

Drsná matematika

Martin Panák, Jan Slovák

Pokus o učební text pro začínající studenty informatiky přibližující podstatnou část matematiky v rozsahu čtyř semestrálních přednášek. Prozatím jsou zaznamenány první dva semestry přibližně v odpředneseném rozsahu.

Obsah

Kapitola 1. Úvod a motivace	1
1. Čísla a funkce	1
2. Kombinatorické formule	3
3. Diferenční rovnice	7
4. Pravděpodobnost	14
5. Geometrie v rovině	23
6. Relace a zobrazení	31
Kapitola 2. Elementární lineární algebra	37
1. Vektory a matice	37
2. Determinanty	45
3. Vektorové prostory a lineární zobrazení	51
4. Vlastnosti lineárních zobrazení	62
Kapitola 3. Linární modely	73
1. Lineární rovnice a procesy	73
2. Lineární diferenční rovnice a filtry	76
3. Markovovy procesy	80
4. Více maticového počtu	83
5. Rozklady matic a pseudoinverze	88
Kapitola 4. Analytická geometrie	95
1. Afinní geometrie	95
2. Euklidovská geometrie	105
3. Projektivní geometrie	119
Kapitola 5. Zřízení ZOO	125
1. Interpolace polynomy	125
2. Spojité funkce	133
3. Derivace	146
4. Mocninné řady	155
Kapitola 6. Diferenciální a integrální počet	167
1. Derivování	167
2. Integrovaní	179
3. Nekonečné řady	195
Kapitola 7. Spojité modely	201
1. Fourierovy řady	201
2. Integrální transformace	207
3. Diferenciální rovnice	212

Kapitola 8. Spojité modely podruhé	207
1. Funkce a zobrazení na \mathbb{R}^n	207
2. Integrovaní podruhé	224
3. Obyčejné diferenciální rovnice podruhé	224
4. Parciální diferenciální rovnice	224
5. Poznámky o numerických metodách	224
Kapitola 9. Kombinatorické metody	225
1. Grafy a algoritmy	225
2. Odhady složitostí	225
3. Rekurence podruhé	225
Literatura	227

Předmluva

Tento učební text vzniká průběžně při přípravě přednášek pro předměty Matematika I–IV na Fakultě informatiky MU. Text se snaží prezentovat standardní výklad s akcentem na smysl a obsah prezentovaných matematických metod. Řešené úlohy pak procvičují základní pojmy, ale zároveň se snažíme dávat co nejlepší příklady užití matematických modelů. Studenti navíc mají řešit a odevzdávat každý týden zadávané příklady. Seminární skupiny pak obdobně standardním „cvičením“ vytváří podporu pro řešení domácích úloh. V tomto textu podáváme formální výklad proložený řešenými příklady, chceme dodat ale i úplný soubor řešených zadávaných úloh.

Ne vše se daří průběžně naplňovat tak, jak bychom si představovali. Samotný teoretický text by měl být podrobnější a lépe formulovaný, řešených příkladů bychom chtěli mít podstatně více a měly by pokrývat celou škálu složitosti, od banálních až po perličky ke skutečnému přemýšlení.

Posлуhače bychom rádi naučili:

- přesně formulovat definice základních pojmů a dokazovat jednoduchá matematická tvrzení,
- vnímat obsah i přibližně formulovaných závislostí, vlastností a výhledů použití,
- vstřebat návody na užívání matematických modelů a osvojit si jejich využití.

K těmto ambiciózním cílům nelze dojít lehce a pro většinu lidí to znamená hledat cestu na více pokusů (s potřebným překonáváním odporu či nechutě). I proto je celý výklad strukturován tak, aby se pojmy a postupy vždy několikrát vracely s postupně rostoucí složitostí a šíří diskuse. Jsme si vědomi, že tento postup se může jevit jako chaotický, domníváme se ale, že dává mnohem lepší šanci na pochopení u těch, kteří si s hledáním cesty dají práci a překonají případný odpor.

Vstup do matematiky je skoro pro každého obtížný – pokud už „víme“, nechce se nám přemýšlet, pokud „nevíme“, je to ještě horší. Jediný spolehlivý postup pro orientaci v matematice je hledat porozumnění v mnoha pokusech a hledat je při četbě v různých zdrojích. Určitě nepovažujeme tento text za dostatečný jediný zdroj pro každého.

Pro ulehčení vícekolového přístupu ke čtení je text strukturován také pomocí barev takto

- normální text je sázen černě
- **řešené příklady** jsou sázeny barvou ████████
- složitější text, který by měl být čten pozorněji, ale určitě ne přeskakován, je sázen barvou ████████
- náročné pasáže, které mohou být při studiu přinejmenším napoprvé přeskakovány jsou sázeny v barvě ████████.

První dva semestry výuky už jednou proběhly a výsledných 7 kapitol máte v rukou. Popíšme tedy nyní stručně obsah a také výhled na semestry následující.

Úvodní motivační kapitola se snaží v rozsahu přibližně 5 týdnů přednášek ilustrovat několik přístupů k matematickému popisu problémů. Začínáme nejjednoduššími funkcemi (základní kombinatorické formule), naznačujeme jak pracovat se závislostmi zadanými pomocí okamžitých změn (jednoduché typy diferenciálních rovnic), užití kombinatoriky a množinové algebry diskutujeme prostřednictvím konečné klasické pravděpodobnosti, předvádíme maticový počet pro jednoduché úlohy rovinné geometrie a závěrem vše trochu zformalizujeme (relace, uspořádní, ekvivalence). Nenechte se uvrhnout do chaotického zmatku příliš rychlým střídáním témat – cílem zde je nashromáždit něco málo netriviálních námětů k přemýšlení a hledání souvislostí i použití, ještě než zabředneme do úrovně problémů a teorií složitějších. Ke všem tématům této úvodní kapitoly se časem vrátíme.

Dalších pět týdnů přednášek je věnováno základům počtu, který umožňuje práci s vícerozměrnými daty i grafikou. Jde o postupy tzv. lineární algebry, které jsou základem a konečným výpočetním nástrojem pro většinu matematických modelů. Jednoduché postupy pro práci s vektory a maticemi jsou obsahem kapitoly druhé, další kapitola je pak věnována aplikacím maticového počtu v různých lineárních modelech (systémy lineárních rovnic, lineární procesy, lineární diferenciální rovnice, Markovovy procesy, lineární regrese).

Poslední tři přednášky prvního semestru jsou věnovány aplikacím v geometrických úlohách a lze se z nich dozvědět něco málo o afinní, euklidovské a projektivní geometrii.

Další semestr je věnován spojitým modelům. Chceme co nejnázorněji ukázat, že základní ideje, jak s funkcemi pracovat bývají jednoduché. Stručně řečeno, hledáme cesty, jak složitější věci nelineární povahy řešit pomocí jednoduchých lineárních triků a postupů lineární algebry. Složitosti se pojí skoro výhradně se zvládnutím rozumně velké třídy funkcí, pro které mají naše postupy být použitelné. Prvně proto přišla na řadu kapitola pátá, kde diskutujeme jaké funkce potřebujeme pro nelineární modely. Začínáme polynomy a spliny, pak postupně diskutujeme pojmy spojitosti a derivace a seznámíme se se všemi základními elementárními funkcemi a mocninnými řadami.

Tím je připravena půda pro klasický diferenciální a integrální počet. Ten prezentujeme v kapitole šesté s důrazem na co nejjednodušší pochopení aproximací a limitních procesů. Poslední sedmá kapitola se věnuje náznakům aplikací a snaží se co nejvíce připomínat analogie k postupům jednoduché lineární algebry z minulého semestru. Místo lineárních zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory tak pracujeme s lineárními operacemi mezi nekonečně rozměrnými vektorovými prostory funkcí, definovaných buď integrálními nebo diferenciálními operátory.

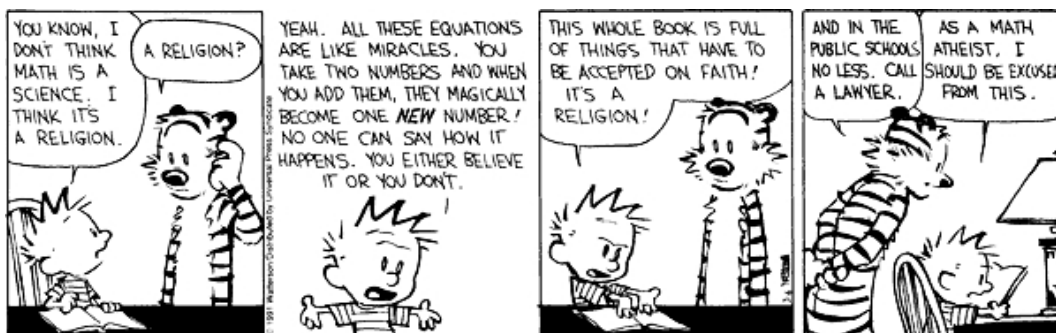
Výhled obsahu pro další dva semestry je následující. Vměstná se do nich v dělení přibližně po dvou celcích v jednotlivých semestrech:

- (1) Nelineární modely podruhé (diferenciální a integrální počet více proměnných, ODE, PDE)
 - kalkulus více proměnných,
 - násobné integrály,
 - metody optimalizace,
 - systémy diferenciálních rovnic

- (2) Kombinatorické metody (diskrétní matematika)
 - rovinné grafy, barvení grafu, Eulerovy kružnice, problém obchodního cestujícího, stromy, minimální kostry, toky v sítích apod.
 - rekurence, vytvářející funkce
- (3) Obecné matematické struktury (algebra)
 - grupy, algebry, svazy, okruhy, pole, dělitelnost, rozklad na prvočísla, Eulerova věta, RSA algoritmus, jednoduché kódy.
- (4) Pravděpodobnost a statistika
 - pravděpodobnostní prostor, hustota pravděpodobnosti, normální rozdělení, střední hodnota, medián, kvantil, rozptyl, příklady diskrétních a spojitých rozdělení
 - statistické zpracování dat.

Srpen 2006,

Martin Panák, Jan Slovák



Úvod a motivace

*„hodnota, změna, poloha“
– co to je a jak to uchopit?*

1. Čísla a funkce

Lidé trpí chorobnou snahou mít jasno „kolik něco je“, případně „za kolik“, „jak dlouho“ apod. Výsledkem takových úvah je většinou nějaké „číslo“, řekněme učeněji „hodnota“. Za číslo se přitom považuje něco, co umíme sčítat a násobit a splňuje to obvyklé zákonitosti, ať už všechny nebo jen některé. Nejjednodušším příkladem jsou tzv. čísla přirozená, budeme je značit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, často zvláště v informatice brána včetně nuly, a čísla celá $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Kdo si libuje ve formálním přístupu v rámci některé z korektních teorií množin a ví, co to je prázdná množina \emptyset , může definovat

$$\boxed{\text{e1.1}} \quad (1.1) \quad 0 := \emptyset, \quad 1 := \{\emptyset\}, \quad 2 := \{\emptyset, 1\}, \dots, \quad n+1 := \{0, 1, \dots, n\}.$$

Pak lze snadno formálně definovat sčítání a násobení celých čísel, uspořádání, ukázat, že každá podmnožina v \mathbb{N} má nejmenší prvek a spoustu dalších vlastností o kterých zpravidla už dávno nepřemýšlíme a máme je za samozřejmé. Např. o číslu a řekneme, že je menší než b tehdy a jen tehdy, když $a \neq b$ a $a \in b$. Nebudeme se tu tím podrobně zabývat a předpokládáme, že čtenář i čísla racionální (\mathbb{Q}), reálná (\mathbb{R}) a komplexní (\mathbb{C}) důvěrně zná.¹ Prakticky budeme připomínat teoretické i praktické souvislosti při dalším výkladu, viz příklad 1.4(1). Podobně bude konstrukce racionálních čísel z přirozených diskutována v 1.61, konstrukci reálných čísel bude vhodné zmínit při studiu limitních procesů později a již dříve budeme z různých algebraických pohledů zkoumat čísla komplexní.

Pro náš další rozlet ale bude teď užitečné vyjmenovat obvyklé vlastnosti, které sčítání a násobení čísel má. Navíc, jak je v matematice obvyklé, budeme místo s čísly manipulovat s písmeny abecedy, případně jinými znaky, ať už jejich hodnota je nebo není předem známá.

$\boxed{1.1}$

1.1. Vlastnosti sčítání.

$$(KG1) \quad (a + b) + c = a + (b + c), \quad \text{pro všechny } a, b, c$$

$$(KG2) \quad a + b = b + a, \quad \text{pro všechny } a, b$$

$$(KG3) \quad \text{existuje prvek } 0 \text{ takový, že pro všechny } a \text{ platí } a + 0 = a$$

$$(KG4) \quad \text{pro všechny } a \text{ existuje prvek } (-a) \text{ takový, že platí } a + (-a) = 0.$$

¹Podrobně lze formální základy matematiky nalézt např. ve skriptech Pavla Horáka [3].

Vlastnostem (KG1) – (KG4) říkáme vlastnosti *komutativní grupy*. Celá čísla \mathbb{Z} jsou dobrým příkladem komutativní grupy, přirozená čísla nikoliv, protože nesplňují KG4 (a případně neobsahují nulu pokud ji do \mathbb{N} nezahrnujeme).

1.2

1.2. Vlastnosti násobení.

$$(O1) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \text{ pro všechny } a, b, c$$

$$(O2) \quad a \cdot b = b \cdot a, \text{ pro všechny } a, b$$

$$(O3) \quad \text{existuje prvek } 1 \text{ takový, že pro všechny } a \text{ platí } 1 \cdot a = a$$

$$(O4) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ pro všechny } a, b, c.$$

Poslední vlastnosti O4 se říká *distributivita*.

Množiny s operacemi $+$, \cdot a vlastnostmi (KG1)–(KG4), (O1)–(O4) se nazývají *komutativní okruhy*. Potřebujeme však zpravidla ještě další běžnou vlastnost čísel:

$$(P) \quad \text{pro každý } a \neq 0 \text{ existuje prvek } a^{-1} \text{ takový, že platí, } a \cdot a^{-1} = 1.$$

Když naše objekty splňují navíc i (P), hovoříme o *poli* (často také o *komutativním tělese*). Někdy se ale setkáme se slabší dodatečnou vlastností. Např. okruh celých čísel \mathbb{Z} nesplňuje (P), ale splňuje

$$(OI) \quad a \cdot b = 0 \Rightarrow \text{buď } a = 0 \text{ nebo } b = 0.$$

Hovoříme o *oboru integrity*.

Prvky nějaké množiny s operacemi $+$ a \cdot splňujícími (ne nutně všechny) výše uvedené vlastnosti (tj. komutativní okruh, obor integrity, pole) budeme nazývat *skaláry*. Budeme pro ně vesměs užívat latinská písmena ze začátku abecedy.

Kdo chce postupovat co nejpřesněji a formálně, měl by předchozí vlastnosti brát jako *axiomatickou definici* příslušných matematických pojmů. Pro naše potřeby bude stačit si průběžně uvědomovat, že při dalších diskusích budeme důsledně používat pouze tyto vlastnosti skalárů a že tady i naše výsledky budou platné pro všechny objekty s těmito vlastnostmi. V tomto je pravá síla matematických teorií – nejsou platné jen pro konkrétní řešený příklad. Naopak, při rozumné výstavbě mají vždy univerzální použití. Budeme se snažit tento aspekt vždy zdůrazňovat, přestože naše ambice mohou být v rámci daného časového prostoru pro přednášky jen velice skromné.

1.3

1.3. Skalární funkce. Často pracujeme s hodnotou, která není dána jako konkrétní číslo. Místo toho něco víme o závislosti naší hodnoty na hodnotách jiných. Formálně píšeme, že hodnota $y = f(x)$ naší „závislé“ proměnné veličiny y je dána „nezávislou“ veličinou x . Přitom můžeme znalost f brát formálně (prostě je to nějaká, blíže nespecifikovaná, závislost) nebo operačně, tj. $f(x)$ je dáno formulí poskládanou z (prozatím si představme konečně mnoha) známých operací. Pokud je hodnotou skalár, hovoříme o *skalární funkci*. Také může být ale hodnota dána pouze přibližně nebo s jistou pravděpodobností.

Smyslem matematických úvah pak bývá z neformálního popisu závislostí najít explicitní formule pro funkce, které je popisují. Podle typu úlohy a cíle se pak pracuje:

- s přesným a konečným výrazem
- s nekonečným výrazem
- s přiblížením neznámé funkce známým odhadem (většinou s vyčíslenou možnou chybou)

- s odhadem hodnot s vyčíslením jejich pravděpodobnosti apod.

Skalární funkcí je např. roční mzda pracovníka (hodnoty nezávislé veličiny jsou jednotliví pracovníci x z nějaké množiny, $f(x)$ je jejich roční mzda za dané období), nebo měsíční mzda konkrétního pracovníka v čase (nezávislou hodnotou je čas v měsících, závislou příjem). Jiným příkladem je třeba plocha obrazce v rovině, objem tělesa v prostoru, rychlost konkrétního auta v čase atd. Dovedeme si jistě představit, že ve všech uvedených případech může být hodnota dána nějakou volně popsanou souvislostí nebo naměřena přibližně nebo odhadnuta atd.

1.4. Příklady. (1) Podívejme se na obyčejné sčítání přirozených čísel jako na operacně definovanou skalární funkci. Definujeme $a + b$ jako výsledek procedury, ve které k a přičítáme 1. Tak jsme vlastně obecně $a + 1$ definovali v rovnicích (1.1). Zároveň odebereme z b nejmenší prvek, dokud není b prázdná. Je evidentní, že takto definované sčítání sice je dáno formulí, tato ale není vhodná pro praktické počítání. Tak tomu bude v našem výkladu často – teoreticky korektní definice pojmu neznámá, že úkony s ním spojené jsou efektivně vykonatelné. Právě k tomu budeme postupně rozvíjet celé teorie, abychom praktické nástroje získávali. Co se týče přirozených čísel, od školky je umíme sčítat z paměti a rychle (pokud jsou malá) a s většími si poradí počítače (pokud nejsou příliš velká).

(2) Důležitou operacně definovanou skalární funkcí na přirozených číslech je *faktoriál*, který definujeme vztahy

$$f(0) = 1, f(n + 1) = (n + 1) \cdot f(n).$$

Píšeme $f(n) = n!$ a definice zjevně znamená $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$. To také není příliš efektivní formule pro velká n , lepší ale těžko hledat.

2. Kombinatorické formule

1.5. Permutace, kombinace a variace. Jestliže z množiny n předmětů vytváříme nějaké pořadí jejich prvků, máme pro volbu prvního prvku n možností, další je volen z $n - 1$ možností atd., až nám nakonec zbude jediný poslední prvek. Zjevně tedy je na dané konečné množině S s n prvky právě $n!$ různých pořadí. Hovoříme o *permutacích* prvků množiny S . Jestliže si předem prvky v S očíslováme, tj. ztotožníme si S s množinou $S = \{1, \dots, n\}$ n přirozených čísel, pak permutace odpovídají možným pořadím čísel od jedné do n . Máme tedy příklad jednoduché matematické věty a naši předchozí diskusi je možné považovat za její důkaz:

Tvrzení. *Počet různých pořadí na konečné množině s n prvky je dán známou funkcí faktoriál:*

e1.1a (1.2)
$$f(n) = n!$$

Dalším jednoduchým příkladem hodnoty určené formulí jsou tzv. *binomická čísla*, která vyjadřují, kolika způsoby lze vybrat k různých rozlišitelných předmětů z množiny n předmětů. Zjevně máme $n(n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$ možných výsledků postupného výběru našich k prvků, přitom ale stejnou výslednou k -tici dostaneme v $k!$ různých pořadích. Proto pro počet *kombinací k -tého stupně z n prvků* platí (samozřejmě je $k \leq n$)

e1.2 (1.3)
$$c(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n - 1) \dots (n - k + 1)}{k(k - 1) \dots 1} = \frac{n!}{(n - k)!k!}.$$

Ani toto není pro výpočet moc uspokojivá formule při velikých k i n , protože obsahuje výrazy pro faktoriály.

