

Sada domácích úloh k přednášce Matematika III
k odevzdání v týdnu 9. – 13. října 2006

Příklad 1. Vyřešte diferenciální rovnici pro funkci $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}.$$

Řešení. $\frac{x+C}{1-Cx}$. (použijte součtového vzorce pro tangens). □

Příklad 2. Čistička vody o objemu 2000 m^3 byla znečištěna olovem, které se nachází ve vodě v ní v množství 10 g/m^3 . Do čističky přitéká čistá voda rychlostí $2 \text{ m}^3/\text{s}$ a stejnou rychlostí i vytéká. Za jak dlouho poklesne obsah olova ve vodě v čističce pod $10 \mu\text{g/m}^3$, předpokládáme-li, že voda je neustále rovnoměrně promíchávána?

Řešení. Označme objem vody v nádrži jako $V \text{ (m}^3\text{)}$, rychlost vytékání vody jako $v \text{ (m}^3/\text{s}\text{)}$. Za infinitesimální (nekonečně malou) časovou jednotku dt vyteče z nádrže $\frac{m}{V} \cdot v dt$ gramů olova, pro změnu hmotnosti množství olova v čističce tedy můžeme sestavit diferenciální rovnici

$$dm = -\frac{m}{V} \cdot v dt.$$

Separací proměnných snadno najdeme řešení $m(t) = m_0 e^{-\frac{v}{V}t}$, kde m_0 je množství olova v nádrži v čase $t = 0$. Po dosazení číselných hodnot dostaneme (aspoň doufám), že $t \doteq 4,5 \text{ h}$. □

Příklad 3. Rychlost, kterou se rozpadá daný izotop daného prvku, je přímo úměrná množství daného izotopu. Poločas rozpadu izotopu Plutonia, ^{239}Pu , je $24\,100$ let. Za jak dlouho ubude setina z nukleární pumy, jejíž aktivní složkou je zmiňovaný izotop?

Řešení. Označíme-li množství Plutonia jako m , tak pro rychlost rozkladu můžeme napsat diferenciální rovnici

$$\frac{dm}{dt} = k \cdot m,$$

kde k je nějaká neznámá konstanta. Řešením je tedy funkce $m(t) = m_0 e^{-kt}$. Dosazením do rovnice pro poločas rozpadu ($e^{-kt} = \frac{1}{2}$) získáme konstantu $k \doteq 2,88 \cdot 10^{-5}$. Hledaný čas je pak přibližně 349 let. □