

Demonstované cvičení k přednášce Matematika III
19.9.2006

Příklad 1. Uvažme následující funkci:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{pro } x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zjistěte, zda je funkce spojitá v bodě $(0, 0)$.

Tečna ke křivce $\gamma(t) = [f(t), g(t), h(t)]$ v bodě $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ má směrový vektor

$$(f'(t_0), g'(t_0), h'(t_0)),$$

tedy rovnice normálové roviny je

$$f'(t_0)(x - x_0) + g'(t_0)(y - y_0) + h'(t_0)(z - z_0).$$

Příklad 2. Určete tečnu a normálovou rovinu ke křivce $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = [\cos(t), \sin(t), t]$ v bodě $t = \pi$.

Příklad 3. *Odhadněte vzdálenost bodu $\gamma(\pi)$ od bodu $\gamma(0)$ pomocí věty z přednášky.*

Příklad 4. Určete směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \ln(x) \cdot y$ ve směru $v = (2, 1)$ v bodě $[x_0, y_0] = (1, 1)$.

Rovnice tečné rovny k ploše zadané jako $f(x, y, z) = 0$ v bodě (x_0, y_0, z_0) jsou

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

normála má pak směrový vektor

$$(f_x, f_y, f_z).$$

Příklad 5. *Určete tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x, y) = xy^2$ v bodě $(1, 1)$.*

Příklad 6. Určete tečnu ke křivce dané rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $z^2 - 2y^2 - x^2 = 0$ v bodě $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.