Pokud nám ale záleží i na pořadí vybrané k -tice prvků, hovoříme o *variaci k -tého stupně*. Jak jsme si již ověřili, pro počet variací platí

$$v(n, k) = n(n-1) \cdots (n-k+1)$$

pro všechny $0 \leq k \leq n$ (a nula jinak).

Binomická čísla dostala svůj název od tzv. binomického rozvoje, tj. roznásobení n -té mocniny dvojčlenu. Počítáme-li totiž $(a+b)^n$, bude koeficient u mocniny $a^k b^{n-k}$ pro každé $0 \leq k \leq n$ roven právě počtu možností, jak vybrat k -tici z n závorek v součinu (ty, kde bereme do výsledku a). Platí proto

$$\boxed{\text{e1.3}} \quad (1.4) \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

a všimněme si, že pro odvození jsme potřebovali pouze distributivitu, komutativnost a asociativitu násobení a sčítání. Formule (1.4) proto platí v každém komutativním okruhu.

Jako další jednoduchou ukázkou, jak vypadá matematický důkaz si odvodíme několik jednoduchých tvrzení o kombinačních číslech. Pro zjednodušení formulací definujme $\binom{n}{k} = 0$, kdykoliv je buď $k < 0$ nebo $k > n$.

1.6. Tvrzení. *Pro všechna přirozená čísla k a n platí*

- (1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- (2) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
- (3) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
- (4) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

DŮKAZ. První tvrzení je zjevně přímo z formule (1.3). Jestliže vyčíslíme pravou stranu z tvrzení (2), dostáváme

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \end{aligned}$$

což je ale levá strana tohoto tvrzení.

Tvrzení (3) zjevně platí pro $n = 0$, protože $\binom{0}{0} = 1 = 2^0$. (Stejně tak je přímo vidět i pro $n = 1$.) Předpokládejme, že platí pro nějaké n a spočtěme příslušnou sumu pro $n+1$ s využitím tvrzení (2) i (3). Dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=-1}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Prakticky stejně dokážeme i (4). Zjevně platí pro $n = 0$, předpokládejme, že platí pro nějaké n , a spočtěme příslušnou sumu pro $n+1$ s využitím tvrzení (2).

Dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=-1}^n (k+1) \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \\ &= 2^n + n2^{n-1} + n2^{n-1} = (n+1)2^n. \end{aligned}$$

□

Druhá vlastnost z našeho tvrzení umožňuje sestavit všechna kombinační čísla do tzv. *Pascalova trojúhelníku*, kde každé číslo obdržíme jako součet dvou bezprostředně nad ním ležících sousedů:

$$\begin{array}{rcccccc} n = 0 : & & & 0 & 1 & 0 & & & \\ n = 1 : & & & 0 & 1 & 1 & 0 & & \\ n = 2 : & & & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \\ n = 3 : & & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \\ n = 4 : & 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & \\ n = 5 : & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \end{array}$$

Všimněme si, že v jednotlivých řádcích máme právě koeficienty u jednotlivých mocnin z výrazu (1.4), např. poslední uvedený řádek říká

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Uveďme si příklad demonstrující kombinatorické úvahy (berte to jako zahřívací rozcvičku!):

1.7. Počet čísel ze dvou cifer. Určete počet čtyřciferných čísel sestavených z právě dvou různých cifer.

Řešení. Dvě různé cifry použité na zápis můžeme vybrat $\binom{10}{2}$ způsoby, ze dvou vybraných cifer můžeme sestavit $2^4 - 2$ různých dvojciferných čísel (dvojku odečítáme za dvě čísla složená pouze z jedné cifry). Celkem máme $\binom{10}{2}(2^4 - 2) = 630$ čísel. Nyní jsme ale započítali i čísla začínající nulou. Těch je $\binom{9}{1}(2^3 - 1) = 63$. Celkově dostáváme $630 - 63 = 567$ čísel. □

Určete počet sudých čtyřciferných čísel sestavených z právě dvou různých cifer.

Řešení. Obdobně jako v předchozím příkladu se nejprve nebudeme ohlížet na cifru nula. Dostaneme tak $\binom{5}{2}(2^4 - 2) + 5 \cdot 5(2^3 - 1)$ čísel (nejprve počítáme čísla pouze ze sudých cifer, druhý sčítanec udává počet sudých čtyřciferných čísel složených ze sudé a liché cifer). Opět musíme odečíst čísla začínající nulou, těch je $(2^3 - 1)4 + (2^2 - 1)5$. Hledaný počet cifer tak je

$$\binom{5}{2}(2^4 - 2) + 5 \cdot 5(2^3 - 1) - (2^3 - 1)4 - (2^2 - 1)5 = 272.$$

□ *Kolika způsoby lze do tří různých obálek rozmístit pět shodných stokorun a pět shodných tisícikorun tak, aby žádná nezůstala prázdná?*

Řešení. Nejprve zjistíme všechna rozmístění bez podmínky neprázdnosti. Těch je podle pravidla součinu (rozmísťujeme nezávisle stokoruny a tisícikoruny) $C(3, 5)^2 = \binom{7}{2}^2$. Odečteme postupně rozmístění, kdy je právě jedna obálka prázdná, a poté kdy

jsou dvě obálky prázdné. Celkem $C(3, 5)^2 - 3(C(2, 5)^2 - 2) - 3 = \binom{7}{2}^2 - 3(6^2 - 2) - 3 = 336$. \square

1.8a

1.8. Permutace, kombinace a variace s opakováním. Pořadí n prvků, z nichž mezi některými nerozlišujeme, nazýváme *permutace s opakováním*. Nechť je mezi n danými prvky p_1 prvků prvního druhu, p_2 prvků druhého druhu, \dots , p_k prvků k -tého druhu, $p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$, potom počet pořadí těchto prvků s opakováním budeme značit $P(p_1, \dots, p_k)$. Zřejmě platí

$$P(p_1, \dots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

Volný výběr prvků z n možností, včetně pořadí, nazýváme *variace k -tého stupně s opakováním*, jejich počet budeme značit $V(n, k)$. Předpokládáme, že stále máme pro výběr stejně možností, např. díky tomu, že vybrané prvky před dalším výběrem vracíme nebo třeba házíme pořad stejnou kostkou. Zřejmě platí

$$V(n, k) = n^k.$$

Pokud nás výběr zajímá bez zohlednění pořadí, hovoříme o *kombinacích s opakováním* a pro jejich počet píšeme $C(n, k)$.

Věta. Počet kombinací s opakováním k -té třídy z n prvků je pro všechny $0 \leq k \leq n$ $0 < n$

$$C(n, k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

DŮKAZ. Důkaz je opřen o trik (jednoduchý, když ho někdo už zná). Nechť x_1, \dots, x_k je kombinace libovolných prvků z dané množiny

$$S = \{a_1, \dots, a_n\},$$

na které si zafixujeme uvedené pořadí prvků. Jednotlivé volby x_i přidáme do pořadí a_1, \dots tam, kde je shodný prvek. Např. pro $S = \{a, b, c, d\}$ a volbu $x_1 = b, x_2 = c, x_3 = b$ dostaneme $S' = [a, b, b, b, c, c, d]$. Nyní si uvědomme, že pro rozpoznání původní kombinace nám stačí vědět, kolik je prvků v jednotlivých skupinách (je tam vždy právě o jeden prvek více než kolik patří do kombinace). Můžeme si to znázornit

$$a \mid bbb \mid cc \mid d \simeq * \mid *** \mid ** \mid *,$$

protože příslušnost jednotlivých příhrádek k prvkům S je námi pevně zvolena.

Počet $C(n, k)$ je proto roven počtu možných umístění příhrádek \mid , tj. výběr $n - 1$ pozic z $n + k - 1$ možných. \square

Příklady na procvičení:

4.

1.9. Určení počtu řešení rovnice. Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ určete počet všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

v množině přirozených čísel.

Řešení. Řešení je samozřejmě velice silně závislé na tom, jestli považujeme nulu za přirozené číslo. Rozhodněme se, že ne, ale určíme nejprve počet řešení rovnice v množině celých nezáporných čísel. Každé řešení (r_1, \dots, r_k) , $\sum_{i=1}^k r_i = n$ můžeme jednoznačně zašifrovat jako posloupnost jedniček a nul, ve které napíšeme nejprve r_1 jedniček, pak nulu, pak r_2 jedniček, nulu a tak dále. Posloupnost bude celkem

obsahovat n jedniček a $k - 1$ nul. Každá taková posloupnost navíc zřejmě určuje nějaké řešení dané rovnice. Je tedy řešení tolik, kolik je posloupností, tedy $\binom{n+k-1}{n}$.

Hledáme-li řešení v oboru přirozených čísel, tak si všimněme, že přirozená čísla x_1, \dots, x_k jsou řešením dané rovnice, právě když jsou celá nezáporná čísla $y_i = x_i - 1$, $i = 1, \dots, k$, řešením rovnice

$$y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - k.$$

Těch je podle první části řešení $\binom{n-1}{k-1}$. □

1.10. Příklad. Určete počet různých vět, které vzniknou přesmyčkami v jednotlivých slovech věty „Skokan na koks“ (vzniklé věty ani slova nemusejí dávat smysl).

Řešení. Určíme nejprve počty přesmyček jednotlivých slov. Ze slova „skokan“ dostaneme $6!/2$ různých přesmyček (permutace s opakováním $P(1, 1, 1, 1, 2)$), obdobně ze slova „na“ dvě a ze slova „koks“ $4!/2$. Celkem podle pravidla součinu $6!4!/2$. □

1.11. Příklad. Kolika způsoby můžeme do pěti různých důlků vybrat po jedné kouli, vybíráme-li ze čtyř bílých, čtyř modrých a tří červených koulí?

Řešení. Nejprve řešme úlohu v případě, že bychom měli k dispozici alespoň pět koulí od každé barvy. V tomto případě se jedná o volný výběr pěti prvků ze tří možností, tedy o variace s opakováním třetí třídy z pěti prvků (viz odstavec 2.4. učebních textů). Máme

$$V(3, 5) = 3^5.$$

Nyní odečteme ty výběry, ve kterých se vyskytují buď pouze koule stejné barvy (takové výběry jsou tři), nebo právě čtyři koule červené (takových výběrů je $10 = 2 \cdot 5$; nejprve vybereme barvu koule, která nebude červená – dvě možnosti – a poté důlek, ve kterém bude – pět možností). Celkem tedy máme

$$3^5 - 3 - 10 = 230$$

možných výběrů. □

3. Diferenční rovnice

V předchozích odstavcích jsme viděli formule, které zadávaly hodnotu skalární funkce definované na přirozených číslech (faktoriál) nebo dvojicích čísel (binomická čísla) pomocí předcházejících hodnot. Tomu lze rozumět také tak, že místo hodnoty naší funkce zadáváme její změnu při odpovídající změně nezávislé proměnné. Porovnejte si formule v 1.4 a v 1.6. Takto se skutečně velice často postupuje při matematické formulaci modelů, které popisují reálné systémy v ekonomice, biologii apod. My si tu povšimneme jen několika jednoduchých případů a budeme se k této tématice postupně vracet.

1.8

1.12. Lineární rovnice prvního řádu. Obecnou *diferenční rovnicí prvního řádu* rozumíme výraz

$$f(n+1) = F(n, f(n)),$$

kde F je známá skalární funkce závislá na dvojicích přirozených čísel. Je zřejmé, že takový vztah, spolu s volbou pro $f(0)$, zadává jednoznačně celou nekonečnou posloupnost hodnot $f(0), f(1), \dots, f(n), \dots$. Jako příklad může sloužit definiční formule pro faktoriál, tj. $n! = n \cdot (n-1)!$. Vidíme, že skutečně vztah pro $f(n+1)$ závisí na n i hodnotě $f(n)$.

Pro konstantní závislosti je nejjednodušší tzv. *lineární diferenční rovnice*

$$\boxed{\text{e1.4}} \quad (1.5) \quad f(n+1) = a \cdot f(n) + b,$$

kde $a, b \in \mathbb{N}$. Takovou rovnici umíme snadno řešit. Je-li $b = 0$, pak zjevně

$$f(n) = a^n f(0).$$

To je např. vztah pro tzv. Malthusiánský model populačního růstu, který vychází z představy, že za zvolený časový interval vzroste populace s konstantní úměrou a vůči předchozímu stavu. Dokážeme si obecný výsledek pro rovnice prvního řádu, které se podobají lineárním, ale připouští proměnné koeficienty a a b , tj.

$$\boxed{\text{e1.5}} \quad (1.6) \quad f(n+1) = a_n \cdot f(n) + b_n$$

1.9 **1.13. Věta.** *Obecné řešení diferenční rovnice (1.6) prvního řádu s počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ je dáno vztahem*

$$\boxed{\text{e1.6}} \quad (1.7) \quad f(n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i \right) b_r.$$

DŮKAZ. Tvzení dokážeme matematickou indukcí. Pro zjednodušení zápisu užíváme konvenci, že konečný součin s prázdnou množinou součinitelů je roven jedné (podobně jako součet s prázdnou množinou sčítanců je roven nule). To je zapotřebí v samotné formuli v pravém sčítanci pro hodnotu $r = n - 1$, kde není žádné vyhovující i .

Zjevně pak tvrzení platí pro $n = 1$, kdy se jedná právě o definiční vztah $f(1) = a_0 y_0 + b_0$. Předpokládáme-li, že tvrzení platí pro libovolné pevně zvolené n , můžeme snadno spočítat:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= a_n \left(\left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i \right) b_r \right) + b_n \\ &= \left(\prod_{i=0}^n a_i \right) y_0 + \sum_{r=0}^n \left(\prod_{i=r+1}^n a_i \right) b_r, \end{aligned}$$

jak se přímo vidí roznásobením výrazů. \square

1.10 **1.14. Důsledek.** *Obecné řešení lineární diferenční rovnice (1.5) s $a \neq 1$ a počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ je*

$$\boxed{\text{e1.7}} \quad (1.8) \quad f(n) = a^n y_0 + \frac{1 - a^n}{1 - a} b.$$

DŮKAZ. Dosazením konstantních hodnot za a_i a b_i do obecné formule dostáváme zjevně první sčítanec okamžitě. Pro vyčíslení součtu součinitelů v druhém si je třeba všimnout, že se jedná o výrazy $(1 + a + \dots + a^{n-1})b$. Sečtením této geometrické řady (připomeňme, že $1 - a^n = (1 - a)(1 + a + \dots + a^{n-1})$) dostaneme právě požadovaný výsledek. \square

Uveďme si praktický příklad na řešení diferenčních rovnic prvního řádu:

1.15. Spláčení půjčky. Mirek si chce koupit nové auto. Auto stojí 300 000 Kč. Mirek by chtěl auto koupit na měsíční splátky. Prodávající společnost mu nabízí půjčku na koupi auta s ročním úrokem 6%. Mirek bych chtěl auto splatit za tři roky. Jak vysoká bude měsíční splátka?

Řešení. Označme Mirkovu měsíční splátku S . Po prvním měsíci splatí Mirek S korun, z nichž část půjde na vlastní splátku, část na splacení úroku. Částku, kterou bude Mirek dlužit po uplynutí k měsíců označme d_k . Po prvním měsíci bude Mirek dlužit

$$(1.9) \quad d_1 = 300000 - S + \frac{0,06}{12}300000.$$

Obecně po uplynutí k -tého měsíce

$$\boxed{1r} \quad (1.10) \quad d_k = d_{k-1} - S + \frac{0,06}{12}d_{k-1}.$$

Podle vztahu (1.8) je d_k dáno následovně

$$(1.11) \quad d_k = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^k 300000 - \left(\left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^k - 1\right) \left(\frac{12S}{0,06}\right).$$

Splacení po třech letech se rovná podmínce $d_{36} = 0$, odkud dostáváme

$$(1.12) \quad S = 300000 \left(\frac{\frac{0,06}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{-36}} \right) \doteq 9127.$$

□

Všimněme si, že rekurentní vztah (1.10) můžeme použít na náš příklad pouze tak dlouho, dokud budou všechna $y(n)$ kladná, tj. dokud bude Mirek skutečně něco dlužit.

Otázka. Jak dlouho by Mirek auto splácel, kdyby chtěl měsíčně splácet 5000 Kč?

Řešení. Při označení $q = 1,005$, $c = 300000$ nám podmínka $d_k = 0$ dává vztah

$$q^k = \frac{200S}{200S - c},$$

jehož logaritmováním obdržíme

$$k = \frac{\ln 200S - \ln(200S - c)}{\ln q},$$

což pro $S = 5000$ dává přibližně $k = 71,5$, tedy spláčení půjčky by trvalo šest let (poslední splátka by nebyla plných 5 000 Kč). □

□

1.16. Rovnice druhého řádu. Obecně nazýváme *diferenční rovnicí řádu k* vztah

$$f(n+k) = F(n, f(n), \dots, f(n+k-1)) = 0,$$

kde F je známá skalární funkce v $k+1$ proměnných skalárních veličinách. Celá poslounost hodnot je jednoznačně určena volbou k -tice čísel $f(0), \dots, f(k-1)$.

Lineární diferenční rovnicí druhého řádu rozumíme

$$\boxed{e1.8} \quad (1.13) \quad f(n+2) = a \cdot f(n+1) + b \cdot f(n) + c,$$

kde a, b, c jsou známé skalární koeficienty. Dobře známým příkladem s $c = 0$ je např. Fibonacciho poslounost čísel y_0, y_1, \dots , viz příklad 1.17. Zkusme dosadit do rovnice (1.13) podobné řešení jako u lineárních, tj. $f(n) = \lambda^n$ pro nějaké skalární λ . Dosazením dostáváme

$$\lambda^{n+2} - a\lambda^{n+1} - b\lambda^n = \lambda^n(\lambda^2 - a\lambda - b) = 0$$

a odtud vidíme, že buď je $\lambda = 0$ nebo

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4b}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4b}).$$

Protože součet dvou řešení rovnice $f(n+2) - a \cdot f(n+1) - b \cdot f(n) = 0$ je opět řešením téže rovnice a totéž platí pro konstantní násobky řešení, odvodili jsme obecné řešení $f(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ a pro jednoznačné vyřešení konkrétní úlohy se zadanými počátečními hodnotami $f(0)$ a $f(1)$ nám zbývá jen najít příslušné konstanty C_1 a C_2 . Ukažme alespon na jednom příkladě.

e1.9 (1.14)
$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{1}{2}y_n$$

$$y_0 = 2, y_1 = 0.$$

V našem případě je tedy $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$ a zjevně $y_0 = C_1 + C_2 = 2$ a $y_1 = \frac{1}{2}C_1(1 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2}C_2(1 - \sqrt{3})$ je splněno pro právě jednu volbu těchto konstant. Přímým výpočtem $C_1 = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $C_2 = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Tento příklad je velice poučný z mnoha důvodů. Na první pohled je vidět, že použitá metoda funguje pro obecné lineární diferenční rovnice bez absolutních členů. Řešení tu lze hledat pomocí kořenů tzv. charakteristického polynomu rovnice. Dále si všimněme, že i když nalezená řešení pro rovnice s celočíselnými koeficienty vypadají složitě a jsou vyjádřena pomocí iracionálních (případně komplexních) čísel, o samotném řešení dopředu víme, že je celočíselné též. Bez tohoto „úroku“ do většího oboru skalárů bychom ovšem obecné řešení napsat neuměli. S podobnými jevy se budeme potkávat velice často. Obecné řešení nám také umožňuje bez přímého vyčíslování konstant diskutovat kvalitativní chování posloupnosti čísel $f(n)$, tj. zda se budou s rostoucím n blížit k nějaké pevné hodnotě nebo utečou do neomezených kladných nebo záporných hodnot.

Ukážeme „populační model“, který je příkladem na rekurentní rovnici druhého řádu:

1.

