Třetí zápočtový test – A

Příklad 1 (1 bod). Rozhodněte, zda jsou matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 2 & 7 & 159 \\ 2 & 7 & 1123 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1489 & \sqrt{113} \end{pmatrix}$$

řádkově ekvivalentní. Svou odpověď musíte zdůvodnit.

Příklad 2 (2 body). Za pomoci výpočtu inverzní matice vyřešte

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 5. \end{aligned}$$

Příklad 3 (2 body). Nechť je dána množina

$$X = \{1 + 2x - x^5, 6 + x^3, 1 - x - 3x^5, x^7 - x^{25}, 1 - x^7, x^3 - x^4, x^2 - 4x^7\}$$

reálných polynomů v $\mathcal{P}$. Zjistěte, zda patří polynom

$$-3x^5 + 2x^4 + 6x + 15$$

do vektorového podprostoru $\mathcal{P}$ generovaného množinou X.

Příklad 4 (2 body). Jestliže lineárnímu zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ přísluší (vzhledem ke standardní bázi $\mathbb{R}^3$) matice

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

a lineárnímu zobrazení $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ odpovídá (vzhledem ke standardním bázím) matice

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 7 \\ 2 & -4 & 7 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix},$$

určete matici, která zadává lineární zobrazení $G \circ F$ (vzhledem ke standardním bázím).

Příklad 5 (2 body). Najděte všechny matice Q, pro které platí

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Zároveň dokažte, že jste uvedli všechny takové matice – že žádná jiná matice Q splňující podmínku $(*)$ neexistuje.

Příklad 6 (2 body). Zjistěte, jestli je množina $V = \{(a, b);\ a, b \in \mathbb{R}\}$ s operacemi

$$\oplus : V \times V \to V, \quad (a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$
$$\odot : \mathbb{R} \times V \to V, \quad k \odot (a, b) := (2ka, 2kb), \quad a, b, k \in \mathbb{R}$$

vektorovým prostorem? Pokud ne, které z axiomů A1, A2, ..., A8 nesplňuje? Pouze doplňme, že podmínky U1 a U2 očividně platí.

Příklad 7 (2 body). Určete číslo $t \in \mathbb{R}$ tak, aby vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ byly navzájem kolmé, je-li:

a) $u = (t, 2, -1), \quad v = (1, -t, 3)$;

b) $u = (1, 1, 2t), \quad v = (t, t, -1)$;

c) $u = (1, 2 - t, 3), \quad v = (-t, 2, 1 + t)$.

Příklad 8 (2 body). Spočítejte determinant $m \times m$ matic ($m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ x_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$R = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-m & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-m & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-m \end{pmatrix}.$$

Třetí zápočtový test – B

Příklad 1 (2 body). Spočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2 (1 bod). Definujte skalární součin dvou vektorů v $\mathbb{R}^n$ a uveďte, co znamená, když o dvou n-rozměrných reálných vektorech řekneme, že jsou kolmé, a když o nich řekneme, že jsou lineárně (ne)závislé. (Číslo $n \in \mathbb{N}$ je libovolné.)

Příklad 3 (2 body). Vypočítejte

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete také hodnost výsledné matice.

Příklad 4 (2 body). Lineární zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je zadáno vztahem

$$F((x_1, x_2, x_3)) = (2x_3 - x_1, 5x_3 + x_1, 0, x_1 - 2x_2 + 7x_3), \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Napište matici – označme ji jako A, která toto zobrazení zadává (vzhledem ke standardním bázím), a určete $\dim \operatorname{Ker} A$ a $\dim \operatorname{Im} A$.

Příklad 5 (2 body). Jakou dimenzi má prostor reálných polynomů stupně nejvýše n, přičemž $n \in \mathbb{N}$ je blíže neupřesněné. Uveďte nějaké dvě jeho navzájem odlišné báze.

Příklad 6 (1 bod). Uveďte nějaký vektorový prostor, který nemá konečnou bázi. (Říkáme, že má nekonečnou dimenzi.)

Příklad 7 (1 bod). Nalezněte inverzní matici k $n \times n$ matici $(n > 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \end{pmatrix}.$$

Napovězme, že

$$A^{-1} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pro nějaké $a \in \mathbb{R}$.

Příklad 8 (2 body). Nechť jsou dány nějaké lineárně nezávislé vektory u, v, w, z v nějakém vektorovém prostoru V. Zjistěte, zda jsou ve V lineárně závislé, či nezávislé, vektory

$$u - 8v, \qquad 3u + w - z,$$

$$u - 4v + w + 2z,$$

$$4v + 8w + 4z.$$

Příklad 9 (2 body). V závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{R}$ rozhodněte o řešitelnosti (má, nebo nemá řešení), resp. o počtu řešení (bez hledání těchto řešení) soustavy lineárních rovnic, která je zadaná maticí přidružené homogenní soustavy

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & a \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & -1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

a vektorem pravé strany

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Třetí zápočtový test – C

Příklad 1 (1 bod). Co znamená, když o nějakém systému lineárních rovnic řekneme, že je *konzistentní*, nebo *nekonzistentní*?

