Jméno a příjmení:	

Absence

Příklad číslo:	1	2	3	$\sum$
Počet bodů:				

Příklad 1. *Rozhodněte, zda funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = y^2 z$ nabývá extrémů na ploše $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Pokud ano, tak tyto extrémy nalezněte a určete o jaké extrémy se jedná.*

Řešení. Pro stacionární body sestavíme soustavu:

$$\begin{aligned} 0 &= 4kx \\ 2yz &= 2ky \\ y^2 &= 2kz \end{aligned}$$

Jejím řešením jsou body $(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ (maxima), $(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ (minima). □

Příklad 2. *Určete objem tělesa v $\mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x^2 + y^2 \geq 3z^2$, $x \geq 0$.*

Řešení. Objem spočítáme asi nejlépe jako rozdíl objemu poloviny koule a kulové výseče dané zadaným kuželem.

$$V = \frac{2}{3}\pi - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{3}} r^2 \sin\psi \, \mathrm{d}\psi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\pi.$$

□

Příklad 3. *Uvažme následující hru dvou hráčů: na tabuli jsou napsána čísla 2,3,4,6. Hráči se střídají na tahu. Tah spočívá ve smazání čísla a všech jeho násobků. Nakreslete graf této hry, určete hodnotu Spragueovy-Grundyovy funkce všech vrcholů tohoto grafu a rozhodněte, za kterého hráče existuje vyhrávající strategie.*

Řešení. Vrchol stromu hry (odpovídající počátečnímu stavu) je ohodnocen číslem 0. Výhra za druhého hráče. □

Příklad 4.

a) *Dokažte nebo vyvraťte: průnik (případně i nekonečně mnoha) otevřených podmnožin v $\mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^n$.*

b) *Určte počet různých koster grafu K_7.*

c) *Napište Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$ v bodě $(1,1)$.*

Řešení.

a) *Tvrzení neplatí. Uvažme následující průnik otevřených podmnožin v $\mathbb{R}$:*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i}) = \{1\},$$

je tedy průnikem uzavřená množina $\{1,\}$.

b) 7^5.

c) xy *(Taylorův rozvoj polynomu je polynom samotný)*

□