1.17. Fibonacciho posloupnost. *Na začátku jara přinesl čáp na louku dva čerstvě narozené zajíčky, samečka a samičku. Samička je schopná od dvou měsíců stáří povít každý měsíc dva malé zajíčky (samečka a samičku). Nově narození zajáci splodí potomky po jednom měsíci a pak každý další měsíc. Každá samička je březí jeden měsíc a pak opět porodí samečka a samičku. Kolik párů zajíců bude na louce po devíti měsících (pokud žádný neumře a žádný se tam „nepřistěhuje“)?*

Řešení. Po uplynutí prvního měsíce je na louce pořád jeden pár, nicméně samička otěhotní. Po dvou měsících se narodí první potomci, takže na louce budou dva páry. Po uplynutí každého dalšího měsíce se narodí (tedy přibude) tolik zajíců, kolik otěhotnělo zaječic před měsícem, což je přesně tolik, kolik bylo před měsícem párů schopných splodit potomka, což je přesně tolik, kolik bylo párů před dvěma měsíci. Celkový počet p_n zajíců po uplynutí n -tého měsíce tak je tak součtem počtů párů v předchozích dvou měsících. Pro počet párů zajíců na louce tedy dostáváme *homogenní lineární rekurentní formuli*

fib (1.15)
$$p_{n+2} = p_{n+1} + p_n, \quad n = 1, \dots,$$

kteřá spolu s počátečními podmínkami $p_1 = 1$ a $p_2 = 1$ jednoznačně určuje počty párů zajíců na louce v jednotlivých měsících. Linearita formule znamená, že všechny členy posloupnosti (p_n) jsou ve vztahu v první mocnině, rekurence je snad jasná a homogenita značí, že v předpisu chybí absolutní člen (viz dále pro nehomogenní

formule). Pro hodnotu n -tého členu můžeme odvodit explicitní formuli. V hledání formule nám pomůže pozorování, že pro jistá r je funkce r^n řešením rekurentní formule bez počátečních podmínek. Tato r získáme prostě tak, že dosadíme do rekurentního vztahu:

$$\boxed{\text{fib}} \quad (1.16) \quad r^{n+2} = r^{n+1} + r^n \quad \text{a po vydělení } r^n \text{ dostaneme}$$

$$(1.17) \quad r^2 = r + 1,$$

což je tzv. *charakteristická rovnice* daného rekurentního vztahu. Naše rovnice má kořeny $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a tedy posloupnosti $a_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ a $b_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $n \geq 1$ vyhovují danému vztahu. Zřejmě také jejich libovolná lineární kombinace $c_n = sa_n + tb_n$, $s, t \in \mathbb{R}$. Čísla s a t můžeme zvolit tak, aby výsledná kombinace splňovala dané počáteční podmínky, v našem případě $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. Pro jednoduchost je vhodné navíc ještě dodefinovat nultý člen posloupnosti jako $c_0 = 0$ a spočítat s a t z rovnic pro c_0 a c_1 . Zjistíme, že $s = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $t = \frac{1}{\sqrt{5}}$ a tedy

$$(1.18) \quad p_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n(\sqrt{5})}.$$

Takto zadaná posloupnost splňuje danou rekurentní formuli a navíc počáteční podmínky $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, jedná se tedy o tu jedinou posloupnost, která je těmito požadavky jednoznačně zadána. \square

Posloupnost zadaná rekurentní formulí (1.15) se nazývá *Fibonacciho posloupnost*. Tato formule je příkladem homogenní lineární diferenční rovnice. Další příklad ukáže na ekonomickém modelu případ tzv. nehomogenní diferenční rovnice

$\boxed{3.}$

1.18. Zjednodušený model chování národního produktu.

$$(1.19) \quad y_{k+2} - a(1+b)y_{k+1} + aby_k = 1,$$

kde y_k je národní produkt v roce k , konstanta a je takzvaný *mezní sklon ke spotřebě*, což je makroekonomický ukazatel, který udává jaký zlomek peněz, které mají obyvatelé k dispozici, utratí a konstanta b popisuje jak závisí míra investic soukromého sektoru na mezním sklonu ke spotřebě.

Předpokládáme dále, že velikost národního produktu je normována tak, aby na pravé straně rovnice vyšlo číslo 1.

Spočítejte konkrétní hodnoty pro $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{3}$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.

Řešení.

Nejprve budeme hledat řešení homogenní rovnice (pravá strana nulová) ve tvaru r^k . Číslo r musí být řešením charakteristické rovnice

$$x^2 - a(1+b)x + ab = 0, \quad \text{tj. } x^2 - x + \frac{1}{4} = 0,$$

která má dvojnásobný kořen $\frac{1}{2}$. Všechna řešení homogenní rovnice jsou potom tvaru $a\left(\frac{1}{2}\right)^n + bn\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Dále si všimněme, že najdeme-li nějaké řešení nehomogenní rovnice (tzv. partikulární řešení), tak pokud k němu přičteme libovolné řešení homogenní rovnice, obdržíme jiné řešení nehomogenní rovnice. Lze ukázat, že takto získáme všechna řešení nehomogenní rovnice.

V našem případě (tj. pokud jsou všechny koeficienty i nehomogenní člen konstantami) je partikulárním řešením konstanta $y_n = c$, dosazením do rovnice máme

$c - c + \frac{1}{4}c = 1$, tedy $c = 4$. Všechna řešení diferenční rovnice

$$y_{k+2} - y_{k+1} + \frac{1}{4}y_k = 1$$

jsou tedy tvaru $4 + a(\frac{1}{2})^n + b(\frac{1}{2})^n$. Požadujeme $y_0 = y_1 = 1$ a tyto dvě rovnice dávají $a = b = -3$, tedy řešení naší nehomogenní rovnice je

$$y_n = 4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Opět, protože víme, že posloupnost zadaná touto formulí splňuje danou diferenční rovnici a zároveň dané počáteční podmínky, jedná se vskutku o tu jedinou posloupnost, která je těmito vlastnostmi charakterizována. \square

V předchozím příkladu jsme použili tzv. *metodu neurčitých koeficientů*. Ta spočívá v tom, že na základě nehomogenního členu dané rovnice „uhodneme“ tvar partikulárního řešení. Tvary partikulárních řešení jsou známy pro celou řadu nehomogenních členů. Např. rovnice

$$(1.20) \quad y_{n+k} + a_1y_{n+k-1} + \dots + a_ky_n = P_m(n),$$

s reálnými kořeny charakteristické rovnice má partikulární řešení tvaru $Q_m(n)$, kde $P_m(n)$ a $Q_m(n)$ jsou polynomy stupně m .

Další možnou metodou řešení je tzv. *variace konstant*, kdy nejprve najdeme řešení

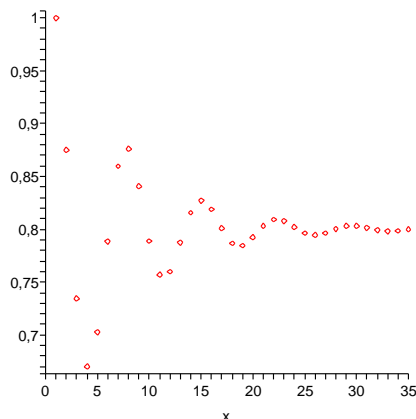
$$y(n) = \sum_{i=1}^k c_i f_i(n)$$

zhomogenizované rovnice a po té uvažujeme konstanty c_i jako funkce $c_i(n)$ proměnné n a hledáme partikulární řešení dané rovnice ve tvaru

$$y(n) = \sum_{i=1}^k c_i(n) f_i(n).$$

Ukažme si na obrázku hodnoty f_i pro $i \leq 35$ a rovnici

$$f(n) = \frac{9}{8}f(n-1) - \frac{3}{4}f(n-2) + \frac{1}{2}, \quad f(0) = f(1) = 1$$



A ještě jeden příklad.

Příklad. Nalezněte explicitní vzorec pro posloupnost vyhovující následující lineární diferenční rovnici s počátečními podmínkami:

$$x_{n+2} = 2x_n + n, x_1 = 2, x_2 = 2.$$

Řešení. Řešení zhomogenizované rovnice je tvaru $a(\sqrt{2})^n + b(-\sqrt{2})^n$.

Partikulárním řešením je posloupnost $-n - 2$.

Dosazením do počátečních podmínek dostaneme pro řešení tvaru $a(\sqrt{2})^n + b(-\sqrt{2})^n - n - 2$, že $a = \frac{6+5\sqrt{2}}{4}$, $b = \frac{6-5\sqrt{2}}{4}$. Řešením je posloupnost

$$x_n = \frac{6 + 5\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2})^n + \frac{6 - 5\sqrt{2}}{4}(-\sqrt{2})^n - n - 2.$$

□

1.12

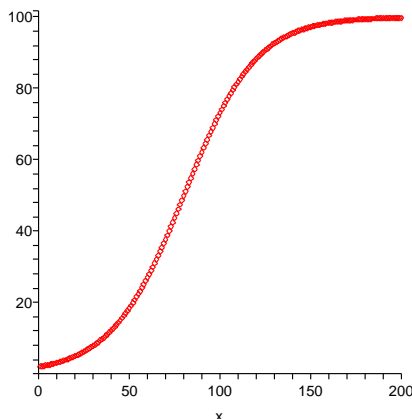
1.19. Nelineární příklad. Vraťme se na chvíli k rovnici prvního řádu, kterou jsme velice primitivně modelovali populační růst závisející přímo úměrně na okamžité velikosti populace p . Realističtější model bude mít takto úměrnou změnu populace $\Delta p(n) = p(n+1) - p(n)$ jen při malých hodnotách p , tj. $\Delta p/p \sim r > 0$. Při určité limitní hodnotě $p = K > 0$ ale naopak už populace neroste a při ještě větších už klesá. Předpokládejme, že právě hodnoty $y_n = \Delta p(n)/p(n)$ závisí na $p(n)$ lineárně. Chceme tedy popsat přímkou v rovině proměnných p a y , která prochází body $[0, r]$ a $[K, 0]$. Položíme proto

$$y = -\frac{r}{K}p + r.$$

Dosazením za y dostáváme $p(n+1) - p(n) = p(n)(-\frac{r}{K}p(n) + r)$, tj. diferenční rovnici prvního řádu

$$(1.21) \quad p(n+1) = p(n)\left(1 - \frac{r}{K}p(n) + r\right).$$

Zkuste si promyslet nebo vyzkoušet chování tohoto modelu pro různé hodnoty r a K . Na obrázku je průběh hodnot pro parametry $r = 0,05$ (tj. pětiprocentní nárůst v ideálním stavu), $K = 100$ (tj. zdroje limitují hodnotu na 100 jedinců) a počáteční stav jsou právě dva jedinci.



4. Pravděpodobnost

Předchozí sekce naznačila, že hodnoty skalárních funkcí umíme definovat pomocí popisu jejich změn v závislosti na změnách závislé proměnné. Teď se podíváme na další obvyklý případ – sledované hodnoty často nejsou známy ani explicitně formulí, ani implicitně nějakým popisem. Jsou výsledkem nějaké nahodilosti a my se snažíme popsat s jakou *pravděpodobností* nastane ta či ona možnost.

1.20. Co je pravděpodobnost? Nejbanálnějším příkladem může sloužit obvyklé házení kostkou s šesti stranami s označeními 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pokud popisujeme matematický model takového házení „pocitivou“ kostkou, budeme očekávat a tudíž i předepisovat, že každá ze stran padá stejně často. Slovy to vyjadřujeme „každá předem vybraná strana padne s pravděpodobností $\frac{1}{6}$ “. Pokud ale si třeba sami nožičkem vyrobíme takovou kostku, je jisté, že skutečné relativní četnosti výsledků nebudou stejné. Pak můžeme z velkého počtu pokusů usoudit na relativní četnosti jednotlivých výsledků hodů a tyto ustanovit jako pravděpodobnosti v našem matematickém popisu. Nicméně při sebevětším počtu pokusů nemůžeme vyloučit možnost, že se náhodou povedla velice nepravděpodobná kombinace výsledků a že se tím náš matematický model skutečnosti stal (pro tento konkrétní případ) nedobrým.

V dalším budeme pracovat s abstraktním matematickým popisem pravděpodobnosti v nejjednodušším přiblížení. To, do jaké míry je takový popis adekvátní pro konkrétní pokusy či jiný problém, je záležitostí mimo samotnou matematiku. To ale neznamená, že by se takovým přemýšlením neměli zabývat matematikové také (nejspíše ve spolupráci s jinými experty). Později se vrátíme k pravděpodobnosti (jakožto teorii popisující chování nahodilých procesů nebo i plně determinovaných dějů, kde ovšem neznáme přesně všechny určující parametry) a matematické statistice (jakožto teorii umožňující posoudit, do jaké míry lze očekávat, že vybraný model je ve shodě s realitou). K tomu ovšem bude již potřebný dosti rozsáhlý matematický aparát, který budeme mezitím několik semestrů budovat.

1.21. Náhodné jevy. Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme *základní prostor*. Pro jednoduchost bude pro nás Ω konečná množina s prvky $\omega_1, \dots, \omega_n$, představujícími jednotlivé *možné výsledky*. Každá podmnožina $A \subset \Omega$ představuje možný *jev*. Systém podmnožin \mathcal{A} základního prostoru se nazývá *jevové pole*, jestliže

- $\Omega \in \mathcal{A}$, tj. základní prostor, je jevem,
- je-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \setminus B \in \mathcal{A}$, tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich množinový rozdíl,
- jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \cup B \in \mathcal{A}$, tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich sjednocení.

Slovy se tak dá jevové pole charakterizovat jako systém podmnožin (konečného) základního prostoru uzavřený na průniky, sjednocení a rozdíly. Jednotlivé množiny $A \in \mathcal{A}$ nazýváme *náhodné jevy* (vzhledem k \mathcal{A}).

Zjevně je i komplement $A^c = \Omega \setminus A$ jevu A jevem, který nazýváme *opačný jev* k jevu A . Průnik dvou jevů opět jevem, protože pro každé dvě podmnožiny $A, B \subset \Omega$ platí

$$A \setminus (\Omega \setminus B) = A \cap B.$$

Pro naše házení kostkou je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a jevové pole je tvořeno všemi podmnožinami. Např. náhodný jev $\{1, 3, 5\}$ pak interpretujeme jako „padne liché číslo“.

Něco málo terminologie, která by měla dále připomínat souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá *jistý jev*, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá *nemožný jev*,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají *elementární jevy*,
- *společné nastoupení jevů* $A_i, i \in I$, odpovídá jevu $\bigcap_{i \in I} A_i$, *nastoupení alespoň jednoho z jevů* $A_i, i \in I$, odpovídá jevu $\bigcup_{i \in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou *neslučitelné jevy*, je-li $A \cap B = \emptyset$,
- jev A má za *důsledek* jev B , když $A \subset B$,
- je-li $A \in \mathcal{A}$, pak se jev $B = \Omega \setminus A$ nazývá *opačný jev k jevu* A , píšeme $B = A^c$.

Přestavte si příklady všech uvedených pojmů pro jevový prostor popisující házení kostkou nebo obdobně pro házení mincí!

1.22. Definice. *Pravděpodobnostní prostor* je jevové pole \mathcal{A} podmnožin (konečného) základního prostoru Ω , na kterém je definována skalární funkce $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A ,
- je aditivní, tj. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, kdykoliv je $A \cap B = \emptyset$ a $A, B \in \mathcal{A}$,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme *pravděpodobností* na jevovém poli (Ω, \mathcal{A}) .

Zjevně je okamžitým důsledkem našich definic řada prostých ale užitečných tvrzení. Např. je pro všechny jevy

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Dále můžeme matematickou indukci snadno rozšířit aditivnost na jakýkoliv konečný počet neslučitelných jevů $A_i \subset \Omega, i \in I$, tj.

$$P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i), \text{ kdykoliv je } A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j \in I.$$

1.23. Definice. Nechť Ω je konečný základní prostor a nechť jevové pole \mathcal{A} je právě systém všech podmnožin v Ω . *Klasická pravděpodobnost* je takový pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) s pravděpodobnostní funkcí $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Zjevně takto zadaná funkce skutečně definuje pravděpodobnost, ověřte si samostatně všechny požadované axiomy.

Uveďme nějaké praktičtější příklady:

1.24. Výtah. *Do výtahu osmipatrové budovy nastoupilo 5 osob. Každá z nich vystoupí se stejnou pravděpodobností v libovolném poschodí. Jaká je pravděpodobnost, že všichni lidé vystoupí*

- (1) *v šestém poschodí,*
- (2) *ve stejném poschodí,*
- (3) *každý v jiném poschodí?*

Řešení. Základní prostor všech možných jevů je prostor všech možných způsobů vystoupení 5 osob z výtahu. Těch je 8^5 .

V prvním případě je jediná příznivá možnost vystoupení, hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{1}{8^5}$, ve druhém případě máme osm možností, hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{1}{8^4}$ a konečně ve třetím je počet příznivých případů dán pětiprvkovou variací z osmi prvků (z osmi pater vybíráme pět, ve kterých se vystoupí a dále kteří lidé vystoupí ve vybraných poschodích), celkem je hledaná pravděpodobnost ve třetím případě rovna (viz 1.5 a 1.8)

$$\frac{v(5, 8)}{V(5, 8)} = \frac{8 \cdot 7 \cdots 4}{8^5} \doteq 0,2050781250.$$

□

1.25. Kino. Do řady v kině o $2n$ místech je náhodně rozmístěno n mužů a n žen. Jaká je pravděpodobnost, že žádné dvě osoby stejného pohlaví nebudou sedět vedle sebe?

Řešení. Všech možných rozmístění lidí v řadě je $(2n)!$, rozmístění splňujících podmínky je $2(n!)^2$ (máme dvě možnosti výběru pozice mužů, tedy i žen, na nich jsou pak muži i ženy rozmístěny libovolně). Výsledná pravděpodobnost je tedy

$$p(n) = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}, \quad p(2) \doteq 0,33, \quad p(5) \doteq 0,0079, \quad p(8) \doteq 0,00016$$

□

1.26. Smrt na silnici. Ročně zahyne na silnicích v ČR přibližně 1200 českých občanů. Určete pravděpodobnost, že někdo z vybrané skupiny pěti set Čechů zemře v následujících deseti letech při dopravní nehodě. Předpokládejte pro zjednodušení, že každý občan má v jednom roce stejnou „šanci“ zemřít při dopravní nehodě a to $1200/10^7$.

Řešení. Spočítejme nejprve pravděpodobnost, že jeden vybraný člověk v následujících deseti letech nezahyne na při dopravní nehodě. Pravděpodobnost, že nezahyne v jednom roce, je $(1 - \frac{12}{10^5})$. Pravděpodobnost, že nezahyne v následujících deseti letech, je pak $(1 - \frac{12}{10^5})^{10}$. Pravděpodobnost, že v následujících deseti letech nezahyne nikdo z daných pěti set lidí, je opět podle pravidla součinu (jedná se o nezávislé jevy) $(1 - \frac{12}{10^5})^{5000}$. Pravděpodobnost jevu opačného, tedy toho, že někdo z vybraných pěti set lidí zahyne, je tedy

$$1 - (1 - \frac{12}{10^5})^{5000} \doteq 0,45.$$

□

1.27. Ruleta. Alešovi zbylo 2500 Kč z pořádání tábora. Aleš není žádný ňouma: 50 Kč přidal z kasičky a rozhodl se jít hrát ruletu na automaty. Aleš sází pouze na barvu. Pravděpodobnost výhry při sázce na barvu je $18/37$. Začíná sázet na 10 Kč a pokud prohraje, v další sázce vsadí dvojnásobek toho, co v předchozí (pokud na to ještě má, pokud ne, tak končí). Pokud nějakou sázku vyhraje, v následující sázce hraje opět o 10 Kč. Jaká je pravděpodobnost, že při tomto postupu vyhraje dalších 2550 Kč? (jakmile bude 2500 Kč v plusu, tak končí)

Řešení. Nejprve spočítejme, kolikrát po sobě může Aleš prohrát. Začíná-li s 10 Kč, tak na n vsazení potřebuje

$$10 + 20 + \dots + 10 \cdot 2^{n-1} = 10 \left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i \right) = 10 \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1} \right) = 10 \cdot (2^n - 1).$$

Jak snadno nahlédneme, číslo 2550 je tvaru $10(2^n - 1)$ a to pro $n = 8$. Aleš tedy může sázet osmkrát po sobě bez ohledu na výsledek sázky, na devět sázek by potřeboval již $10(2^9 - 1) = 5110$ Kč a to v průběhu hry nikdy mít nebude (jakmile bude mít 5100 Kč, tak končí). Aby tedy jeho hra skončila neúspěchem, musel by prohrát osmkrát v řadě. Pravděpodobnost prohry při jedné sázce je $19/37$, pravděpodobnost prohry v osmi po sobě následujících (nezávislých) sázkách je tedy $(19/37)^8$. Pravděpodobnost, že vyhraje 10 Kč (při daném postupu) je tedy $1 - (19/37)^8$. Na to, aby vyhrál 2500 Kč, potřebuje 255 krát vyhrát po desetikoruně. Tedy opět podle pravidla součinu je pravděpodobnost výhry

$$\left(1 - \left(\frac{19}{37} \right)^8 \right)^{255} \doteq 0,29.$$

Tedy pravděpodobnost výhry je nižší, než kdyby vsadil rovnou vše na jednu barvu. \square

1.28. Příklad. Ze skupiny osmi mužů a čtyř žen náhodně vybereme skupinu pěti lidí. Jaká je pravděpodobnost, že v ní budou alespoň tři ženy?

