Drsná matematika III – 6. demonstrovaná cvičení
Vázané extrémy

Martin Panák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

31.10. 2006

Vyřešte diferenciální rovnici pro funkci $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}.$$

Vyřešte diferenciální rovnici pro funkci $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}.$$

Řešení. $\frac{x+C}{1-Cx}$. (použijte součtového vzorce pro tangens). □

Čistička vody o objemu 2000 m^3 byla znečištěna olovem, které se nachází ve vodě v ní v množství 10 g/m^3. Do čističky přitéká čistá voda rychlostí 2 m^3/s a stejnou rychlostí i vytéká. Za jak dlouho poklesne obsah olova ve vodě v čističce pod 10 $\mu g/m^3$, předpokládáme-li, že voda je neustále rovnoměrně promíchávána?

Řešení. Označme objem vody v nádrži jako V (m^3), rychlost vytékání vody jako v (m^3/s). Za infinitezimální (nekonečně malou) časovou jednotku $\mathrm{d}t$ vyteče z nádrže $\frac{m}{V} \cdot v\,\mathrm{d}t$ gramů olova, pro změnu hmotnosti množství olova v čističce tedy můžeme sestavit diferenciální rovnici

$$\mathrm{d}m = -\frac{m}{V} \cdot v\,\mathrm{d}t.$$

Separací proměnných snadno najdeme řešení $m(t) = m_0 e^{\frac{v}{V}t}$, kde m_0 je množství olova v nádrži v čase $t = 0$. Po dosazení číselných hodnot dostaneme (aspoň doufám), že $t \doteq 4,5h$. $\square$

Rychlost, kterou se rozpadá daný izotop daného prvku, je přímo úměrná množství daného izotopu. Poločas rozpadu izotopu Plutonia, ^{239}Pu, je 24 100 let. Za jak dlouho ubude setina z nukleární pumy, jejíž aktivní složkou je zmiňovaný izotop?

Rychlost, kterou se rozpadá daný izotop daného prvku, je přímo úměrná množství daného izotopu. Poločas rozpadu izotopu Plutonia, ^{239}Pu, je 24 100 let. Za jak dlouho ubude setina z nukleární pumy, jejíž aktivní složkou je zmiňovaný izotop?

Řešení. Označíme-li množství Plutonia jako m, tak pro rychlost rozkladu můžeme napsat diferenciální rovnici

$$\frac{dm}{dt} = k \cdot m,$$

kde k je nějaká neznámá konstanta. Řešením je tedy funkce $m(t) = m_0 e^{-kt}$. Dosazením do rovnice pro poločas rozpadu ($e^{-kt} = \frac{1}{2}$) získáme konstantu $k \doteq 2,88 \cdot 10^5$. Hledaný čas je pak přibližně 349 let. □

1. Domácí úlohy z předminulého týdne
   - Příklad 1
   - Příklad 2
   - Příklad 3
2. Domácí úlohy z minulého týdne
   - Příklad 1.
   - Příklad 2.
   - Příklad 3.
3. Písemka, skup. A
   - Příklad 1.
   - Příklad 1.
   - Příklad 2.
   - Příklad 3.
4. Písemka, skup. B
   - Příklad 1.
   - Příklad 2.
   - Příklad 3.
5. Písemka, skup. C
   - Příklad 1.

Vypočtěte objem kulové úseče, který odřezává rovina $z = 1$ z koule $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Vypočtěte objem kulové úseče, který odřezává rovina $z = 1$ z koule $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Řešení. Spočítáme integrál v kulových souřadnicích. Úseč si můžeme představit jako kulovou výseč bez kužele (s vrcholem v bodě $[0, 0, 0]$ a kruhovou podstavou $z = 1$, $x^2 + y^2 = 1$). Výseč je v těchto souřadnicích **součinem** intervalů $(0, \sqrt{2}) \times \langle 0, 2\pi) \times \langle 0, \pi/4\rangle$. Integrujeme tedy v daných mezích a to v **libovolném** pořadí.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)\pi.$$

Musíme ještě odečíst objem kužele. Ten je roven $\frac{1}{3}\pi R^2 V$ (kde R je poloměr podstavy kužele a V jeho výška, v našem případě jsou obě hodnoty rovny jedné) tedy celkový objem je

$$V_{\text{výseč}} - V_{\text{kužel}} = \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi(4\sqrt{2} - 5).$$

Rychlost šíření zprávy v populaci o P lidech je přímo úměrná počtu lidí, kteří zprávu ještě neslyšeli. Určete funkci f popisující počet lidí v čase, kteří již zprávu slyšeli. Je vhodné tento model šíření zprávy používat pro malá nebo velká P?

Rychlost šíření zprávy v populaci o P lidech je přímo úměrná počtu lidí, kteří zprávu ještě neslyšeli. Určete funkci f popisující počet lidí v čase, kteří již zprávu slyšeli. Je vhodné tento model šíření zprávy používat pro malá nebo velká P?

Řešení. Sestavíme diferenciální rovnici pro f. Rychlost šíření zprávy $\frac{df}{dt} = f'(t)$ má být přímo úměrná počtu lidí, kteří o ní ještě neslyšeli, tedy hodnotě $P - f(t)$. Celkem

$$\frac{df}{dt} = k(P - f(t)).$$

Separací proměnných a zavedením konstanty K (počet lidí, kteří znají zprávu v čase $t = 0$ musí být $P - K$) dostáváme řešení

$$f(t) = P - Ke^{-kt},$$

kde k je kladná reálná konstanta.
Tento model má zřejmě smysl jen pro velká P. □

Rychlost, kterou se šíří epidemie v dané uzavřené populaci o P lidech je přímo úměrná součinu počtu lidí, kteří jsou nakaženi, a počtu lidí, kteří jsou ještě nenakaženi. Určete funkci $f(t)$ popisující počet nakažených v čase.

