Třetí zápočtový test – F

Příklad 1 (2 body). Vyřešte soustavu reálných lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \varphi x_1 + 4x_2 + 2\,x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0, \end{aligned}$$

ve které $\varphi \in \mathbb{R}$ je parametr.

Řešení. Množina všech řešení je

$$\{(-10\,t, (\varphi+4)\,t, (3\varphi-8)\,t);\ t \in \mathbb{R}\}.$$

□

Příklad 2 (3 body). Libovolným způsobem vypočítejte systém homogenních lineárních rovnic zadaný maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{6} & 0 \\ 2 & 2 & \sqrt{3} & -2 & -\sqrt{5} \\ 0 & 2 & \sqrt{5} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 3 & 3 & \sqrt{3} & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Řešením jsou právě všechny skalární násobky vektoru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

Příklad 3 (2 body). Spočtěte determinanty matic

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \end{pmatrix},$$

přičemž konkrétní hodnota čísel a_{ij}, b není upřesněna.

Řešení. Determinant matice A je roven 0: stačí uvážit zjevnou lineární závislost posledních tří řádků této matice nebo blokový tvar A po záměně prvních dvou za poslední dva sloupce.

Determinant matice B je pak roven číslu b_{11}. □

Příklad 4 (3 body). V závislosti na parametru $t \in \mathbb{R}$ určete dimenzi podprostoru U vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li U generován vektory:

a) $u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (1, t, 1), \quad u_3 = (2, 2, t);$

b) $u_1 = (5, 7, -1), \quad u_2 = (-10, -14, 2), \quad u_3 = (0, 0, 0), \quad u_4 = (2t, 1, -2);$

c) $u_1 = (t, t, t), \quad u_2 = (6t, 6t, 6t), \quad u_3 = (-4t, -4t, 4t), \quad u_4 = (-2, -2, -2);$

d) $u_1 = (0, 0, 0), \quad u_2 = (5t, -3t, t).$

Řešení. V prvním případě je pro $t \in \{1, 2\}$ dim $U = 2$, jinak je dim $U = 3$. Ve druhém a ve třetím případě je vždy dim $U = 2$. Ve čtvrtém je potom pro $t \neq 0$ dim $U = 1$ a pro $t = 0$ je dim $U = 0$. □

Příklad 5 (1 bod). Napište definici lineární nezávislosti a závislosti vektorů libovolného konečného počtu v libovolném reálném vektorovém prostoru konečné dimenze.

Řešení. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 74. □

Příklad 6 (1 bod). Udejte příklad nějaké regulární diagonální matice, která není symetrická, ale k ní inverzní matice symetrická je.

Řešení. Hledaná matice neexistuje: každá diagonální matice je symetrická. □

Příklad 7 (1 body). Popište všechny matice o rozměrech 5×5, ke kterým existují inverzní matice, takové, že součinem daných matic a jejich inverzí v libovolném pořadí je matice jednotková. Charakterizujte je např. nějakou podmínkou, kterou musí splňovat a kterou zároveň žádné jiné matice nesplňují.

Řešení. Požadavkům zjevně vyhovuje každá regulární matice, tj. vyhovují jim právě ty matice daného rozměru, jejichž hodnost je rovna 5, tj. takové matice 5×5, které mají nenulový determinant. Další ekvivalentní podmínky – viz skriptum doc. Hilschera. □

Příklad 8 (2 body). Vypočítejte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Správnost výpočtu můžete poté ověřit.

Řešení. Výsledek je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -4 \\ 1 & 12 & -5 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

□