Pravděpodobnost spočítáme jako podíl počtu příznivých případů ku počtu všech případů. Příznivé případy rozdělíme podle toho, kolik je v náhodně vybrané skupině mužů: mohou v ní být buď dva, nebo jeden muž. Skupinek o pěti lidech s jedním mužem je osm (záleží pouze na výběru muže, ženy v ní musí být všechny), skupinek se dvěma muži je potom $c(8, 2)c(4, 3) = \binom{8}{2} \binom{4}{3}$ (vybereme dva muže z osmi a nezávisle na tom tři ženy ze čtyř, tyto dva výběry můžeme nezávisle kombinovat a podle pravidla součinu dostáváme uvedený počet skupin). Všech možných skupin o pěti lidech pak můžeme sestavit $c(12, 5) = \binom{12}{5}$. Hledaná pravděpodobnost je tedy

Řešení.

$$\frac{8 + \binom{4}{3} \binom{8}{2}}{\binom{12}{5}}.$$

\square

1.29. Příklad. Z klobouku, ve kterém je pět bílých, pět červených a šest černých koulí, náhodně vytahujeme koule (bez vracení). Jaká je pravděpodobnost, že pátá vytažená koule bude černá?

Řešení. Spočítáme dokonce obecnější úlohu. Totiž pravděpodobnost toho, že i -tá vytažená koule bude černá, je stejná pro všechna i , $1 \leq i \leq 16$. Můžeme si totiž představit, že vytáhneme postupně všechny koule. Každá taková posloupnost vytažených koulí (od první vytažené koule po poslední), složená z pěti bílých, pěti červených a šesti černých koulí, má stejnou pravděpodobnost vytažení. Pravděpodobnost toho, že i -tá vytažená koule bude černá je tedy rovna podílu počtu posloupností pěti červených, pěti bílých a šesti černých koulí, kdy je na i -tém místě černá koule (těch je tolik, kolik je libovolných posloupností pěti bílých, pěti červených a pěti

černých koulí, tedy $P(5, 5, 5) = \frac{15!}{5!5!5!}$) a počtu všech posloupností složených z pěti bílých, pěti červených a šesti černých koulí, tedy $P(6, 5, 5) = \frac{16!}{6!5!5!}$. Tedy celkem

$$\frac{\frac{15!}{5!5!5!}}{\frac{16!}{6!5!5!}} = \frac{3}{8}.$$

□

1.30. Příklad. Vraťme se k házení kostkou a zkusme popsat jevy ze základního prostoru Ω vznikající při házení tak dlouho, dokud nepadne šestka, ne však více než stokrát.

Pro jeden hod samostatně je základním prostorem šest čísel od jedné do šesti a jde o klasickou pravděpodobnost. Pro celé série našich hodů bude základní prostor daleko větší – bude to množina konečných posloupností čísel od jedné do šestky, které buď končí šestkou, mají nejvýše 100 členů a všechna předchozí čísla jsou menší než šest, nebo jde o 100 čísel od jedné do pěti. Jevem A může být např. podmnožina „házení končí druhým pokusem“. Všechny příznivé elementární jevy pak jsou

$$[1, 6], [2, 6], [3, 6], [4, 6], [5, 6].$$

Ze známé klasické pravděpodobnosti pro jednotlivé hody umíme odvodit pravděpodobnosti našich jevů v Ω . Není to ale jistě klasická pravděpodobnost. Tak pro diskutovaný jev chceme popsat, s jakou pravděpodobností nepadne šestka při prvním hodu a zároveň padne při druhém. Vnucuje se řešení

$$P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36},$$

protože v prvním hodu padne s pravděpodobností $1 - \frac{1}{6}$ jiné číslo než šest a druhý hod, ve kterém naopak požadujeme šestku, je zcela nezávislý na prvním. Samozřejmě toto není poměr počtu příznivých výsledků k velikosti celého stavového prostoru!

Obecněji můžeme říci, že po právě $1 < k < 100$ hodech pokus skončí s pravděpodobností $(\frac{5}{6})^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$. Ze všech možností je tedy nejpravděpodobnější, že skončí již napoprvé.

Jiný příklad, jak z házení kostkou dostat různě pravděpodobné jevy je pozorovat součty při hodu více kostkami. Uvažujme takto: při hodu jednou kostkou je každý výsledek stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Při hodu dvěma kostkami je každý předem zvolený výsledek (a, b) , tj. dvojice přirozených čísel od jedné do šesti (včetně pořadí), stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{36}$. Pokud se budeme ptát po dvou pětkách, je tedy pravděpodobnost poloviční než u dvou různých hodnot bez uvedení pořadí. Pro jednotlivé možné součty uvedené v horním řádku nám vychází počet možností v řádku dolním:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Podobně vyjde pravděpodobnost $\frac{1}{216}$ jednotlivých výsledků hodu třemi kostkami, včetně určeného pořadí. Pokud se budeme ptát na pravděpodobnost výsledného součtu při hodu více kostkami, musíme pouze určit, kolik je možností, jak daného součtu dosáhnout a příslušné pravděpodobnosti sečíst.

Obecně je sčítání pravděpodobností složité. Následující věta je přímým promítnutím tzv. kombinatorického *principu inkluze a exkluze* do naší konečné pravděpodobnosti:

1.16

1.31. Věta. *Budte $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ libovolné jevy na základním prostoru Ω s jevovým polem \mathcal{A} . Pak platí*

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^k A_i) &= \sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k P(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_{\ell=j+1}^k P(A_i \cap A_j \cap A_\ell) \\ &\quad - \dots \\ &\quad + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k). \end{aligned}$$

Jde patrně o dobrý příklad matematického tvrzení, kde nejtěžší je najít dobrou formulaci a pak se dá říci, že (intuitivně) je tvrzení zřejmé.

Skutečně, díky aditivní vlastnosti pravděpodobnosti si můžeme představit, že každý jev rozložíme na elementární (tj. jednobodové), jakkoliv ve skutečnosti nemusí jednoprvkové podmnožiny do jevového pole obecně patřit. Pak je pravděpodobnost každého jevu dána součtem pravděpodobností jednotlivých elementárních jevů do něj patřících a tvrzení věty můžeme číst následovně: sečteme všechny pravděpodobnosti výsledků ze všech A_i zvlášť, pak ovšem musíme odečíst ty, které tam jsou započteny dvakrát (tj. prvky v průnicích dvou). Teď si ovšem dovolujeme odečíst příliš mnoho tam, kde ve skutečnosti byly prvky třikrát, tj. korigujeme přičtením pravděpodobností ze třetího členu, atd.

Aby se takový postup stal důkazem, je zapotřebí si ujasnit, že skutečně všechny korekce, tak jak jsou napsány, jsou skutečně s koeficienty jedna. Místo toho můžeme snáze dát dohromady formálnější důkaz matematickou indukcí přes počet k jevů, jejichž pravděpodobnosti sčítáme. Zkuste si průběžně porovnávat oba postupy, mělo by to vést k vyjasnění, co to znamená „dokázat“ a co „porozumět“.

DŮKAZ. Pro $k = 1$ tvrzení zjevně platí a předpokládejme, že platí pro všechny počty množin menší než pevně zvolené $k > 1$. Nyní si uvědomme, že pro libovolné dva jevy platí $P(B) = P(B \cap A) + P(B \setminus A)$. Podobně

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(B \cap A).$$

Toto je ale tvrzení naší věty pro $k = 2$. Nyní můžeme pracovat v indukčním kroku na formuli s $k + 1$ jevy, když sjednocení k jevů bereme jako A ve formuli výše, zatímco zbývající hraje roli B :

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^{k+1} A_i) &= P((\cup_{i=1}^k A_i) \cup A_{k+1}) \\ &= \sum_{j=1}^k \left((-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}) \right) + P(A_{k+1}) \\ &\quad - P((A_1 \cup \dots \cup A_k) \cap A_{k+1}). \end{aligned}$$

To už připomíná formuli pro $k + 1$ sčítaných jevů, nicméně nám ve velké sumě chybějí všechny výrazy obsahující A_{k+1} a člen s pravděpodobností současného nastoupení všech jevů. Zato nám však přebývá poslední člen. Tento člen výrazu můžeme nahradit výrazem

$$-P((A_1 \cap A_{k+1}) \cup \dots \cup (A_k \cap A_{k+1}))$$

a pro tento výraz opět použít indukční předpoklad, tj. formuli ve větě. Zjevně tím právě přidáme všechny dosud chybějící členy. \square

1.32. Poznámka. Speciálním případem předchozí věty je situace, kdy všechny konečné podmnožiny základního prostoru jsou jevy a všechny elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost. Ve formuli z předchozí věty pak všechny pravděpodobnosti dávají právě počet prvků příslušných podmnožin, až na společný faktor $\frac{1}{n}$, kde n je počet prvků základního prostoru. Pak můžeme vyčíst následující tvrzení pro obecnou konečnou množinu M a její podmnožiny A_1, \dots, A_k . Budeme psát $|M|$ pro počet prvků množiny M , tj. pro *mohutnost* množiny M .

$$(1.22) \quad |M \setminus (\cup_{i=1}^k A_i)| = |M| + \sum_{j=1}^k \left((-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}| \right).$$

Skutečně, $|\cup_{i=1}^k A_i| + |M \setminus (\cup_{i=1}^k A_i)| = |M|$, tzn.

$$|M \setminus (\cup_{i=1}^k A_i)| = |M| - |\cup_{i=1}^k A_i|$$

a dosazením z naší věty dostáváme právě požadované tvrzení. Říká se mu *princip inkluze a exkluze*.

Uveďme si příklad, jak vypadá využití principu inkluze a exkluze:

5.

1.33. Nepořádná sekretářka. *Sekretářka má rozeslat pět dopisů pěti různým lidem. Dopisy pro různé adresáty vkládá do obálek s adresami náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden člověk dostane dopis určený pro něj?*

Řešení. Spočítejme pravděpodobnost jevu opačného, tedy toho, že ani jeden člověk neobdrží správný dopis. Stavový prostor všech možných jevů odpovídá všem možným pořadím pěti prvků (obálek). Označíme-li jak obálky tak dopisy čísly od jedné do pěti, tak všechny příznivé jevy (tedy žádný dopis nepříjde do obálky se stejným číslem) odpovídají takovým pořadím pěti prvků, kdy i -tý prvek není na i -tém místě ($i = 1, \dots, 5$), tzv. pořadím bez pevného bodu. Jejich počet spočítáme pomocí principu inkluze a exkluze. Označíme-li M_i množinu permutací s pevným bodem i (permutace v M_i ale mohou mít i jiné pevné body), tak výsledný počet d permutací bez pevného bodu je roven

$$d = 5! - |M_1 \cup \dots \cup M_5|$$

Počet prvků průniku $|M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_k}|$, $k = 1, \dots, 5$ je $(5-k)!$ (pořadí prvků i_1, \dots, i_k je pevně dáno, ostatních $5-k$ prvků řadíme libovolně). Podle principu inkluze a exkluze je

$$|M_1 \cup \dots \cup M_5| = \sum_{k=1}^5 (-1)^{k+1} \binom{5}{k} (5-k)!$$

a tedy pro hledaný počet d dostáváme vztah

$$\begin{aligned} d &= 5! - \sum_{k=1}^5 (-1)^{k+1} \binom{5}{k} (5-k)! \\ &= \sum_{k=0}^5 (-1)^k \binom{5}{k} (5-k)! = 5! \sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost toho, že žádný člověk neobdrží „svůj“ dopis je tedy

$$\sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k}{k!}$$

a hledaná pravděpodobnost pak

$$1 - \sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{19}{30}.$$

□

Extreme games Z Těšína vyjíždí vlaky co půl hodinu (směrem na Bohumín) a z tohoto směru přijíždějí také každé půl hodiny. Předpokládejme, že vlaky se mezi těmito dvěma stanicemi pohybují rovnoměrnou rychlostí 90km/h a jsou dlouhé 100metrů, cesta trvá 30min. Hazardér Jarda si vybere jeden z těchto vlaků a během cesty z Těšína do Bohumína náhodně vystrčí hlavu z okna na pět vteřin nad kolejíště pro protější směr. Jaká je pravděpodobnost, že mu bude uražena? (předpokládáme, že jiné než zmíněné vlaky na trati nejezdí)

Řešení. Vzájemná rychlost protijedoucích vlaků je 50m/s, protijedoucí vlak mine Jardovo okno za dvě sekundy. Každý vlak potká na cestě mezi Těšínem a Bohumínem právě jeden protijedoucí vlak. V průběhu cesty je tedy sedmisekundový interval, ve kterém nesmí Jarda vyklonit hlavu z okna (pokud o ni nechce přijít). Pravděpodobnost uražení hlavy je tedy 7/1800. □

1.34. Věže na šachovnici. *Kolika způsoby lze rozestavit n shodných věží na šachovnici $n \times n$ tak, aby bylo každé neobsazené pole ohrožováno některou z věží?*

Řešení. Daná rozestavení jsou sjednocením dvou množin: množiny rozestavení, kdy je alespoň v jednom řádku jedna věž (tedy v každém řádku právě jedna; tato množina má n^n prvků – v každém řádku vybereme nezávisle jedno pole pro věž) a množiny rozestavení, kdy je v každém sloupci alespoň (tedy právě) jedna věž (stejnou úvahou jako u první množiny má tato množina rovněž n^n prvků). Průnik těchto množin pak má $n!$ prvků (místa pro věže vybíráme postupně od prvního řádku – tam máme n možností, ve druhém pak již pouze $n - 1$ možností – jeden sloupec je již obsazen, ...). Podle principu inkluze a exkluze je počet hledaných rozestavení:

$$2n^n - n!.$$

□

1.35. Nezávislé jevy. Uvažme libovolný pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) a v něm nějaké jevy A_1, \dots, A_k . Řekneme, že tyto jevy jsou *stochasticky nezávislé* (vzhledem k pravděpodobnosti P), jestliže pro libovolné z nich vybrané jevy $A_{i_1}, \dots, A_{i_\ell}$, $1 \leq \ell \leq k$ platí

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_\ell}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_\ell}).$$

Zjevně je každý podsystem stochasticky nezávislých jevů opět stochasticky nezávislý. Dále si pro dva stochasticky nezávislé jevy A, B spočítáme

$$P(A \cap B^c) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c).$$

Odtud už snadno dovodíme, že záměnou jednoho nebo více stochasticky nezávislých jevů za jejich opačné jevy obdržíme opět stochasticky nezávislé jevy.

Často se hledá pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden ze stochasticky nezávislých jevů, tzn. hledáme $P(A_1 \cup \dots \cup A_k)$. Můžeme pak použít elementární vlastnosti množinových operací, tzv. de Morganova pravidla,

$$A_1 \cup \dots \cup A_k = (A_1^c \cap \dots \cap A_k^c)^c$$

a dostáváme:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_k) = 1 - P(A_1^c \cap \dots \cap A_k^c) = 1 - (1 - P(A_1)) \dots (1 - P(A_k)).$$

1.36. Podmíněná pravděpodobnost. Obvyklé je také klást dotazy s dodatečnou podmínkou. Např. „jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě pětky, je-li součet hodnot deset?“. Formalizovat takové potřeby umíme následovně.

Nechť H je jev s nenulovou pravděpodobností v jevovém poli \mathcal{A} v pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) . *Podmíněná pravděpodobnost* $P(A|H)$ jevu $A \in \mathcal{A}$ vzhledem k hypotéze H je definována vztahem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Jak je vidět přímo z definice, hypotéza H a jev A jsou nezávislé tehdy a jen tehdy, je-li $P(A) = P(A|H)$. Přímou z definice také vyplývá tzv. „věta o násobení pravděpodobností“ pro jevy A_1, \dots, A_k splňující $P(A_1 \cap \dots \cap A_k) > 0$:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}).$$

Skutečně, dle předpokladu jsou i pravděpodobnosti všech průniků, které jsou brány ve výrazu za hypotézy, nenulové. Pokrácením čitatele a jmenovatele získáme i napravo právě pravděpodobnost jevu odpovídajícího průniku všech uvažovaných jevů.

1.37. Opět házení kostkou. *Jaká je pravděpodobnost toho, že při hodu dvěma kostkami padne součet 7, víme-li, že ani na jedné z kostek nepadlo číslo 2.*

Řešení. Označme jev, že ani na jedné kostce nepadne dvojka jako B , jev „padne součet 7“ jako A . Množinu všech možných výsledků budeme značit opět jako Ω . Pak

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Číslo 7 může padnout čtyřmi různými způsoby, pokud nepadne dvojka, tedy $|A \cap B| = 4$, $|B| = 5 \cdot 5 = 25$, tedy

$$P(A|B) = \frac{4}{25}.$$

Všimněme si, že $P(A) = \frac{1}{6}$, tedy jevy A a B nejsou stochasticky nezávislé. \square

1.38. Geometrická pravděpodobnost. V praktických problémech se často setkáváme s daleko složitějšími modely, kde základní prostor není konečnou množinou. Nemáme momentálně k dispozici ani základní nástroje pro dostatečné zobecnění pojmu pravděpodobnosti, nicméně můžeme uvést alespoň jednoduchou ilustraci.

Uvažme rovinu \mathbb{R}^2 dvojic reálných čísel a v ní podmnožinu Ω se známým obsahem $\text{vol } \Omega$ (symbol „vol“ od anglického „volume“, tj. obsah/objem). Příkladem může sloužit třeba jednotkový čtverec. Náhodné jevy budou reprezentovány podmnožinami $A \subset \Omega$ za jevové pole \mathcal{A} bereme systém podmnožin, u kterých umíme určit jejich obsah. Třeba všechna konečná sjednocení trojúhelníků. Nastoupení nebo

nenastoupení jevu je dáno výběrem bodu v Ω , kterým se trefíme nebo netrefíme do množiny reprezentující jev A .

Podobně jako u klasické pravděpodobnosti pak definujeme pravděpodobnostní funkci $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem

$$P(A) = \frac{\text{vol } A}{\text{vol } \Omega}.$$

Uvažme jako příklad problém, kdy náhodně vyberem dvě hodnoty $a < b$ v intervalu $(0, 1) \subset \mathbb{R}$. Všechny hodnoty a i b jsou stejně pravděpodobné a otázka zní „jaká je pravděpodobnost, že interval (a, b) bude mít velikost alespoň jedna polovina?“.