Rychlost, kterou se šíří epidemie v dané uzavřené populaci o P lidech je přímo úměrná součinu počtu lidí, kteří jsou nakaženi, a počtu lidí, kteří jsou ještě nenakaženi. Určete funkci $f(t)$ popisující počet nakažených v čase.

Jako v přechozím příkladě sestavíme diferenciální rovnici

Řešení.

$$\frac{df}{dt} = k \cdot f(t)\,(P - f(t))\,.$$

Opět separací proměnných a zavedením vhodných konstant K a L dostáváme

$$f(t) = \frac{K}{1 + Le^{-Kkt}}.$$

□

Určete Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = tan(xy + y)$$

v bodě $(0, 0)$.

Určete Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = tan(xy + y)$$

v bodě $(0, 0)$.

$$y + xy$$

Rozhodněte, zda existují extrémy funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz$, na elipsoidu určeném rovnicí

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 = 1,$$

Pokud extrémy existují, určete je.

Rozhodněte, zda existují extrémy funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz$, na elipsoidu určeném rovnicí

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 = 1,$$

Pokud extrémy existují, určete je. Dostaneme osm stacionárních bodů $x = \pm\frac{1}{3}$, $y = \pm\frac{1}{3}$, $z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, čtytři z nich jsou lokální maxima s maximem $\frac{1}{9\sqrt{3}}$, čtyři pak minima.

Určete objem tělesa v $\mathbb{R}^3$, které je dáno průnikem koule $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ s válcem $x^2 + y^2 = 1$.

Určete objem tělesa v $\mathbb{R}^3$, které je dáno průnikem koule $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ s válcem $x^2 + y^2 = 1$.

$$8 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r\sqrt{4 - r^2} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}(8 - 3\sqrt{3})\pi.$$

Určete Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \tan(xy)$$

v bodě $(0,0)$.

Určete Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \tan(xy)$$

v bodě $(0, 0)$.

Řešení.

$$xy$$

$\square$

Rozhodněte, zda existují extrémy funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz$, na elipsoidu určeném rovnicí

$$3x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

Pokud extrémy existují, určete je.

Rozhodněte, zda existují extrémy funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz$, na elipsoidu určeném rovnicí

$$3x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

Pokud extrémy existují, určete je.

Řešení. Dostaneme osm stacionárních bodů $x = \pm\frac{1}{3}$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. čtytři z nich jsou lokální maxima, čtyři pak minima. $\square$

Určete objem tělesa v $\mathbb{R}^3$, které je dáno průnikem koule $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ s paraboloidem $z = x^2 + y^2$.

Určete objem tělesa v $\mathbb{R}^3$, které je dáno průnikem koule $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ s paraboloidem $z = x^2 + y^2$.

Řešení.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{(2-r^2)}} r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} - \frac{7\pi}{6}.$$

$\square$

Určete Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = cos(xy + y)$$

v bodě $(0, 0)$.

Určete Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = cos(xy + y)$$

v bodě $(0, 0)$.

Řešení.

$$1 - \frac{1}{2}y^2$$

$\square$

Rozhodněte, zda existují extrémy funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz$, na elipsoidu určeném rovnicí

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1,$$

Pokud extrémy existují, určete je.

Rozhodněte, zda existují extrémy funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz$, na elipsoidu určeném rovnicí

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1,$$

Pokud extrémy existují, určete je.

Řešení. Dostaneme osm stacionárních bodů $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, $z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. čtytři z nich jsou lokální maxima, čtyři pak minima. $\square$

Určete objem tělesa v $\mathbb{R}^3$, které je ohraničeno válcem $4x^2 + y^2 = 1$, rovinami $z = 2y$ a $z = 0$, ležící nad rovinou $z = 0$.

Určete objem tělesa v $\mathbb{R}^3$, které je ohraničeno válcem $4x^2 + y^2 = 1$, rovinami $z = 2y$ a $z = 0$, ležící nad rovinou $z = 0$.

Řešení.

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} 2y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

$\square$

Určete Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \sin(xy + y)$$

v bodě $(0, 0)$.

Určete Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \sin(xy + y)$$

v bodě $(0, 0)$.

Řešení.

$$xy + y$$

$\square$

Rozhodněte, zda existují extrémy funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz$, na elipsoidu určeném rovnicí

$$2x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

Pokud extrémy existují, určete je.

Rozhodněte, zda existují extrémy funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$f(x, y, z) = xyz$, na elipsoidu určeném rovnicí

$$2x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

Pokud extrémy existují, určete je.

Řešení. Dostaneme osm stacionárních bodů $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. čtytři z nich jsou lokální maxima, čtyři pak minima. $\square$

Určete objem tělesa v $\mathbb{R}^3$, které je ohraničeno paraboloidem $2x^2 + y^2 = z$ a rovinou $z = 2$.

Určete objem tělesa v $\mathbb{R}^3$, které je ohraničeno paraboloidem $2x^2 + y^2 = z$ a rovinou $z = 2$.

Řešení.

$$4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-2x^2}} \int_{2x^2+y^2}^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\pi.$$

$\square$