

Drsná matematika III – 10. demonstrovaná cvičení

Kostry grafů

Martin Panák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

21.11. 2006

1 Domácí úlohy z minulého týdne

- Příklad 1
- Příklad 2
- Příklad 3

2 Hledání minimální kostry

- Borůvkův algoritmus
- Primův algoritmus
- Graf koster
- Heuristika na hledání minimální cesty spojující všechny vrcholy

Příklad 1.

Uvažujme modifikovaný Dijkstrův algoritmus pro hledání minimální cesty mezi dvěma vrcholy v ohodnoceném grafu: algoritmus bude probírat hrany vedoucí z aktivního vrcholu nikoliv od nejkratší, ale od nejdelší. Udejte příklad grafu a v něm dvou vrcholů, mezi kterými nalezne tato modifikace minimální cestu rychleji, než algoritmus uvedený na přednášce.

Příklad 2.

Dokažte, že vrcholový graf musí být vrcholově 2-souvislý. Udejte příklad grafu, který je vrcholově 2-souvislý a přesto v něm neexistuje hamiltonovská kružnice.

Příklad 2.

Dokažte, že vrcholový graf musí být vrcholově 2-souvislý. Udejte příklad grafu, který je vrcholově 2-souvislý a přesto v něm neexistuje hamiltonovská kružnice.

Řešení. V hamiltonovském grafu vedou mezi libovolnými dvěma uzly dvě neprotínající se cesty („oblouky“ hamiltonovské kružnice). Odstraněním jednoho bodu, se tedy zjevně neporuší souvislost grafu (odstraněný bod může ležet pouze na jedné ze dvou cest). □

Příklad 3.

Dokažte nebo vyvráťte:

- a) Každý graf s méně než devíti hranami je rovinný.
- b) Graf, který není rovinný, není ani hamiltonovský.
- c) Graf, který není rovinný, je hamiltonovský.
- d) Graf, který není rovinný, není eulerovský.
- e) Graf, který není rovinný, je eulerovský.
- f) Každý hamiltonovský graf je rovinný.
- g) Každý eulerovský graf je rovinný.

Příklad 3.

Dokažte nebo vyvráťte:

- Každý graf s méně než devíti hranami je rovinný.
- Graf, který není rovinný, není ani hamiltonovský.
- Graf, který není rovinný, je hamiltonovský.
- Graf, který není rovinný, není eulerovský.
- Graf, který není rovinný, je eulerovský.
- Každý hamiltonovský graf je rovinný.
- Každý eulerovský graf je rovinný.

Řešení.

- Ano. Triviální důsledek charakterizace rovinných grafů ($K_{3,3}$ i K_5 mají minimálně 9 hran)
- Ne. ($K_{3,3}$)
- Ne.
- Ne. (Protipříklad K_5)
- Ne. ($K_{3,3}$)
- Ne. (K_5)
- Ne. (K_5)

1 Domácí úlohy z minulého týdne

- Příklad 1
- Příklad 2
- Příklad 3

2 Hledání minimální kostry

- Borůvkův algoritmus
- Primův algoritmus
- Graf koster
- Heuristika na hledání minimální cesty spojující všechny vrcholy

Borůvkův algoritmus

Udělej graf S složený z vrcholů grafu G ;
dokud má S více než jednu komponentu opakuj:
 pro každý strom T v S najdi nejmenší hranu spojující T s
 $G \setminus T$, tuto hranu přidej do E ;
 všechny hrany z E přidej do S ;

Primův algoritmus

Buď T jediný vrchol;
dokud T má méně než n vrcholů, najdi nejmenší hranu spojující T
a $G \setminus T$ a přidej ji do T ;

Graf koster

Uvažme graf koster souvislého grafu G o n vrcholech: vrcholy jsou kostry G , dva vrcholy (kostry) jsou spojeny hranou, jestliže mají právě $n - 2$ společných hran. Ukažte, že graf koster souvislého grafu je souvislý.

Graf koster

Uvažme graf koster souvislého grafu G o n vrcholech: vrcholy jsou kostry G , dva vrcholy (kostry) jsou spojeny hranou, jestliže mají právě $n - 2$ společných hran. Ukažte, že graf koster souvislého grafu je souvislý.

Počet koster v grafu Určete počet různých koster následujícího grafu. Určete tento počet až na isomorfismus.

Heuristika na hledání minimální cesty spojující všechny vrcholy

C je prázdná množina;

Dokud C není hledaná cesta, přidej do C minimální hranu takovou, že po jejím přidání bude C tvořeno disjunktními cestami;