Odpověď je docela jednoduchá: volba čísel a, b je volbou libovolného bodu (a, b) ve vnitřku trojúhelníku Ω s hraničními vrcholy $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 1]$ (načrtněte si obrázek!). Potřebujeme znát plochu podmnožiny, která odpovídá bodům s $b > a + \frac{1}{2}$, tj. vnitřku trojúhelníku A ohraničeného vrcholy $[0, \frac{1}{2}]$, $[0, 1]$, $[\frac{1}{2}, 1]$. Evidentně dostáváme $P(A) = \frac{1}{4}$. Zkuste si samostatně odpovědět na otázku „pro jakou požadovanou minimální délku intervalu (a, b) dostaneme pravděpodobnost jedna polovina?“.

Jednou z účinných výpočetních metod přibližných hodnot je naopak simulace známé takovéto pravděpodobnosti pomocí relativní četnosti nastoupení vhodně zvoleného jevu. Např. známá formule pro obsah kruhu o daném poloměru říká, že obsah jednotkového kruhu je roven právě konstantě $\pi = 3,1415\dots$, která vyjadřuje poměr obsahu a čtverce poloměru. Pokud zvolíme za Ω jednotkový čtverec a za A průnik Ω a jednotkového kruhu se středem v počátku, pak $\text{vol } A = \frac{1}{4}\pi$. Máme-li tedy spolehlivý generátor náhodných čísel mezi nulou a jedničkou a počítáme relativní četnosti, jak často bude vzdálenost vygenerované dvojice (a, b) menší než jedna, tj. $\sqrt{a^2 + b^2} < 1$, pak výsledek bude při velkém počtu pokusů s velkou jistotou dobře aproximovat číslo $\frac{1}{4}\pi$. Numerickým postupům založeným na tomto principu se říká *metody Monte Carlo*.

Obdobné úlohy na geometrickou pravděpodobnost lze bezesbytku formulovat v \mathbb{R}^3 a obecněji. Uvedme ale ještě raději jednoduchý příklad v rovině:

1.39. Sekání tyče. *Dvoumetrová tyč je náhodně rozdělena na tři díly. Určete pravděpodobnost, že alespoň jeden díl bude nejvýše 20 cm dlouhý.*

Řešení. Náhodné rozdělení tyče na tři díly interpretujeme jako náhodný výběr dvou bodů řezu. Pravděpodobnostní prostor je tedy čtverec o straně 2 m. Umístíme-li čtverec C tak, aby dvě jeho strany ležely na kartézských osách v rovině, tak podmínka, že alespoň jeden díl má být nejvýše 20 cm dlouhý nám vymezuje ve čtverci následující oblast O :

$$O = \{(x, y) \in C \mid (x \leq 20) \vee (x \geq 180) \vee (y \leq 20) \vee (y \geq 180) \vee (|x - y| \leq 20)\}.$$

Jak snadno nahlédneme, zaujímá takto vymezená oblast O $\frac{51}{100}$ obsahu čtverce. \square

5. Geometrie v rovině

Na konci minulé kapitoly jsme intuitivně používali elementární pojmy z geometrie reálné roviny. Budeme teď podrobněji zkoumat jak se vypořádávat s potřebou popisovat „polohu v rovině“, resp. dávat do souvislostí polohy různých bodů roviny.

1.23

1.40. Afinní rovina a vektorový prostor \mathbb{R}^2 . Zkusme si množinu $A = \mathbb{R}^2$ představit z pohledu pozorovatele, který sedí v některém pevně zvoleném místě (můžeme mu říkat třeba bod $O = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$). Předpokládejme, že ji vnímá jako nekonečnou desku bez jakýchkoliv zvolených měřítek a popisů a ví, co to znamená posunout se v libovolném násobku nějakého směru. Časem takové rovině budeme říkat „afinní rovina“. Aby mohl vidět kolem sebe „dvojice reálných čísel“, musí si vybrat nějaký bod E_1 , kterému řekne „bod $[1, 0]$ “ a jiný bod E_2 , kterému začne říkat „bod $[0, 1]$ “. Do všech ostatních se pak dostane tak, že poskočí „ a -krát ve směru $[1, 0]$ “, pak „ b -krát ve směru $[0, 1]$ “ a takovému bodu bude říkat „bod $[a, b]$ “. Pokud to bude dělat obvyklým způsobem, nebude výsledek záviset na pořadí, tzn. může také napřed jít b -krát ve směru $[0, 1]$ a pak teprve v tom druhém.

To, co jsme popsali, se nazývá volba (*afinního*) *souřadného systému v rovině*, bod O je jeho *počátkem*, posunutí $E_1 - O$ ztotožňujeme s dvojicí $[1, 0]$, podobně u E_2 a obecně každý bod P roviny je ztotožněn s dvojicí čísel $[a, b] = P - O$.

Všimněme si, že zároveň volbou pevného počátku O jsou ztotožněny jednotlivé body P roviny se směry posuvu $v = P - O$ a že všechny takové posuvy umíme skládat (budeme říkat „sčítat“) a také jednotlivé směry násobit v poměru každého reálného čísla (budeme říkat „násobit skalárem“). Takovéto operace sčítání a násobení splňují hodně vlastností skalárů, viz 1.1 a 1.2, zkuste si promyslet které. Uvidíme brzy, že se jedná o standární příklad (dvourozměrného reálného) vektorového prostoru. Budeme proto už teď místo o směrech posuvu mluvit o *vektorech* a od bodů je budeme rozlišovat tím, že budou dány dvojicemi souřadnic v kulatých závorkách místo hranatých.

1.24

1.41. Přímky v rovině. Když se náš pozorovatel umí posouvat o libovolný násobek pevného vektoru, pak také ví, co je to *přímka*. Je to podmnožina $p \subset A$ v rovině taková, že existují bod O a vektor v takové, že

$$p = \{P \in A; P - O = t \cdot v, t \in \mathbb{R}\}.$$

Popišme si $P = P(t) \in p$ ve zvolených souřadnicích s volbou $v = (\alpha, \beta)$:

$$x(t) = x_0 + \alpha \cdot t, \quad y(t) = y_0 + \beta \cdot t.$$

Jednoduchým výpočtem dostaneme (vyloučíme t z parametrického vyjádření pro x a y , když pro určitost předpokládáme, že třeba $\alpha \neq 0$)

$$-\beta x + \alpha y + (\beta x_0 - \alpha y_0) = 0.$$

To je obecná rovnice přímky

e1.12

$$(1.23) \quad ax + by = c,$$

se známým vztahem dvojice čísel (a, b) a vektoru $v = (\alpha, \beta)$

e1.13

$$(1.24) \quad a\alpha + b\beta = 0.$$

Výraz nalevo v rovnici přímky (1.23) můžeme vidět jako skalární funkci F závislou na bodech v rovině a s hodnotami v \mathbb{R} , samu rovnici pak jako požadavek na její hodnotu. Časem uvidíme, že vektor (a, b) je v tomto případě právě směrem, ve kterém F nejrychleji roste. Proto bude směr kolmý na (a, b) právě tím směrem, ve kterém zůstává naše funkce F konstantní. Konstanta c pak určuje, pro které body bude tato konstanta nula.

Mějme dvě přímky p a q a ptejme se po jejich průniku $p \cap q$. Ten bude popsán jako bod, splňující obě rovnice přímek naráz. Pišme je takto

$$\boxed{\text{e1.14}} \quad (1.25) \quad \begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s. \end{aligned}$$

Opět můžeme levou stranu vnímat jako přiřazení, které každé dvojici souřadnic $[x(P), y(P)]$ bodů v rovině přiřadí vektor hodnot dvou skalárních funkcí F_1 a F_2 daných levými stranami jednotlivých rovnic (1.25). Můžeme tedy naše rovnice napsat jako jediný vztah $F(v) = w$, kde F je přiřazení, které vektor v popisující polohu obecného bodu v rovině (v našich souřadnicích) zobrazí na vektor zadaný levou stranou rovnic, a požadujeme, aby se toto zobrazení strefilo do předem zadaného vektoru $w = (r, s)$.

1.25

1.42. Lineární zobrazení a matice. Přiřazení F , se kterým jsme pracovali při popisu průniku přímek, zjevně respektuje operace sčítání a násobení s vektory a skaláry:

$$F(a \cdot v + b \cdot w) = a \cdot F(v) + b \cdot F(w)$$

pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{R}^2$. Říkáme, že F je *lineární zobrazení* z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 , a píšeme $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Obdobně, v rovnici 1.23 pro přímku šlo o lineární zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a jeho předepsanou hodnotu c .

Stručně budeme zapisovat taková zobrazení pomocí *matic* a jejich násobení, které definujeme takto:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Podobně, můžeme místo vektoru v zprava násobit jinou maticí B stejného rozměru jako je A . Prostě aplikujeme předchozí formule po jednotlivých sloupcích matice B a obrdříme jako výsledek opět matice. Snadno ověříme tzv. asociativitu násobení (zkuste propočítat!):

$$(A \cdot B) \cdot v = A \cdot (B \cdot v).$$

Stejně snadno je vidět i distributivita $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, neplatí však komutativita a existují „dělitelé nuly“. Např.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Body v rovině jsou tedy obecně vzory hodnot lineárních zobrazení F roviny do roviny, přímky jsou obecně vzory hodnot lineárních zobrazení z roviny do reálné přímky \mathbb{R} . Samozřejmě, ve zvláštních situacích tomu tak být nemusí. Tak třeba průnikem dvou stejných přímek je opět sama přímka (a vzorem vhodné hodnoty pro takové lineární zobrazení bude celá přímka), nulové zobrazení má za vzor nuly celou rovinu. V prvním případě to poznáme pomocí vztahu

$$\boxed{\text{e1.15}} \quad (1.26) \quad ad - bc = 0$$

tj. vyjádření, kdy jsou nalevo v rovnicích (1.25) stejné výrazy až na skalární násobek. V takovém případě buď nebude v průniku žádný bod (rovnoběžné různé přímky) nebo tam budou všechny body přímky (stejně přímky). Ověřte!

Výrazu nalevo v (1.26) říkáme *determinant* matice A a píšeme pro něj $\det A = ad - bc$, případně

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Jestliže k výsledku lineárního zobrazení ještě dovolíme přičíst pevný vektor $T = (x(T), y(T))$, tj. naše zobrazení bude

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot v + T = \begin{pmatrix} ax + by + x(T) \\ cx + dy + y(T) \end{pmatrix},$$

máme popsána právě všechna tzv. *afinní zobrazení roviny* do sebe. Známými příklady jsou všechny afinní podobnosti. Lineární zobrazení pak odpovídají těm afinním zobrazením, které zachovávají pevný bod O .

Co se stane, když náš pozorovatel z odstavce 1.40 bude tutéž rovinu shlížet z jiného bodu nebo si aspoň vybere jiné body E_1, E_2 ? Zkuste si promyslet, že na úrovni souřadnic to bude právě změna realizovaná pomocí afinního zobrazení. Časem budeme vidět obecné důvody, proč tomu tak je ve všech dimenzích.

1.26

1.43. Euklidovská rovina. Přidejme nyní schopnost našeho pozorovatele vidět vzdálenosti. Okamžitě pak můžeme definovat pojmy jako jsou úhel a otočení v rovině.

Jednoduše si to můžeme představit takto: rozhodne se o nějakých bodech E_1 a E_2 , že jsou od něj ve vzdálenosti jedna, a zároveň si řekne, že jsou na sebe kolmé. Vzdálenosti ve směrech souřadných os pak jsou dány příslušným poměrem, obecně používá Euklidovu větu. Odtud vyjde známý vzorec pro velikost vektoru $v = (a, b)$

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Jiný možný postup by byl, kdyby pozorovatel vyšel z pojmu vzdálenost (a věděl co znamená „kolmý“ třeba díky Euklidově větě), zvolil první z vektorů velikosti jedna, zvolil si orientaci (třeba proti směru hodinových ručiček) a vybral jednotkový kolmý směr (jednoznačně určí z požadavku platnosti Euklidovy věty třeba pomocí pravoúhlého trojúhelníku se stranami o velikostech 3, 4 a 5).

Úhel φ dvou vektorů v, w v rovině pak zpravidla popisujeme s využitím tzv. goniometrické funkce $\cos \varphi$. Používaný vzorec pro funkci \cos je dán hodnotou reálné první souřadnice jednotkového vektoru, jehož úhel s vektorem $(1, 0)$ je φ . Zjevně je pak druhá souřadnice takového vektoru dána reálnou hodnotou $0 \leq \sin \varphi \leq 1$ splňující $(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2 = 1$.

Obecně pak pro dva vektory v a w můžeme jejich úhel popsat pomocí souřadnic $v = (x(v), y(v))$, $w = (x(w), y(w))$ takto:

$$\cos \varphi = \frac{x(v) \cdot x(w) + y(v) \cdot y(w)}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Dobrym příkladem lineárního zobrazení, které zachovává velikosti, je rotace o předem daný úhel ψ . Je dáno formulí s maticí R_ψ :

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto R_\psi \cdot v = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Speciálně, aplikací na jednotkový vektor $(1, 0)$ dostáváme skutečně právě očekávaný výsledek $(\cos \psi, \sin \psi)$.

Pokud bychom chtěli zapsat rotaci kolem jiného bodu $P = O + w$, snadno napíšeme formuli pomocí translací:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = v &\mapsto v - w \mapsto R_\psi \cdot (v - w) \\ &\mapsto R_\psi \cdot (v - w) + w = \begin{pmatrix} \cos \psi (x - x(w)) - \sin \psi (y - y(w)) + x(w) \\ \sin \psi (x - x(w)) + \cos \psi (y - y(w)) + y(w) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalším příkladem je tzv. *zrcadlení vzhledem k přímce*. Opět nám bude stačit popsat zrcadlení vzhledem k přímkám procházejícím počátkem O a ostatní se z nich odvodí pomocí translací. Hledejme tedy matici Z_ψ zrcadlení vzhledem k přímce s jednotkovým směrovým vektorem v svírajícím úhel ψ s vektorem $(1, 0)$. Např.

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a obecně můžeme psát (otočíme do „nulové“ polohy, odzrcadlíme a vrátíme zpět)

$$Z_\psi = R_\psi \cdot Z_0 \cdot R_{-\psi}.$$

Můžeme proto (díky asociativitě násobení matic) spočítat:

$$\begin{aligned} R_\psi &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \psi - \sin^2 \psi & 2 \sin \psi \cos \psi \\ 2 \sin \psi \cos \psi & -(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Povšimněme si také, že

$$Z_\psi \cdot Z_0 = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & -\sin 2\psi \\ \sin 2\psi & \cos 2\psi \end{pmatrix}.$$

To lze zformulovat jako

Tvrzení. *Otočení o úhel ψ obdržíme následným provedením dvou zrcadlení vzhledem ke směrům, které spolu svírají úhel $\frac{1}{2}\psi$.*

Pokud umíme odůvodnit předchozí tvrzení ryze geometrickou úvahou (zkuste), dokázali jsme právě standardní formule pro goniometrické funkce dvojnásobného úhlu.

Hlubší je následující rekapitulace předchozích úvah:

1.27 **1.44. Věta.** *Lineární zobrazení euklidovské roviny je složeno ze zrcadlení právě, když je dáno maticí R splňující*

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ab + cd = 0, \quad a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1.$$

To nastane právě, když toto zobrazení zachovává velikosti. Otočením je přitom právě tehdy, když je determinant matice R roven jedné, což odpovídá sudému počtu zrcadlení. Při lichém počtu zrcadlení je determinant roven -1 .

Promyslete si podrobněji úplný důkaz. Na tabuli vypadal jeho náznak takto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$$x^2 + y^2 = (ax+by)^2 + (cx+dy)^2 = (a^2+c^2)x^2 + (b^2+d^2)y^2 + 2(ab+cd)xy$$

$a \sim \cos \varphi$
 $c \sim \sin \varphi$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{rotace det} = 1$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{rcadlení det}$$

1.28

1.45. Obsah trojúhelníka. Závěrem našeho malého výletu do geometrie se zaměříme na pojem obsah. Trojúhelník je vymezen dvojicí vektorů v a w , které přiložené do počátku O zadají zbylé dva vrcholy. Chtěli bychom tedy najít formuli (skalární funkci vol), která dvěma vektorům přiřadí číslo rovné obsahu $\text{vol } \Delta(v, w)$ takto definovaného trojúhelníku $\Delta(v, w)$.

Ze zadání je vidět, že by mělo platit (nakreslete si a uvažujte plochu jako součin základny krát výšky podělené dvěma – výška součtu bude jistě součtem výšek...)

$$\begin{aligned} \text{vol } \Delta(v + v', w) &= \text{vol } \Delta(v, w) + \text{vol } \Delta(v', w) \\ \text{vol } \Delta(av, w) &= a \text{ vol } \Delta(v, w) \end{aligned}$$

a přidejme požadavek

$$\text{vol } \Delta(v, w) = -\text{vol } \Delta(w, v),$$

který odpovídá představě, že opatříme plochu znaménkem podle toho, v jakém pořadí bereme vektory.

Pokud vektory v a w napíšeme do sloupců matice A , pak

$$A = (v, w) \mapsto \det A$$

splňuje všechny tři naše požadavky. Kolik takových zobrazení ale může být? Každý vektor umíme vyjádřit pomocí dvou souřadných vektorů $v = (1, 0)$ a $w = (0, 1)$ a evidentně tedy každá možnost pro $\text{vol } \Delta$ je jednoznačně určena už vyčíslením na této jediné dvojici argumentů (v, w) . Jsou si tedy všechny možnosti rovny až na skalární násobek. Ten umíme určit požadavkem

$$\text{vol } \Delta((1, 0), (1, 0)) = \frac{1}{2},$$

tj. volíme *orientaci a měřítko*.

Vidíme tedy, že determinant zadává plochu rovnoběžnostěnu určeného sloupci matice A (a plocha trojúhelníku je tedy poloviční).

1.29

1.46. Viditelnost v rovině. Předchozí popis hodnot pro orientovaný objem nám dává do rukou elegantní nástroj pro určování viditelnosti orientovaných úseček. Orientovanou úsečkou rozumíme dva body v rovině \mathbb{R}^2 s určením pořadím. Můžeme

si ji představovat jako šipku od prvního k druhému bodu. Taková orientovaná úsečka nám rozděljuje rovinu na dvě poloroviny, řekněme jim „levou“ a „pravou“.

Jestliže uvažujeme obvyklou orientaci „proti směru hodinových ručiček“ pro hranici mnohoúhelníku, pak pozorovatel nalevo od orientované úsečky (tj. uvnitř takového mnohoúhelníku) tuto vidí a naopak pozorovatel napravo ji nevidí. Má tedy smysl ptát se, jestli je orientovaná úsečka $[A, B]$ v rovině viditelná z bodu C .

Spočtíme orientovanou plochu příslušného trojúhelníku zadaného vektory $A-C$ a $B-C$. Pokud jsme s bodem C nalevo od úsečky, pak při naší orientaci bude vektor $A-C$ dříve než ten druhý a proto výsledná plocha (tj. hodnota determinantu) bude kladná. To odpovídá situaci, kdy úsečku vidíme. Naopak, při opačné poloze bude výsledkem záporná hodnota determinantu a podle zjistíme, že úsečku nevidíme.

Uvedený jednoduchý postup je často využíván pro testování polohy při standardních úlohách v 2D grafice.

Závěrem této části si uvedme několik standardních příkladů:

1.47. Příklad. Je dána přímka

$$p : [2, 0] + t(3, 2).$$

Určete její obecnou rovnici a nalezněte průnik s přímkou

$$r : [-1, 2] + s(1, 3).$$

Řešení. $[-19/7, -22/7]$. □

1.48. Kolize úseček. Z bodu $[-2, 0]$ vyrazila v pravé poledne konstantní rychlostí 1ms^{-1} ve směru $(3, 2)$ úsečka délky 1. Rovněž v poledne vyrazila z bodu $[5, -2]$ druhá úsečka délky 1 ve směru $(-1, 1)$, ovšem dvojnásobnou rychlostí. Srazí se?

Řešení. Přímky, po kterých se pohybují dané úsečky, můžeme popsat parametrickým vyjádřením:

$$\begin{aligned} p & : [-2, 0] + r(3, 2) \\ q & : [5, -2] + s(-1, 1), \end{aligned}$$

Obecná rovnice přímky p je

$$2x - 3y + 4 = 0.$$

Dosazením parametrického vyjádření přímky q získáme průsečík $P = [1, 2]$.