Příklad 2 (1 bod). Uveďte příklad čtvercové pětirozměrné matice A, jejíž všechny prvky jsou nenulové, takové, že
$$\det A = |\,A\,| = 0.$$

Příklad 3 (2 body). Užitím Kramerova pravidla (jiný způsob výpočtu nebude uznán) vypočítejte
$$\begin{aligned} 4x + 5y + 4z &= 2, \\ 4x + 2y + 6z &= 0, \\ 2x + 4y + 2z &= 2. \end{aligned}$$

Příklad 4 (3 body). Libovolným způsobem určete A^{-1}, jestliže je

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$, přičemž i je imaginární jednotka,

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Příklad 5 (2 body). Zjistěte, zda matice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
tvoří bázi vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$.

Příklad 6 (2 body). Nechť je zobrazení $F : \mathrm{Mat}_{2\times 2} \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}$ zadáno předpisem

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}. \tag{$*$}$$

Rozhodněte (a svou odpověď odůvodněte), zda je F lineární. Pokud je lineární, lze jej reprezentovat vhodnou maticí – označme ji jako A (nějakou takovou – tato matice, pokud je F lineární, není dána jednoznačně). Je-li F lineární, určete dim Ker A a dim Im A.

Příklad 7 (2 body). Rozhodněte, zda existuje homogenní soustava lineárních rovnic tří reálných proměnných, jejíž množinou řešení je:

a) $\{(0,0,0)\}$;

b) $\{(0,1,0),(0,0,0),(1,1,0)\}$;

c) $\{(x,1,0);\ x \in \mathbb{R}\}$;

d) $\{(0,2x,x);\ x \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 8 (1 bod). Který z následujících vztahů

a) $h(A) = \dim \operatorname{Im} A$,

b) $\left(A^T\right)^T = A$,

c) A určuje lineární zobrazení $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$,

d) $n = h(A) + \dim \operatorname{Ker} A$

neplatí pro všechny reálné matice A o rozměrech $m \times n$? Napište „a“, „b“, „c“, nebo „d“. (Čísla $m, n \in \mathbb{N}$ jsou libovolná.)

Příklad 9 (1 bod). Nechť jsou dány dvě symetrické matice A a B. Platí, že pokud je jejich součin symetrickou maticí, potom matice A a B komutují?

Třetí zápočtový test – D

Příklad 1 (2 body). Za pomoci násobení elementárními maticemi zprava vypočítejte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x - 5y + 2u + 4z &= 2, \\ 5x + 7y - 4u - 6z &= 3, \\ 7x - 4y + u + 3z &= 5. \end{aligned}$$

Příklad 2 (2 body). V reálném trojrozměrném prostoru určete nějaký (lhostejno jaký) nenulový vektor w kolmý k oběma vektorům u a v. Přitom

a) $u = (1, -1, 2), \quad v = (3, 1, 1)$,

b) $u = (1, 0, 1), \quad v = (-1, 3, 2)$,

c) $u = (1, -1, 3), \quad v = (0, 0, 1)$.

Příklad 3 (2 body). Napište nějaké dvě matice A a B, které mají nuly na (hlavní) diagonále a které splňují tyto tři podmínky

$$A^2 = I, \quad B^2 = -I, \quad A^2 + B^2 = 0,$$

přičemž symbolem I označujeme jednotkovou a symbolem 0 nulovou čtvercovou matici stejného rozměru, jakého jsou matice A a B.

Dále uveďte nějakou matici C, pro niž zároveň platí

$$C^2 = C, \quad C \neq I, \quad C \neq 0.$$

Příklad 4 (3 body). Vypočítejte adjungované matice k maticím

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (b) \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ 3-2i & 6 \end{pmatrix},$$

přičemž i označuje imaginární jednotku.

Příklad 5 (3 body). Vyřešte níže uvedenou maticovou rovnici, tj. nalezněte všechny dvojrozměrné čtvercové matice X, pro něž platí

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6 (2 body). Zjistěte, zda je množina $V = \{(1, x);\ x \in \mathbb{R}\}$ s operacemi

$$\oplus : V \times V \to V, \quad (1, y) \oplus (1, z) := (1, z + y) \text{ pro všechna } y, z \in \mathbb{R},$$

$$\odot : \mathbb{R} \times V \to V, \quad z \odot (1, y) := (1, y \cdot z) \text{ pro všechna } y, z \in \mathbb{R}$$

vektorovým prostorem? Které z axiomů A1, A2, ..., A8 splňuje? Platí podmínky U1 a U2? Své odpovědi musíte zdůvodnit!

