x = b$ měl:

a) nekonečně mnoho řešení;

b) právě jedno řešení;

c) méně než jedno řešení;

d) právě 4 řešení.

Lze vždy najít taková čísla?

Řešení. Správné odpovědi jsou:

a) např. $b_1, b_2, b_3 = 0$;

b) nelze;

c) např. $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1$;

d) nelze.

$\square$

Příklad 8 (1 bod). Uvažujte 2×2 matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a určete její mocniny A^1, A^2 a A^3.

Řešení. Viz demonstrativní cvičení, Příklad 33. $\square$