Nyní se snažme zvolit jediný parametr t pro obě úsečky tak, aby nám odpovídající bod na přímkách p , resp. q , popisoval polohu počátku první, resp. druhé, úsečky v čase t . V čase 0 je první v bodě $[-2, 0]$, druhá v bodě $[5, -2]$. Za čas t sekund urazí první t jednotek délky ve směru $(3, 2)$ druhá pak $2t$ jednotek délky ve směru $(-1, 1)$. Odpovídající parametrizace jsou tedy

$$(1.27) \quad p : [-2, 0] + \frac{t}{\sqrt{13}}(3, 2)$$

$$(1.28) \quad q : [5, -2] + \sqrt{2}t(-1, 1),$$

$$(1.29)$$

Počátek první úsečky dorazí do bodu $[1, 2]$ v čase $t_1 = \sqrt{13}s$, počátek druhé úsečky v čase $t = 2\sqrt{2}s$, tedy více než o půl vteřiny dříve a tedy v době, kdy dorazí do průsečíku P počátek první úsečky, bude již druhá úsečka pryč a úsečky se tak nesrazí. □

1.49. Viditelnost stran trojúhelníka. Je dán trojúhelník s vrcholy $[5, 6]$, $[7, 8]$, $[5, 8]$. Určete, které jeho strany je vidět z bodu $[0, 1]$.

Řešení. Uspořádáme vrcholy v kladném smyslu, tedy proti směru hodinových ručiček: $[5, 6]$, $[7, 8]$, $[5, 8]$. Pomocí příslušných determinantů určíme, je-li bod $[0, 1]$ „nalevo“ či „napravo“ od jednotlivých stran trojúhelníka uvažovaných jako orientované úsečky,

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} < 0 \quad \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Z nulovosti posledního determinantu vidíme, že body $[0, 1]$, $[5, 6]$ a $[7, 8]$ leží na přímce, stranu $[5, 6][7, 8]$ tedy nevidíme. Stranu danou vrcholy $[5, 8]$ a $[7, 8]$ pak narozdíl od strany $[5, 6][5, 8]$ nevidíme. \square

1.50. Příklad. Určete, které strany čtyřúhelníka s vrcholy $[95, 99]$, $[130, 106]$, $[40, 60]$, $[130, 120]$ jsou viditelné z bodu $[2, 0]$.

Řešení. Nejprve je třeba určit strany čtyřúhelníka („správné“ pořadí vrcholů): $[95, 99][40, 60][130, 106][130, 120]$. Po spočítání příslušných determinantů (viz přednáška) zjistíme, že jsou vidět pouze strana $[40, 60][130, 106]$. \square

1.51. Příklad. Určete obsah čtyřúhelníka s vrcholy $[1, 0]$, $[11, 13]$, $[2, 5]$ a $[-2, -5]$.

Řešení. Rozdělíme na dva trojúhelníky a spočítáme pomocí vzorce z přednášky.

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 13 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = \frac{47}{2}.$$

\square

1.52. Příklad. Napište souřadnice vrcholů trojúhelníka, který vznikne otočením rovnostranného trojúhelníka jehož dva vrcholy jsou $[1, 1]$ a $[2, 3]$ (třetí pak v poloovině dané přímkou $[1, 1][2, 3]$ a bodem $[0, 0]$) o 60° v kladném smyslu kolem bodu $[0, 0]$.

Řešení. Třetí vrchol trojúhelníka dostaneme např. otočením o 60° jednoho z vrcholů kolem druhého (ve správném smyslu). $[-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \sqrt{3} - \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}]$, $[1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}, \sqrt{3} + \frac{3}{2}]$. \square

1.53. Příklad. Najděte matice A takové, že

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Námět na přemýšlení: jaké geometrické zobrazení v rovině zadává matice A^2 ?

Řešení. A^2 je matice rotace o 60° , takže

$$A = \pm \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

tedy matice rotace o 30° , resp. 210° . \square

K dalšímu procvičení nejen geometrických úvah mohou posloužit následující tři příklady:

1.54. Kružnice dělicí rovinu. *Na kolik maximálně částí dělí rovinu k kružnic?*

Řešení. Pro maximální počet p_k oblastí, na které dělí rovinu kružnice odvodíme rekurentní vzorec

$$p_{k+1} = p_k + 2k$$

$(k + 1)$. kružnice totiž protíná k předchozích maximálně v $2k$ průsečících (a tato situace skutečně může nastat). Navíc zřejmě $p_1 = 1$. Pro počet p_k tedy dostáváme

$$p_k = p_{k-1} + 2(k-1) = p_{k-2} + 2(k-2) + 2(k-1) = \dots = p_1 + \sum_{i=1}^{k-1} 2i = 2 + (k-1)k.$$

□

1.55. Rovnoběžníková rovnost. *Dokažme jako ilustraci našich nástrojů tzv. „rovnoběžníkovou rovnost“: Jsou-li $u, v \in \mathbb{R}^2$, pak:*

$$2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2.$$

Neboli součet druhých mocnin délek úhlopříček rovnoběžníka je roven dvojnásobku součtu druhých mocnin délek jeho stran.

Řešení. Obdržíme například rozepsáním obou stran do souřadnic: $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$. Pak

$$\begin{aligned} 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) &= 2(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2) \\ &= u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2 + u_1^2 - 2u_1v_1 + \\ &\quad v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2 \\ &= (u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 + (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 \\ &= \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 \end{aligned}$$

□

1.56. Konstrukce lichoúhelníka. *Sestrojte $(2n+1)$ -úhelník, jsou-li dány všechny středy jeho stran.*

Řešení. K řešení využijeme toho, že složením lichého počtu středových souměrností je opět středová souměrnost (viz domácí úloha) Označíme-li vrcholy hledaného $(2n + 1)$ -úhelníka po řadě $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ a středy stran (od středu A_1A_2) postupně $S_1, S_2, \dots, S_{2n+1}$, tak provedeme-li středové souměrnosti po řadě podle těchto středů, tak bod A_1 je zjevně pevným bodem výsledné středové symetrie, tedy jejím středem. K jeho nalezení tedy stačí provést uvedenou středovou souměrnost s libovolným bodem X roviny. Bod A_1 leží pak ve středu úsečky XX' , kde X' je obrazem bodu X ve zmíněné středové symetrii. Další vrcholy získáme zobrazováním bodu A_1 ve středových souměrnostech podle S_1, \dots, S_{2n+1} . □

6. Relace a zobrazení

V této závěrečné části úvodní motivační kapitoly se vrátíme k formálnímu popisu matematických struktur, budeme se je ale průběžně snažit ilustrovat na již známých příkladech. Zároveň můžeme tuto část brát jako cvičení ve formálním přístupu k objektům a konceptům matematiky.

1.30

1.57. Relace mezi množinami. *Binární relací* mezi množinami A a B rozumíme podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$. Často píšeme $a \simeq_R b$ pro vyjádření skutečnosti, že $(a, b) \in R$, tj. že body $a \in A$ a $b \in B$ jsou v relaci R . *Definičním oborem relace* je podmnožina

$$D \subset A, \quad D = \{a \in A; \exists b \in B, (a, b) \in R\}.$$

Podobně *oborem hodnot relace* je podmnožina

$$I \subset B, \quad I = \{b \in B; \exists a \in A, (a, b) \in R\}.$$

Speciálním případem relace mezi množinami je *zobrazení z množiny A do množiny B* . Je to případ, kdy pro každý prvek definičního oboru relace existuje právě jeden prvek z oboru hodnot, který je s ním v relaci. Nám známým případem zobrazení jsou všechny skalární funkce, kde oborem hodnot zobrazení je množina skalárů, třeba celých nebo reálných čísel. Pro zobrazení zpravidla používáme značení, které jsme také u skalárních funkcí zavedli. Píšeme

$$f : D \subset A \rightarrow I \subset B, f(a) = b$$

pro vyjádření skutečnosti, že (a, b) patří do relace, a říkáme, že b je hodnotou zobrazení f v bodě a . Dále říkáme, že f je

- zobrazení množiny A do množiny B , jestliže je $D = A$,
- zobrazení množiny A na množinu B , jestliže je $D = A$ a $I = B$, často také *surjektivní zobrazení*
- *injektivní zobrazení*, jestliže je $D = A$ a pro každé $b \in I$ existuje právě jeden vzor $a \in A$, $f(a) = b$.

Vyjádření zobrazení $f : A \rightarrow B$ jakožto relace

$$f \subset A \times B, \quad f = \{(a, f(a)); a \in A\}$$

známe také pod názvem *graf zobrazení f* .

1.31

1.58. Skládání relací a funkcí. U zobrazení je jasná koncepce, jak se skládají. Máme-li zobrazení $f : A \rightarrow B$ a $g : B \rightarrow C$, pak jejich *složení $g \circ f$* je definováno

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Ve značení používaném pro relace totéž můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} f &\subset A \times B, & f &= \{(a, f(a)); a \in A\} \\ g &\subset B \times C, & g &= \{(b, g(b)); b \in B\} \\ g \circ f &\subset A \times C, & g \circ f &= \{(a, g(f(a))); a \in A\}. \end{aligned}$$

Zcela obdobně definujeme *skládání relací*, v předchozích vztazích jen doplníme existenční kvantifikátory, tj. musíme uvažovat všechny „vzory“ a všechny „obrazy“. Uvažme relace $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$. Potom

$$S \circ R \subset A \times C, \quad S \circ R = \{(a, c); \exists b \in B, (a, b) \in R, (b, c) \in S\}.$$

Zvláštním případem relace je *identické zobrazení*

$$\text{id}_A = \{(a, a) \in A \times A; a \in A\}$$

na množině A . Je neutrální vzhledem ke skládání s každou relací s definičním oborem nebo oborem hodnot A .

Pro každou relaci $R \subset A \times B$ definujeme *inverzní relaci*

$$R^{-1} = \{(b, a); (a, b) \in R\} \subset B \times A.$$

Pozor, u zobrazení, je stejný pojem užíván ve specifitější situaci. Samozřejmě, že existuje pro každé zobrazení jeho inverzní relace, ta však nemusí být zobrazením. Zcela logicky proto hovoříme o existenci inverzního zobrazení, pokud každý prvek $b \in B$ je obrazem pro právě jeden vzor v A . V takovém případě je samozřejmě inverzní zobrazení právě inverzní relací.

Všimněme si, že složením zobrazení a jeho inverzního zobrazení (pokud obě existují) vždy vznikne identické zobrazení, u obecných relací tomu tak být nemusí.

1.32

1.59. Relace na množině. V případě $A = B$ hovoříme o relaci na množině A . Říkáme, že R je:

- *reflexivní*, pokud $\text{id}_A \subset R$ (tj. $(a, a) \in R$ pro všechny $a \in A$),
- *symetrická*, pokud $R^{-1} = R$ (tj. pokud $(a, b) \in R$, pak i $(b, a) \in R$),
- *antisymetrická*, pokud $R^{-1} \cap R \subset \text{id}_A$ (tj. pokud $(a, b) \in R$ a zároveň $(b, a) \in R$, pak $a = b$),
- *tranzitivní*, pokud $R \circ R \subset R$, tj. pokud z $(a, b) \in R$ a $(b, c) \in R$ vyplývá i $(a, c) \in R$.

Relace se nazývá *ekvivalence*, pokud je současně reflexivní, symetrická i tranzitivní. Relace se nazývá *uspořádání* jestliže je reflexivní, tranzitivní a antisymetrická.

Dobrym příkladem uspořádání je inkluze. Uvažme množinu 2^A všech podmnožin konečné množiny A (značení je speciálním případem obvyklé notace B^A pro množinu všech zobrazení $A \rightarrow B$) a na ní relací $X \subset Z$ danou vlastností „být podmnožinou“. Evidentně jsou splněny všechny tři vlastnosti pro uspořádání: skutečně, je-li $X \subset Y$ a zároveň $Y \subset X$ musí být nutně množiny X a Y stejné. Je-li $X \subset Y \subset Z$ je také $X \subset Z$ a také reflexivita je zřejmá.

Říkáme, že uspořádání je *úplné*, když pro každé dva prvky platí že jsou *srovnatelné*, tj. buď $a \leq b$ nebo $b \leq a$. Všimněme si, že ne všechny dvojice (X, Y) podmnožin v A jsou srovnatelné v tomto smyslu. Přesněji, pokud je v A více než jeden prvek, existují podmnožiny X a Y , kdy není ani $X \subset Y$ ani $Y \subset X$.

Připomeňme rekurentní definici přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, kde

$$0 = \emptyset, \quad n + 1 = \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Definujeme relaci $m < n$ právě, když $m \in n$. Evidentně jde o úplné uspořádání. Např. $2 \leq 4$, protože

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = 4.$$

Jinak řečeno, samotná rekurentní definice zadává vztah $n \leq n + 1$ a tranzitivně pak $n \leq k$ pro všechna k , která jsou tímto postupem definována později.

1.33

1.60. Rozklad podle ekvivalence. Každá ekvivalence R na množině A zadává zároveň *rozklad* množiny A na podmnožiny vzájemně ekvivalentních prvků, tzv. *třídy ekvivalence*. Klademe pro libovolné $a \in A$

$$R_a = \{b \in A; (a, b) \in R\}.$$

Často budeme psát pro R_a prostě $[a]$, je-li z kontextu zřejmé, o kterou ekvivalenci jde.

Zjevně $R_a = R_b$ právě, když $(a, b) \in R$ a každá taková podmnožina je tedy reprezentována kterýmkoliv svým prvkem, tzv. *reprezentantem*. Zároveň $R_a \cap R_b \neq$

\emptyset právě, když $R_a = R_b$, tj. třídy ekvivalence jsou po dvou disjunktní. Konečně, $A = \cup_{a \in A} R_a$, tj. celá množina A se skutečně rozloží na jednotlivé třídy.

Můžeme také třídám rozkladu rozumět tak, že třídu $[a]$ vnímáme jako prvek a „až na ekvivalenci“.

1.34

1.61. Příklad – konstrukce celých a racionálních čísel. Na přirozených číslech umíme sice sčítat a víme, že přičtením nuly se číslo nezmění. Umíme i definovat odečítání, při něm ale jen někdy existuje výsledek.

Základní ideou konstrukce celých čísel z přirozených je tedy přidat k nim chybějící rozdíly. To můžeme udělat tak, že místo výsledku odečítání budeme pracovat s uspořádanými dvojicemi čísel, které nám samozřejmě vždy výsledek dobře reprezentují. Zbývá jen dobře definovat, kdy jsou (z hlediska výsledku odečítání) takové dvojice ekvivalentní. Potřebný vztah tedy je:

$$(a, b) \sim (a', b') \iff a - b = a' - b' \iff a + b' = a' + b.$$

Všimněme si, že zatímco výrazy v prostřední rovnosti v přirozených číslech neumíme, výrazy v pravo už ano. Snadno ověříme, že skutečně jde o ekvivalenci a její třídy označíme jako celá čísla \mathbb{Z} . Na nich definujeme operaci sčítání (a s ní i odečítání) pomocí reprezentantů. Např.

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)],$$

což zjevně nezávisí na výběru reprezentantů. Lze si přitom vždy volit reprezentanty $(a, 0)$ pro kladná čísla a reprezentanty $(0, a)$ pro čísla záporná, se kterými se nám bude patrně počítat nejlépe.

Tento jednoduchý příklad ukazuje, jak důležité je umět nahlížet na třídy ekvivalence jako na celistvý objekt a soustředit se na vlastnosti těchto objektů, nikoliv formální popisy jejich konstrukcí. Ty jsou však důležité k ověření, že takové objekty vůbec existují.

U celých čísel nám už platí všechny vlastnosti skalárů (KG1)–(KG4) a (O1)–(O4), viz 1.1 a 1.2. Pro násobení je neutrálním prvkem jednička, ale pro všechna čísla a různá od nuly a jedničky neumíme najít číslo a^{-1} s vlastností $a \cdot a^{-1} = 1$, tzn. chybí nám inverzní prvky. Zároveň si povšimněte, že platí vlastnost oboru integrity (OI), viz 1.2, tzn. je-li součin dvou čísel nulový, musí být alespoň jedno z nich nula.

Díky poslední jmenované vlastnosti můžeme zkonstruovat racionální čísla \mathbb{Q} přidáním všech chybějících inverzí zcela obdobným způsobem, jak jsme konstruovali \mathbb{Z} z \mathbb{N} . Na množině uspořádaných dvojic (p, q) , $q \neq 0$, celých čísel definujeme relaci \sim tak, jak očekáváme, že se mají chovat podíly p/q :

$$(p, q) \sim (p', q') \iff p/q = p'/q' \iff p \cdot q' = p' \cdot q.$$

Opět neumíme očekávané chování v prostřední rovnosti v množině \mathbb{Z} formulovat, nicméně rovnost na pravé straně ano. Zjevně jde o dobře definovanou relaci ekvivalence (ověřte podrobnosti!) a racionální čísla jsou pak její třídy ekvivalence. Když budeme formálně psát p/q místo dvojic (p, q) , budeme definovat operace násobení a sčítání právě pomocí formulí, které nám jsou jistě dobře známy.

1.62. Příklad – zbytkové třídy. Jiným dobrým a jednoduchým příkladem jsou tzv. zbytkové třídy celých čísel. Pro pevně zvolené přirozené číslo k definujeme ekvivalenci \sim_k tak, že dvě čísla $a, b \in \mathbb{Z}$ jsou ekvivalentní, jestliže jejich zbytek po dělení číslem k je stejný. Výslednou množinu tříd ekvivalence označujeme \mathbb{Z}_k .

Nejjednodušší je tato procedura pro $k = 2$. To dostáváme $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, kde nula reprezentuje sudá čísla, zatímco jednička čísla lichá. Opět lze snadno zjistit, že pomocí reprezentantů můžeme definovat násobení a sčítání. Zkuste si ověřit, že výsledná množina „skalárů“ je komutativním tělesem (tj. splňuje i vlastnost (P) z 1.2) právě když je k prvočíslo.

Závěrem si ještě procvičme spolu s relacemi ještě i kombinatoriku:

1.63. Ekvivalence ano či ne. *Rozhodněte, zda následující relace na množině M jsou relace ekvivalence:*

- (1) $M = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, $(f \sim g) \iff f(0) = g(0)$.
- (2) $M = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, $(f \sim g) \iff f(0) = g(1)$.
- (3) M je množina přímek v rovině, dvě přímky jsou v relaci, jestliže se neprotínají.
- (4) M je množina přímek v rovině, dvě přímky jsou v relaci, jestliže jsou rovnoběžné.
- (5) $M = \mathbb{N}$, $(m \sim n) \iff S(m) + S(n) = 20$, kde $S(n)$ značí ciferný součet čísla n .

Řešení.

- (1) Ano. Ověříme tři vlastnosti ekvivalence:
 - i) Reflexivita: pro libovolnou reálnou funkci f je $f(0) = f(0)$.
 - ii) Symetrie: jestliže platí $f(0) = g(0)$, pak i $g(0) = f(0)$.
 - iii) Tranzitivita: jestliže platí $f(0) = g(0)$ a $g(0) = h(0)$, pak platí i $f(0) = h(0)$.
- (2) Ne. Definovaná relace není reflexivní, např. pro funkci \sin máme $\sin(0) \neq \sin(1)$
- (3) Ne. Relace opět není reflexivní (každá přímka protíná sama sebe)
- (4) Ano. Třídy ekvivalence pak tvoří množinu neorientovaných směrů v rovině.
- (5) Ne. Relace není reflexivní. $S(1) + S(1) = 2$.

