Jméno a příjmení:	

Absence

Příklad číslo:	1	2	3	$\sum$
Počet bodů:				

Příklad 1. *Rozhodněte, zda existují extrémy funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, na úsečce $x + y - z = 1$, $x - y + z = 0$, $x \in \langle -1, 1\rangle$. Pokud extrémy existují, určete je.* Nejprve si všimněme, že rovnice $x + y - z = 1$, $x - y + z = 0$, $x \in \langle -1, 1\rangle$ ve skutečnosti zadávají přímku $x = \frac{1}{2}$, $y = t$, $z = \frac{1}{2} - t$.

Řešení. Pro stacionární body sestavíme soustavu:

$$\begin{aligned} 2x &= l + k \\ 2y &= l - k \\ 2z &= k - l \end{aligned}$$

Jejím jediným řešením je bod $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$. Vzhledem k tomu, že funkce f roste nade všechny meze na dané přímce jak pro $t \to \infty$, tak pro $t \to -\infty$, musí se jednat o globální minimum funkce (lze spočítat i Hessián Lagrangeovy funkce). Maximum daná funkce na zadaném objektu nemá. □

Příklad 2. *Určete objem tělesa v $\mathbb{R}^3$, které je ohraničeno částí kužele $2x^2 + y^2 = (z-2)^2$, $z \geq 2$ a paraboloidem $2x^2 + y^2 = 8 - z$ (malý návrh: určete nejprve průnik zadaných ploch)*

Řešení. Zjistíme nejprve průnik zadaných ploch:

$$(z-2)^2 = -z + 8,\ z \geq 2,$$

tedy $z = 4$ a dostáváme rovnici průniku daných ploch $2x^2 + y = 4$. Substitucí $x = \frac{1}{\sqrt{2}} r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, $z = z$ převedeme dané plochy na tvar $r^2 = (z-2)^2$, $z \geq 2$ a $r^2 = 8 - z$, tedy $z = r + 2$ pro první plochu a $z = 8 - r^2$ pro druhou plochu. Celkem je průmět daného tělesa do souřadnice φ roven intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, pro dané $\varphi_0 \in \langle 0, 2\pi\rangle$ je potom průmět průniku tělesa s rovinou $\varphi = \varphi_0$ do souřadnice r roven (pro lib φ_0) intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Pro dané r_0 a φ_0 je pak průmět průniku tělesa s přímkou $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$ na souřadnici z roven intervalu $\langle r_0 + 2, 8 - r_0^2\rangle$. Jakobián uvažované transformace je $J = \frac{1}{\sqrt{2}} r$, celkem tedy můžeme psát

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r+2}^{8-r^2} \frac{r}{\sqrt{2}}\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi.$$

□

Příklad 3. *Určete, kolik podgrafů má graf K_5 (rozmyslete si, čím je podgraf zadán)?*

Řešení.

$$\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} \cdot 2^{\binom{i}{2}} = 1450,$$

kde v sumě uvažujeme $\binom{i}{2} = 0$ pro $i < 2$. □

Příklad 4.

a) *Dokažte, že průnik kompaktní a uzavřené podmnožiny v $\mathbb{R}^n$ je kompaktní podmnožina v $\mathbb{R}^n$.*

b) *Kolik maximálně stěn může mít mnohostěn se šestnácti hranami?*

c) *Ukažte, že les, který není stromem, není ani eulerovským ani hamiltonovským grafem.*