Drsná matematika III – 4. demonstrovaná cvičení
Vázané extrémy

Martin Panák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

10.10. 2006

1. Domácí úlohy z minulého týdne
   - Příklad 1
   - Příklad 2
   - Příklad 3
2. Návodné úlohy
   - Povrch grafu reálné funkce $f(x, y)$ dvou proměnných x a y
   - Těžiště tělesa
   - Příklad 6.

Buď dáno zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = xy \sin\left(\frac{\pi}{2} xy^2\right)$. Ukažte, že rovnost $F(x,y) = 1$ zadává v nějakém okolí U bodu 1 implicitně funkci $f : U \to \mathbb{R}$, tak že $F(x, f(x)) = 1$ pro $x \in U$. Navíc $f(1) = 1$. Určtete $f'(1)$.

Řešení. $F_y(1,1) = x\sin\left(\frac{\pi}{2}xy^2\right) + \pi x^2y^2\cos\left(\frac{\pi}{2}xy^2\right)(1,1) = 1$, tedy předpis $F(x,y) = 1$ zadává implicitně na okolí bodu $(1,1)$ funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pro její derivaci potom platí

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}(1,1) = -\frac{1}{1} = -1.$$

$\square$

Určete, zda existují maxima a minima funkce $f : (\mathbb{R}^+)^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ za podmínky $x_1 + \cdots + x_n = c$, $c \in \mathbb{R}^+$, $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$.

Řešení. Normálový vektor k nadrovině definované podmínkou je $(1, \ldots, 1)$. Extrém může nastat v bodech, kdy je gradient zkoumané funkce násobkem normály. Pro tyto body tedy dostáváme soustavu

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{x_1 \cdots \hat{x}_i \cdots x_n}\frac{1}{\sqrt[n]{x_i^{n-1}}} = k, \quad i = 1, \ldots n.$$

Tato soustava má na zkoumané množině jediné řešení $x_1 = \cdots = x_n$, $k = 1$, což odpovídá maximu dané funkce. Pokud bychom totiž v omezení uvažovali x_i nezáporná, jednalo by se o kompaktní množinu, tedy daná funkce by na ní měla jak maximum, tak minimum. Minimum (nula) by nastávalo, pokud by libovolná z proměnných byla nulová, v nalezeném bodě tedy musí nastat maximum. $\square$

Určete, zda existují maxima a minima funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z - xy^2$ na sféře

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Pokud extrémy existují, určete je.

Řešení. Řešíme soustavu

$$\begin{aligned} x &= -ky^2 \\ y &= -2kxy \\ z &= k \end{aligned}$$

Z druhé rovnice dostáváme, že buď $y = 0$, nebo $x = -\frac{1}{2k}$. První možnost vede k bodům $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$. Druhá pak nemůže být splněna (dosazením do rovnice koule dostaneme rovnici

$$\frac{1}{4k^2} + \frac{1}{2k^2} + k^2 = 1,$$

která nemá řešení. Ve dvou vypočtených bodech na dané sféře má funkce maximum, resp. minimum. $\square$

1. Domácí úlohy z minulého týdne
   - Příklad 1
   - Příklad 2
   - Příklad 3

2. Návodné úlohy
   - Povrch grafu reálné funkce $f(x, y)$ dvou proměnných x a y
   - Těžiště tělesa
   - Příklad 6.

Povrch grafu funkce dvou proměnných nad plochou S v rovině xy spočítáme jako

$$P = \int_S \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Povrch grafu funkce dvou proměnných nad plochou S v rovině xy spočítáme jako

$$P = \int_S \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy.$$

Příklad 4. Určete obsah části pláště kužele $x^2 + y^2 = 3z^2$, která leží nad rovninou $z = 0$ a uvnitř válce $x^2 + y^2 = 4y$.

Souřadnici z v těžiště tělesa T v $\mathbb{R}^3$ spočítáme jako

$$\frac{1}{V}\int_T z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde V je objem tělesa.

Souřadnici z v těžiště tělesa T v $\mathbb{R}^3$ spočítáme jako

$$\frac{1}{V}\int_T z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde V je objem tělesa.

Příklad 5. Určete objem a těžiště tělesa ohraničeného paraboloidem $x^2 + y^2 = z$, válcem $x^2 + y^2 = 2y$ a rovinou $z = 0$.

Určete objem tělesa vyříznutého kuželem $x^2 + y^2 = z^2$ ze sféry $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$.