□

1.64. Počet injektivních zobrazení mezi množinami. *Určete počet injektivních zobrazení množiny $\{1, 2, 3\}$ do množiny $\{1, 2, 3, 4\}$*

Řešení. Libovolné injektivní zobrazení mezi uvažovanými množinami je dáno výběrem (uspořádané) trojice z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ (prvky ve vybrané trojici budou po řadě obrazy čísel 1, 2, 3) a obráceně každé injektivní zobrazení nám zadává takovou trojici. Je tedy hledaných injektivních zobrazení stejně jako možností výběru uspořádaných trojic ze čtyř prvků, tedy $v(3, 4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. □

1.65. Počet surjektivních zobrazení mezi danými množinami. *Určete počet surjektivních zobrazení množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ na množinu $\{1, 2, 3\}$*

Řešení. Počet zjistíme obecným principem „inkluze a exkluze“. Od počtu všech zobrazení odečteme ta, která nejsou surjektivní, t.j. ta, jejichž obor hodnot je buď jednoprvkovou nebo dvouprvkovou množinou. Všech zobrazení je $V(3, 4) = 3^4$, zobrazení, jejichž oborem hodnot je jednoprvková množina, jsou tři. Počet zobrazení jejichž oborem hodnot je dvouprvková množina je $\binom{3}{2}(2^4 - 2)$ ($\binom{3}{2}$ způsoby můžeme vybrat definiční obor a máme-li již dva prvky fixovány, máme $2^4 - 2$ možností, jak na ně zobrazit čtyři prvky). Celkem je tedy počet hledaných surjektivních zobrazení

$$(1.30) \quad 3^4 - \binom{3}{2}(2^4 - 2) - 3 = 36.$$

□

1.66. Počet relací ekvivalence na množině. Určete počet relací ekvivalence na množině $\{1, 2, 3, 4\}$.

Řešení. Ekvivalence můžeme počítat podle toho, kolik prvků mají jejich třídy rozkladu. Pro počty prvků tříd rozkladu ekvivalencí na čtyřprvkové množině jsou tyto možnosti:

Počty prvků ve třídách rozkladu	počet ekvivalencí daného typu
1,1,1,1	1
2,1,1	$\binom{4}{2}$
2,2	$\frac{1}{2} \binom{4}{2}$
3,1	$\binom{4}{1}$
4	1

Celkem tedy máme 15 různých ekvivalencí. □

Závěrem ještě jeden příklad ukazující, že „divné“ skaláry se chovají divně:

1.67. Nenulový mnohočlen s nulovými hodnotami. Najděte nenulový mnohočlen s koeficienty v \mathbb{Z}_7 , tj. výraz typu $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{Z}_7$, $a_n \neq 0$, takový, že na množině \mathbb{Z}_7 nabývá pouze nulových hodnot (tj. dosadíme-li za x libovolný z prvků \mathbb{Z}_7 a výraz v \mathbb{Z}_7 vyčíslíme, dostaneme vždy nulu).

Řešení. Při konstrukci tohoto mnohočlenu se opřeme o Malou Fermatovu větu, která říká, že pro libovolné prvočíslo p a číslo a s ním nesoudělné platí:

$$(1.31) \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Hledaný polynom je tedy například polynom $x^7 - x$ (polynom $x^6 - 1$ by neměl nulovou hodnotu v čísle 0). □

Elementární lineární algebra

*neumíte ještě počítat se skaláry?
– zkuste to rovnou s maticemi...*

1. Vektory a matice

2.1

2.1. Vektory nad skaláry. Symbolem \mathbb{K} budeme nadále značit nějakou množinu skalárů. Prozatím budeme *vektorem* rozumět uspořádanou n -tici skalárů, kde pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$ budeme nazývat *dimenzí*. Sčítání vektorů definujeme po složkách (skaláry samozřejmě sčítat umíme) a násobení vektoru $u = (a_1, \dots, a_n)$ skalárem b definujeme tak, že každý prvek n -tice u vynásobíme skalárem b (skaláry v \mathbb{K} násobit umíme), tj.

$$u + v = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$b \cdot u = b \cdot (a_1, \dots, a_n) = (b \cdot a_1, \dots, b \cdot a_n).$$

Zpravidla požadujeme, aby skaláry byly z nějakého pole¹, viz 1.1.

Pro sčítání vektorů v \mathbb{K}^n zjevně platí (KG1)–(KG4) s nulovým prvkem

$$0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n.$$

Schválně zde používáme pro nulový prvek stejný symbol jako pro nulový prvek skalárů. Podobně budeme pro sčítání a násobení používat stále stejný symbol (plus a buď tečku nebo prosté zřetězení znaků). Navíc nebudeme používat pro vektory žádné speciální značení, a ponecháváme na čtenáři aby udržoval svoji pozornost přemýšlením o kontextu. Pro skaláry ale spíše budeme používat písmena ze začátku abecedy a pro vektory od konce (prostředek nám zůstane na indexy proměných, komponent a v součtech).

Pro všechny vektory $v, w \in \mathbb{K}^n$ a skaláry $a, b \in \mathbb{K}$ platí

$$(V1) \quad a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$$

$$(V2) \quad (a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$$

$$(V3) \quad a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$$

$$(V4) \quad 1 \cdot v = v$$

Pro kterékoliv pole skalárů \mathbb{K} se snadno ověří právě sformulované vlastnosti (V1)–(V4) pro \mathbb{K}^n , protože při ověřování vždy používáme pouze vlastnosti skalárů uvedené v 1.1 a 1.2. Budeme takto pracovat např. s \mathbb{R}^n , \mathbb{Q}^n , \mathbb{C}^n , $(\mathbb{Z}_k)^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

¹Čtenář, který se ještě nesmířil s abstrakcí okruhů a polí, nechť přemýšlí v rámci číselných oborů. Potom okruhy skalárů zahrnují i celá čísla \mathbb{Z} a všechny zbytkové třídy, zatímco mezi poli jsou pouze \mathbb{R} , \mathbb{Q} , \mathbb{C} a zbytkové třídy \mathbb{Z}_k s prvočíselným k .

Všimněme si také, že k ověření vlastností (V1)–(V4) potřebujeme pro použití skaláry pouze vlastnosti okruhu. Vlastnost (P) však bude přesto podstatná později.

2.2

2.2. Matice nad skaláry. Maticí typu m/n nad skaláry \mathbb{K} rozumíme obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pro všechny $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Matici A s prvky a_{ij} značíme také $A = (a_{ij})$.

Vektory $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$ nazýváme (i -té) *řádky matice* A , $i = 1, \dots, m$, vektory $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$ nazýváme (j -té) *sloupce matice* A , $j = 1, \dots, n$.

Matici můžeme také chápat jako zobrazení $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K}$. Matice typu $1/n$ nebo $n/1$ jsou vlastně právě vektory v \mathbb{K}^n . I obecné matice lze však chápat jako vektory v $\mathbb{K}^{m \cdot n}$, prostě zapomeneme na řádkování. Zejména tedy je definováno sčítání matic a násobení matic skaláry:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),$$

kde $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$,

$$a \cdot A = (a \cdot a_{ij}),$$

kde $A = (a_{ij})$, $a \in \mathbb{K}$. Dále pak matice

$$-A = (-a_{ij})$$

se nazývá *matice opačná* k matici A a matice

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

se nazývá *nulová matice*. Zapomenutím řádkování tak získáme následující tvrzení:

Tvrzení. *Předpisy pro $A + B$, $a \cdot A$, $-A$, 0 zadávají na množině všech matic typu m/n operace sčítání a násobení skaláry splňující axiomy (V1)–(V4).*

2.3

2.3. Příklad. Matice lze vhodně využít pro zápis lineárních rovnic. Uvažme následující systém m rovnic v n proměnných:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m. \end{aligned}$$

Posloupnost x_1, \dots, x_n lze chápat jako vektor proměnných, tj. sloupec v matici typu $n/1$, a podobně s hodnotami y_1, \dots, y_n . Systém rovnic lze pak formálně psát ve tvaru $A \cdot x = y$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Původní rovnice nyní obdržíme tak, že vždy bereme řádky z A a sčítáme součiny odpovídajících komponent, tj. $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$. Tím získáme i -tý prvek výsledného vektoru.

V rovině, tj. pro vektory dimenze 2, jsme už zavedli takovýto počet a viděli jsme, že s ním lze pracovat velice efektivně (viz 1.42). Nyní budeme postupovat obecněji a zavedeme i na maticích operace násobení.

2.4

2.4. Součin matic. Pro libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad okruhem skalárů \mathbb{K} a libovolnou matici $B = (b_{jk})$ typu n/q nad \mathbb{K} definujeme jejich součin $C = A \cdot B = (c_{ik})$ jako matici typu m/q s prvky

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}, \text{ pro libovolné } 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq q.$$

Například máme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.5

2.5. Čtvercové matice. Je-li v matici stejný počet řádků a sloupců, hovoříme o *čtvercové matici*. Počet řádků a sloupců pak nazýváme také *dimenzí matice*. Matici

$$E = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

se říká *jednotková matice*. Na množině čtvercových matic nad \mathbb{K} dimenze n je součin matic definován pro každé dvě matice, je tam tedy definována operace násobení:

Tvrzení. Pro libovolný okruh skalárů je na množině všech čtvercových matic dimenze n definována operace násobení. Splňuje vlastnosti 1.2(O1) a (O3) vzhledem k jednotkové matici $E = (\delta_{ij})$. Dále spolu se sčítáním matic vyhovuje 1.2(O4). Obecně však neplatí 1.2(O2) ani (OI), zejména tedy neplatí 1.2(P).

DŮKAZ. Asociativita násobení – (O1): Protože skaláry jsou asociativní, distributivní i komutativní, můžeme spočítat

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}) \text{ typu } m/n, \quad B = (b_{jk}) \text{ typu } n/p, \quad C = (c_{kl}) \text{ typu } p/q \\ A \cdot B &= \left(\sum_j a_{ij} \cdot b_{jk} \right), \quad B \cdot C = \left(\sum_k b_{jk} \cdot c_{kl} \right) \\ (A \cdot B) \cdot C &= \left(\sum_k \left(\sum_j a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{kl} \right) = \sum_{j,k} a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl} \\ A \cdot (B \cdot C) &= \left(\sum_j a_{ij} \cdot \left(\sum_k b_{jk} \cdot c_{kl} \right) \right) = \sum_{j,k} a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl} \end{aligned}$$

Jednotkový prvek – (O3):

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = A = E \cdot A$$

(O4) - distributivita: opět díky distributivitě skalárů snadno spočteme pro matice $A = (a_{ij})$ typu m/n , $B = (b_{jk})$ typu n/p , $C = (c_{jk})$ typu n/p , $D = (d_{kl})$ typu p/q

$$A \cdot (B + C) = \left(\sum_j a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) \right) = \left(\left(\sum_j a_{ij}b_{jk} \right) + \left(\sum_j a_{ij}c_{jk} \right) \right) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B + C) \cdot D = \left(\sum_k (b_{jk} + c_{jk})d_{kl} \right) = \left(\left(\sum_k b_{jk}d_{kl} \right) + \left(\sum_k c_{jk}d_{kl} \right) \right) = B \cdot D + C \cdot D$$

Není komutativní: - jak jsme již viděli v 1.42, dvě matice dimenze 2 nemusí komutovat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tím jsme získali zároveň protipříklad na platnost (O2) i (OI). Pro matice typu $1/1$ ovšem oba axiomy samozřejmě platí, protože je mají samy skaláry a pro větší matice získáme protipříklady snadno tak, že právě uvedené matice umístíme do levého horního rohu příslušných čtvercových schémat a doplníme nulami. (Ověřte si sami!) \square

V důkazu jsme vlastně pracovali s maticemi obecnějšího typu, dokázali jsme tedy příslušné vlastnosti obecněji:

Tvrzení. *Násobení matic je asociativní a distributivní, tj. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, kdykoliv jsou tato násobení definována. Jednotková matice je neutrálním prvkem pro násobení zleva i zprava.*

2.6

2.6. Inverzní matice. Se skaláry umíme počítat tak, že z rovnosti $a \cdot x = b$ umíme vyjádřit $x = a^{-1} \cdot b$, kdykoliv inverze k a existuje. Podobně bychom to měli umět s maticemi, máme ale problém, jak poznat, zda taková existuje, a jak ji spočítat.

Říkáme, že B je *matice inverzní* k matici A , když $A \cdot B = B \cdot A = E$. Píšeme pak $B = A^{-1}$ a je samozřejmé, že obě matice musí mít tutéž dimenzi n . Matici, k níž existuje matice inverzní, říkáme *invertibilní matice*.

Pokud A^{-1} a B^{-1} existují, pak existuje i $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. Je totiž (díky právě dokázané asociativitě násobení) $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = E$ a $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = E$.

Protože s maticemi umíme počítat zrovna jako se skaláry, jen mají složitější chování, můžeme formálně snadno řešit systémy lineárních rovnic: Jestliže vyjádříme soustavu n rovnic pro n neznámých součinem matic

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

a existuje matice inverzní k matici A , pak lze násobit zleva A^{-1} a dostaneme $A^{-1} \cdot y = A^{-1} \cdot A \cdot x = E \cdot x = x$, tj. hledané řešení.

Naopak rozepsáním podmínky $A \cdot A^{-1} = E$ pro neznámé skaláry v hledané matici A^{-1} dostaneme n systémů lineárních rovnic se stejnou maticí na levé straně a různými vektory napravo.

2.7

2.7. Ekvivalentní úpravy matic. Z hlediska řešení systémů rovnic

$$A \cdot x = b$$

je jistě přirozené považovat za ekvivalentní matice A a vektory b , které zadávají systémy rovnic se stejným řešením. Uvedeme si jednoduché manipulace s řádky rovnic a stejným způsobem pak můžeme upravovat i vektor napravo. Když se nám podaří vlevo dostat systém s jednotkovou maticí, bude napravo řešení původního systému. Takovým operacím říkáme *řádkové elementární transformace*. Jsou to:

- záměna dvou řádků
- vynásobení vybraného řádku nenulovým skalárem
- přičtení řádku k jinému řádku.

Je zjevné, že odpovídající operace na úrovni rovnic v systému nemohou změnit množinu všech jeho řešení. Později bude vidět, že sloupcové transformace odpovídají řešení téhož systému ale v transformovaných souřadnicích

Analogicky, *sloupcové elementární transformace* matic jsou

- záměna dvou sloupců
- vynásobení vybraného sloupce nenulovým skalárem
- přičtení sloupce k jinému sloupci,

ty však nezachovávají řešení příslušných rovnic, protože mezi sebou míchají samotné proměnné.

Systematicky můžeme použít elementární řádkové úpravy k postupné eliminaci proměnných. Postup je algoritmický a většinou se mu říká *Gausova eliminace* proměnných.

Tvrzení. *Nenulovou matici nad libovolným okruhem skalárů \mathbb{K} lze konečně mnoha elementárními řádkovými transformacemi převést na tzv. (řádkově) schodovitý tvar:*

- *Je-li $a_{ij} = 0$ a všechny předchozí prvky na i -tém řádku jsou také nulové, potom $a_{kj} = 0$ pro všechna $k \geq i$*
- *je-li $a_{(i-1)j}$ první nenulový prvek na $(i-1)$ -ním řádku, pak $a_{ij} = 0$.*

DŮKAZ. Matice v řádkově schodovitém tvaru vypadá takto

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & \dots & \dots & \dots & a_{1m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{lp} & \dots \\ \vdots & & & & & & & \end{pmatrix}$$

a matice může, ale nemusí, končit několika nulovými řádky. K převodu libovolné matice můžeme použít jednoduchý algoritmus:

- (1) Záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j -tý sloupec.
- (2) Pro $i = 2, \dots$, vynásobením prvního řádku prvkem a_{ij} , i -tého řádku prvkem a_{1j} a odečtením vynulujeme prvek a_{ij} na i -tém řádku.
- (3) Opakovanou aplikací bodů (1) a (2), vždy pro zbytek řádků a sloupců v získané matici dospějeme po konečném počtu kroků k požadovanému tvaru.

□

tvary, eliminuje takový postup pouze všechny dosud nenulové prvky mimo diagonálu matice a závěrem lze ještě i tyto elementárními operacemi změnit na jedničky. Celkem jsme tedy ověřili důležitý výsledek, ke kterému se budeme mnohokrát vracet:

2.9. Věta. Pro každou matici A typu m/n nad polem skalárů \mathbb{K} existují čtvercové invertibilní matice P dimenze m a Q dimenze n takové, že matice $P \cdot A$ je v řádkově schodovitém tvaru a

$$P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \end{pmatrix}.$$

2.10

2.10. Algoritmus pro výpočet inverzní matice. V předchozích úvahách jsme se dostali prakticky k úplnému algoritmu pro výpočet inverzní matice. Během jednoduchého níže uvedeného postupu buď zjistíme, že inverze neexistuje, nebo bude inverze spočtena. I nadále pracujeme nad polem skalárů.

Ekvivalentní řádkové transformace se čtvercovou maticí A dimenze n vedou k matici P' takové, že $P' \cdot A$ bude v řádkově schodovitém tvaru. Přitom může (ale nemusí) být jeden nebo více posledních řádků nulových. Jestliže má existovat inverzní matice k A , pak existuje i inverzní matice k $P' \cdot A$. Jestliže však je poslední řádek v $P' \cdot A$ nulový, bude nulový i poslední řádek v $P' \cdot A \cdot B$ pro jakoukoliv matici B dimenze n . Existence takového nulového řádku ve výsledku (řádkové) Gaussovy eliminace tedy vylučuje existenci A^{-1} .

Předpokládejme nyní, že A^{-1} existuje. Podle předchozího, nalezneme řádkově schodovitý tvar bez nulového řádku, tzn. že všechny diagonální prvky v $P' \cdot A$ jsou nenulové. Pak ovšem pokračováním eliminace od pravého dolního rohu zpět a vynormováním diagonálních prvků na jedničky získáme jednotkovou matici E . Jinými slovy, najdeme další invertibilní matici P'' takovou, že pro $P = P'' \cdot P'$ platí $P \cdot A = E$. Výměnou řádkových a sloupcových transformací lze za předpokladu existence A^{-1} stejným postupem najít Q takovou, že $A \cdot Q = E$. Odtud

$$P = P \cdot E = P \cdot (A \cdot Q) = (P \cdot A) \cdot Q = Q.$$

To ale znamená, že jsme našli hledanou inverzní matici $A^{-1} = P = Q$ k A .

Prakticky tedy můžeme postupovat tak, že vedle sebe napíšeme původní matici A a jednotkovou matici E , matici A upravujeme řádkovými elementárními úpravami nejprve na schodovitý tvar, potom tzv. zpětnou eliminací na diagonální matici a v té násobíme řádky inverzními prvky z \mathbb{K} . Tytéž úpravy postupně prováděné s E vedou právě k matici $P = P'' \cdot P'$ z předchozích úvah, tedy z ní získáme právě hledanou inverzi. Pokud tento algoritmus narazí na vynulování celého řádku v původní matici, znamená to, že matice inverzní neexistuje.

2.10a

2.11. Závislost řádků a sloupců a hodnota matice. V předchozích úvahách a počtech s maticemi jsme stále pracovali se sčítáním řádků nebo sloupců coby vektorů, spolu s jejich násobením skaláry. Takové operaci říkáme *lineární kombinace*. V abstraktním pojetí se k operacím s vektory vrátíme za chvíli v 2.23, bude ale užitečné pochopit podstatu už nyní. Lineární kombinací řádků (nebo sloupců)

matice $A = (a_{ij})$ typu m/n rozumíme výraz $a_1u_{i_1} + \dots + a_ku_{i_k}$, kde a_i jsou skaláry, $u_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ jsou řádky (nebo $u_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$ jsou sloupce) matice A .

Jestliže existuje lineární kombinace daných řádků s alespoň jedním nenulovým skalárním koeficientem, jejímž výsledkem je nulový řádek, říkáme, že jsou *lineárně závislé*. V opačném případě, tj. když jedinou možností jak získat nulový řádek je vynásobení výhradně nulovými skaláry, jsou *lineárně nezávislé*. Obdobně definujeme lineárně závislé a nezávislé sloupce matice.