Příklad 7 (1 bod). Napište matici zobrazení rotací o úhel ϕ kolem osy y v $\mathbb{R}^3$.

Třetí zápočtový test – E

Příklad 1 (3 body). Nechť je dán vektorový prostor V a nějaká jeho báze tvořená vektory u, v, w, z a vektorový prostor U a dva v něm lineárně *závislé* vektory x, y. Zjistěte, zda jsou (v daných vektorových prostorech V a U) vektory

a) $u - 3v + z, \quad v - 5w - z, \quad 3w - 7z, \quad u - 81w + z$

b) $x - 3y, \quad 5x - y$

lineárně závislé, nebo nezávislé.

Příklad 2 (2 body). Za pomoci Frobeniovy věty rozhodněte o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 &= 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 &= 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 &= 6. \end{aligned}$$

Tedy určete, jestli má, či nemá řešení.

Příklad 3 (2 body). Uveďte definici transponované matice k libovolné matici C. Co znamená, že dvě čtvercové matice A a B stejného rozměru komutují? Co znamená, když o nich řekneme, že A a B jsou (řádkově) ekvivalentní?

Příklad 4 (2 body). Jsou množiny

$$U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4);\ a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R},\ a_1 - 5a_3 + \sqrt{2}a_4 = 0\},$$

$$V = \{(b_1, b_2, b_3, b_4);\ b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R},\ b_1 = 1\},$$

$$W = \{(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4);\ \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \in \mathbb{R},\ \phi_1 = \phi_3\},$$

vlastní podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$? Které z těchto množin jsou? Které nejsou?

Příklad 5 (2 body). Vypočítejte determinanty matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 74 & -11 & 51 & 1 & 16 \\ -7 & 2 & -8 & 4 & 1117 \\ 21 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1178 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6 (1 bod). Popište, jak vypadá podprostor vektorového prostoru $\mathcal{P}$ generovaný množinou

$$M = \{0, 3x^2, 1 - x, 2x^2 + x, x - 111, 1 - x^2, x^2 - 17, -4x\}.$$

Příklad 7 (2 body). Nechť je dáno

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Najděte taková reálná čísla b_1, b_2, b_3, aby reálný systém lineárních rovnic $A \cdot x = b$ měl:

a) nekonečně mnoho řešení;

b) právě jedno řešení;

c) méně než jedno řešení;

d) právě 4 řešení.

Lze vždy najít taková čísla?

Příklad 8 (1 bod). Uvažujte 2×2 matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a určete její mocniny A^1, A^2 a A^3.

Třetí zápočtový test – F

Příklad 1 (2 body). Vyřešte soustavu reálných lineárních rovnic

$$\varphi x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0,$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0,$$

ve které $\varphi \in \mathbb{R}$ je parametr.

Příklad 2 (3 body). Libovolným způsobem vypočítejte systém homogenních lineárních rovnic zadaný maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{6} & 0 \\ 2 & 2 & \sqrt{3} & -2 & -\sqrt{5} \\ 0 & 2 & \sqrt{5} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 3 & 3 & \sqrt{3} & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3 (2 body). Spočtěte determinanty matic

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \end{pmatrix},$$

přičemž konkrétní hodnota čísel a_{ij}, b není upřesněna.

Příklad 4 (3 body). V závislosti na parametru $t \in \mathbb{R}$ určete dimenzi podprostoru U vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li U generován vektory:

a) $u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (1, t, 1), \quad u_3 = (2, 2, t);$

b) $u_1 = (5, 7, -1), \quad u_2 = (-10, -14, 2), \quad u_3 = (0, 0, 0), \quad u_4 = (2t, 1, -2);$

c) $u_1 = (t, t, t), \quad u_2 = (6t, 6t, 6t), \quad u_3 = (-4t, -4t, 4t), \quad u_4 = (-2, -2, -2);$

d) $u_1 = (0, 0, 0), \quad u_2 = (5t, -3t, t).$

Příklad 5 (1 bod). Napište definici lineární nezávislosti a závislosti vektorů libovolného konečného počtu v libovolném reálném vektorovém prostoru konečné dimenze.

Příklad 6 (1 bod). Udejte příklad nějaké regulární diagonální matice, která není symetrická, ale k ní inverzní matice symetrická je.

Příklad 7 (1 body). Popište všechny matice o rozměrech 5×5, ke kterým existují inverzní matice, takové, že součinem daných matic a jejich inverzí v libovolném pořadí je matice jednotková. Charakterizujte je např. nějakou podmínkou, kterou musí splňovat a kterou zároveň žádné jiné matice nesplňují.

Příklad 8 (2 body). Vypočítejte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Správnost výpočtu můžete poté ověřit.