Předchozí výsledky o Gausově eliminaci můžeme vnímat takovým způsobem, že počet výsledných nenulových „schodů“ v řádkově nebo sloupcově schodovitém tvaru je vždy roven témuž přirozenému číslu a to počtu lineárně nezávislých řádků matice a témuž počtu lineárně nezávislých sloupců matice. Tomuto číslu říkáme *hodnota matice*, značíme $h(A)$. Zapamatujme si výsledné tvrzení:

Věta. *Nechť A je matice typu m/n nad polem skalárů \mathbb{K} . Matice A má stejný počet $h(A)$ lineárně nezávislých řádků a lineárně nezávislých sloupců. Zejména je hodnota vždy nejvýše rovna menšímu z rozměrů matice A .*

Algoritmus pro výpočet inverzních matic také říká, že čtvercová matice A dimenze m má inverzi právě, když je její hodnota rovna počtu řádků m .

Ukažme si ještě užití matic pro běžné geometrické transformace, podobně jako v našich úvahách o geometrii roviny (viz 1.43):

2.12. Matice rotací podle souřadnicových os. *Napište matici zobrazení rotací o úhel φ postupně kolem os x , y , z v \mathbb{R}^3 .*

Řešení. Při rotaci libovolného bodu kolem dané osy (řekněme x), se příslušná souřadnice daného bodu nemění, v rovině dané dvěma zbylými osami pak již je rotace dána známou maticí 2×2 . Postupně tedy dostáváme následující matice: Rotace kolem osy z :

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotace kolem osy y :

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Rotace kolem osy x :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

U matice rotace kolem osy y musíme dávat pozor na znaménko. Je totiž rotace kolem osy y v kladném smyslu, tedy taková rotace, že pokud se díváme proti směru osy y , tak se svět točí proti směru hodinových ručiček, je rotací v záporném smyslu v rovině xz (tedy osa z se otáčí směrem k x). Rozmyslete si kladný a záporný smysl rotace podél všech tří os. \square

2.13. Matice rotace kolem dané osy. *Napište matici zobrazení rotace v kladném smyslu o úhel 60° kolem přímky dané počátkem a vektorem $(1, 1, 0)$ v \mathbb{R}^3 .*

Řešení. Daná otáčení je složením následujících tří zobrazení:

- rotace o 45° v záporném smyslu podle osy z (osa rotace $(1, 1, 0)$ přejde do osy x)
- rotace o 60° v kladném smyslu podle osy x .
- rotace o 45° v kladném smyslu podle osy z (osa x přejde zpět na osu danou vektorem $(1, 1, 0)$).

Maticе výsledné rotace tedy bude součinem matic odpovídajících těmto třem zobrazením, přičemž pořadí matic je dáno pořadím provádění jednotlivých zobrazení, prvním zobrazení odpovídá v součinu matice nejvíce napravo. Celkem tedy dostáváme pro hledanou matici A vztah:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

□

2. Determinanty

V páté části první kapitoly jsme viděli, že pro čtvercové matice dimenze n nad reálnými čísly existuje skalární funkce \det , která matici přiřadí nenulové číslo právě, když existuje její inverze. Neříkali jsme to sice stejnými slovy, ale snadno si to ověříte, viz odstavce počínaje 1.42 a formule (1.26). Determinant byl užitečný i jinak, viz 1.44 a 1.45, kde jsme si volnou úvahou odvodili, že obsah rovnoběžníka by měl být lineárně závislý na každém ze dvou vektorů definujících rovnoběžník a že je užitečné zároveň požadovat změnu znaménka při změně pořadí těchto vektorů. Protože tyto vlastnosti měl, až na pevný skalární násobek, jedině determinant, odvodili jsme, že je obsah dán právě takto. Nyní uvidíme, že podobně lze postupovat v každé konečné dimenzi.

V této části budeme pracovat s libovolnými skaláry \mathbb{K} a maticemi nad těmito skaláry.

2.10c

2.14. Definice determinantu. Připomeňme, že bijektivní zobrazení množiny X na sebe se nazývá *permutace množiny X* , viz 1.5. Je-li $X = \{1, 2, \dots, n\}$, lze permutace zapsat pomocí výsledného pořadí ve formě tabulky:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Prvek $x \in X$ se nazývá *samodružným bodem* permutace σ , je-li $\sigma(x) = x$. Permutace σ taková, že existují právě dva různé prvky $x, y \in X$ s $\sigma(x) = y$ a $\sigma(y) = x$ a pro všechna ostatní $z \in X$ se nazývá *transpozice*, značíme ji (x, y) .

V dimenzi dva byl vzorec pro determinant jednoduchý – vezmeme všechny možné součiny dvou prvků, po jednom z každého sloupce a řádku matice, opatříme je znaménkem tak, aby při přehození dvou sloupců došlo ke změně celkového znaménka, a výrazy všechny sečteme:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A = ad - bc.$$

Obecně, nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice dimenze n nad \mathbb{K} . *Determinant matice A* je skalár $\det A = |A|$ definovaný vztahem

$$|A| = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

kde Σ_n je množina všech možných permutací na $\{1, \dots, n\}$ a znaménko sgn pro každou permutaci ještě musíme popsat. Každý z výrazů $\text{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ nazýváme *člen determinantu* $|A|$.

Jednoduché příklady už umíme: je-li $n = 1$, pak $|a_{11}| = a_{11} \in \mathbb{K}$, a pro $n = 2$ je

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Podobně pro $n = 3$ se dá uhodnout (chceme linearitu v každém sloupci a antisymetrii)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Tomuto vzorci se říká *Saarusovo pravidlo*.

Jak tedy najít správná znaménka? Říkáme, že dvojice prvků $a, b \in X = \{1, \dots, n\}$ tvoří *inverzi v permutaci* σ , je-li $a < b$ a $\sigma(a) > \sigma(b)$. Permutace σ se nazývá *sudá* (resp. *lichá*), obsahuje-li sudý (resp. lichý) počet inverzí.

Parita permutace σ je $(-1)^{\text{počet inverzí}}$ a značíme ji právě $\text{sgn}(\sigma)$. Tolik definice, chceme ale vědět, jak s paritou počítat. Z následujícího tvrzení už je jasné vidět, že Saarusovo pravidlo skutečně počítá determinant v dimenzi 3.

Tvrzení. *Na množině $X = \{1, 2, \dots, n\}$ je právě $n!$ různých permutací. Tyto lze seřadit do posloupnosti tak, že každé dvě po sobě jdoucí se liší právě jednou transpozicí. Lze při tom začít libovolnou permutací a každá transpozice mění paritu.*

DŮKAZ. Pro jednoprvkové a dvouprvkové X tvrzení samozřejmě platí. Budeme postupovat indukcí přes dimenzi.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny množiny s $n - 1$ prvky a uvažme permutaci $\sigma(1) = a_1, \dots, \sigma(n) = a_n$. Podle indukčního předpokladu všechny permutace, které mají na posledním místě a_n , dostaneme z tohoto pořadí postupným prováděním transpozic. Přitom jich bude $(n - 1)!$. V posledním z nich prohodíme $\sigma(n) = a_n$ za některý z prvků, který dosud nebyl na posledním místě, a znovu uspořádáme všechny permutace s tímto vybraným prvkem na posledním místě do posloupnosti s požadovanými vlastnostmi. Po n -násobné aplikaci tohoto postupu získáme $n!$ zaručeně různých permutací, tzn. všechny, právě předepsaným způsobem. Všimněte si, že důležitou částí postupu je možnost začít s libovolnou z permutací.

Zbývá poslední dovětek o paritách. Uvažme pořadí $(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, n)$, ve kterém je r inverzí. Pak zjevně je v pořadí $(a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, n)$ buď $r - 1$ nebo $r + 1$ inverzí. Každou transpozicí (a_i, a_j) lze přitom získat postupným provedením $(j - i) + (j - i - 1) = 2(j - i) - 1$ transpozic sousedních prvků. Proto se provedením libovolné transpozice parita permutace změní. Navíc již víme, že všechny permutace lze získat prováděním transpozic. \square

Zjistili jsme, že provedení libovolné transpozice změní paritu permutace a že každé pořadí čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ lze získat postupnými transpozicemi sousedních prvků. Důsledkem tohoto popisu je, že na každé množině $X = \{1, \dots, n\}$, $n > 1$, je právě $\frac{1}{2}n!$ sudých a $\frac{1}{2}n!$ lichých permutací.

Jestliže složíme dvě permutace za sebou, znamená to provést napřed všechny transpozice tvořící první a pak druhou. Proto pro libovolné permutace $\sigma, \eta : X \rightarrow X$ platí

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \eta) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\eta), \quad \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

2.15. Rozklad permutace na transpozice. Napište permutaci

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

jako složení transpozicí. Je tato permutace sudá nebo lichá?

Řešení. Transpozicí prvků i a j , budeme značit jako (i, j) . Danou permutaci můžeme rozložit nejprve na nezávislé cykly, ty potom na transpozice. V našem případě je daná transpozice složením dvou cyklů: $(1, 2, 3)$ a $(4, 5)$ (rozklad dostaneme tak, že si vybereme jeden prvek a ten opakovaně zobrazujeme pomocí dané permutace, dokud nedostaneme na počátku zvolený prvek; „cesta“ prvku tvoří cyklus; z prvků, které jsme ještě neprošli vybereme opět další a opět ho opakovaně zobrazujeme pomocí dané permutace; opakujeme tak dlouho, dokud neprobereme všechny prvky množiny, na které permutace působí). V našem případě se prvek 1 zobrazuje na 3, prvek 3 na prvek 2, prvek 2 zpět na 1, dostáváme tedy cyklus $(1, 3, 2)$. První prvek, který jsme ještě neprošli je číslo 4: 4 se zobrazuje na 5, 5 zpět na 4; dostáváme transpozici, neboli cyklus délky dva. Máme tedy

$$P = (1, 3, 2) \circ (4, 5).$$

Cyklus $(1, 3, 2)$ ještě rozložíme na transpozice: $(1, 3, 2) = (1, 3) \circ (3, 2)$. Celkem tedy

$$P = (1, 3) \circ (3, 2) \circ (4, 5).$$

Parita počtu transpozicí v rozkladu je dána jednoznačně a udává sudost či lichost permutace. Naše permutace je tedy lichá. \square

2.12

2.16. Jednoduché vlastnosti determinantu. Pro každou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n na skaláry z \mathbb{K} definujeme matici *transponovanou* k A . Jde o matici $A^T = (a'_{ij})$ s prvky $a'_{ij} = a_{ji}$ typu n/m .

Čtvercová matice A s vlastností $A = A^T$ se nazývá *symetrická*. Jestliže platí $A = -A^T$, pak se A nazývá *antisymetrická*.

Věta. Pro každou čtvercovou matici A platí

- (1) $|A^T| = |A|$,
- (2) Je-li jeden řádek v A tvořen nulovými prvky z \mathbb{K} , pak $|A| = 0$,
- (3) Jestliže matice B vznikla z A výměnou dvou řádků, pak $|A| = -|B|$,
- (4) Jestliže matice B vznikla z A vynásobením řádku skalárem $a \in \mathbb{K}$, pak $|B| = a|A|$,
- (5) Jsou-li prvky k -tého řádku v A tvaru $a_{kj} = c_{kj} + b_{kj}$ a všechny ostatní řádky v maticích A , $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ jsou stejné, pak $|A| = |B| + |C|$,
- (6) Determinant $|A|$ se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku A lineární kombinaci ostatních řádků.

DŮKAZ. (1) Členy determinantů $|A|$ a $|A^T|$ jsou v bijektivní korespondenci. Členu $\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ přitom odpovídá člen

$$\operatorname{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)},$$

přičemž musíme ověřit, že je tento člen opatřen správným znaménkem. Parita σ a σ^{-1} je ale stejná, jde tedy opravdu o člen $|A^T|$ a první tvrzení je dokázáno.

(2) Plyne přímo z definice determinantu, protože všechny jeho členy budou nulové.

(3) Ve všech členech $|A|$ dojde u permutací k přidání jedné transpozice, znaménko všech členů determinantu tedy bude opačné.

(4) Vyplývá přímo z definice, protože členy determinantu $|B|$ jsou členy $|A|$ vynásobené skalárem a .

(5) V každém členu $|A|$ je právě jeden součinitel z k -tého řádku matice A . Protože platí distributivní zákon pro násobení a sčítání v \mathbb{K} , vyplývá tvrzení přímo z definičního vztahu pro determinanty.

(6) Jsou-li v A dva stejné řádky, jsou mezi členy determinantu vždy dva sčítance stejné až na znaménko. Proto je v takovém případě $|A| = 0$. Je tedy podle tvrzení (5) možné přičíst k vybranému řádku libovolný jiný řádek, aniž by se změnila hodnota determinantu. Vzhledem k tvrzení (4) lze ale přičíst i skalární násobek libovolného jiného řádku. \square

2.13 **2.17. Poznámka.** Všimněme si hezkého důsledku prvního tvrzení předchozí věty o rovnosti determinantů matice a matice transponované. Zaručuje totiž, že kdykoliv se nám podaří dokázat nějaké tvrzení o determinantech formulované s využitím řádků příslušné matice, pak analogické tvrzení platí i pro sloupce. Např. tedy můžeme okamžitě všechna tvrzení (2)–(6) této věty přeformulovat i pro přičítání lineárních kombinací ostatních sloupců k vybranému.

Vlastnosti (3)–(5) říkají, že determinant jako zobrazení, které n vektorům dimenze n (řádkům nebo sloupcům matice) přiřadí skalár je antisymetrické zobrazení lineární v každém svém argumentu, přesně jak jsme podle analogie z dimenze 2 požadovali.

Pro matici v řádkovém nebo sloupcovém schodovitém tvaru je jediným nenulovým členem determinantu ten, který odpovídá identické permutaci. Vidíme tedy, že determinant takové matice je $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$. Předchozí věta tedy poskytuje velice efektivní metodu výpočtu determinantů pomocí Gaussovy eliminační metody, viz. 2.7.

2.14 **2.18. Další vlastnosti determinantu.** Časem uvidíme, že skutečně stejně jako v dimenzi dva je determinant matice roven orientovanému objemu rovnoběžnostěnu určeného jejími sloupci. Uvidíme časem také, že když uvážíme zobrazení $x \mapsto A \cdot x$ zadané čtvercovou maticí A na \mathbb{R}^n , pak můžeme determinant této matice vidět jako vyjádření poměru mezi objemem rovnoběžnostěnu daných vektory x_1, \dots, x_n a jejich obrazy $A \cdot x_1, \dots, A \cdot x_n$. Protože skládání zobrazení $x \mapsto A \cdot x \mapsto B \cdot (A \cdot x)$ odpovídá násobení matic, je snad docela pochopitelná tzv. *Cauchyova věta*:

Věta. *Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ jsou čtvercové matice dimenze n nad okruhem skalárů \mathbb{K} . Pak $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.*

My tuto větu odvodíme ryze algebraicky už proto, že předchozí odvolávka na geometrický argument těžko může fungovat pro jakékoliv skaláry. Základním nástrojem je tzv. *rozvoj determinantu* podle jednoho nebo více řádků či sloupců. Budeme potřebovat něco málo technické přípravy. Čtenář, který by snad tolik abstrakce neztrávil může tyto pasáže přeskočit a vstřebat pouze znění Laplaceovy věty a jejich důsledků.

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n a $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n$ jsou pevně zvolená přirozená čísla. Pak matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_l} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_l} \end{pmatrix}$$

typu k/l nazýváme *submaticí matice* A určenou řádky i_1, \dots, i_k a sloupci j_1, \dots, j_l . Zbývajících $(m-k)$ řádky a $(n-l)$ sloupci je určena matice M^* typu $(m-k)/(n-l)$, která se nazývá *doplňková submatice* k M v A . Při $k = l$ je definován $|M|$, který nazýváme *subdeterminant* nebo *minor* řádu k matice A . Je-li $m = n$, pak při $k = l$ je i M^* čtvercová a $|M^*|$ se nazývá *doplňek minoru* $|M|$, nebo *doplňkový minor* k submatici M v matici A . Skalár

$$(-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_l} \cdot |M^*|$$

se nazývá *algebraický doplňek* k minoru $|M|$. Submatice tvořené prvními k řádky a sloupci se nazývají *hlavní submatice*, jejich determinanty *hlavní minory* matice A . Při speciální volbě $k = l = 1$, $m = n$ hovoříme o *algebraickém doplňku* A_{ij} prvku a_{ij} matice A .

Pokud je $|M|$ hlavní minor matice A , pak přímo z definice determinantu je vidět, že součin $|M|$ s jeho algebraickým doplňkem je členem determinantu.

Nechť je obecná submatice M určena řádky $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ a sloupci $j_1 < \dots < j_k$. Pak pomocí $(i_1 - 1) + \dots + (i_k - k)$ výměn sousedních řádků a $(j_1 - 1) + \dots + (j_k - k)$ výměn sousedních sloupců v A převedeme submatici M na hlavní submatici a doplňková matice přitom přejde právě na doplňkovou matici. Celá matice A přejde přitom v matici B , pro kterou platí podle 2.16 a definice determinantu $|B| = (-1)^\alpha |A|$, kde $\alpha = \sum_{h=1}^k (i_h - j_h) - 2(1 + \dots + k)$. Tím jsme ověřili:

Tvrzení. *Nechť A je čtvercová matice dimenze n a $|M|$ je její minor řádu $k < n$. Pak součin libovolného členu $|M|$ s libovolným členem jeho algebraického doplňku je členem $|A|$.*

Toto tvrzení už podbízí představu, že by se pomocí takových součinů menších determinantů skutečně mohl determinant matic vyjadřovat. Víme, že $|A|$ obsahuje právě $n!$ různých členů, právě jeden pro každou permutaci. Tyto členy jsou navzájem různé jakožto polynomy v prvcích (neznámé obecné) matice A , přitom lze pro každý z členů zvolit matici A takovou, že pouze tento člen bude nenulový.

Ukážeme si, že uvažované součiny $|M| \cdot |M^*|$ obsahují právě $n!$ různých členů z $|A|$, bude tvrzení věty dokázáno. Ze zvolených k řádků lze vybrat $\binom{n}{k}$ minorů M a podle předchozího lematu je každý z $k!(n-k)!$ členů v součinech $|M|$ s jejich algebraickými doplňky členem $|A|$. Přitom pro různé výběry M nemůžeme nikdy obdržet stejné členy a jednotlivé členy v $(-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_l} \cdot |M| \cdot |M^*|$ jsou také po dvou různé. Celkem tedy máme právě požadovaný počet $k!(n-k)!\binom{n}{k} = n!$ členů.

Tím jsme bezesbytku dokázali tzv. *Laplaceovu větu*:

Věta. *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice dimenze n nad libovolným okruhem skalárů a nechť je pevně zvoleno k jejích řádků. Pak $|A|$ je součet všech $\binom{n}{k}$ součinů $(-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_l} \cdot |M| \cdot |M^*|$ minorů řádu k vybraných ze zvolených řádků, s jejich algebraickými doplňky.*

2.15

2.19. Důsledky Laplaceovy věty. Předchozí věta převádí výpočet $|A|$ na výpočet determinantů nižšího stupně. Této metodě výpočtu se říká *Laplaceův rozvoj* podle zvolených řádků či sloupců. Např. rozvoj podle i -tého řádku nebo i -tého

sloupce:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji} A_{ji}$$

kde A_{ij} označuje algebraický doplněk k prvku (minoru stupně 1) a_{ij} . Při praktickém počítání determinantů bývá výhodné kombinovat Laplaceův rozvoj s přímou metodou přičítání lineárních kombinací řádků či sloupců.

2.20. Jednoduchý příklad rozvoje. *Spočítejte determinant matice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Začneme rozvíjet podle prvního sloupce, kde máme nejvíce (jednu) nul. Postupně dostáváme

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Podle Saarusova pravidla
 $= -2 - 2 + 6 = 2.$

□

Výpočet determinantů bude standardním krokem v mnoha dalších úlohách, proto ponecháme i procvičování na tyto praktičtější příležitosti.

2.21. Důkaz Cauchyovy věty. Jde o trikovou ale elementární aplikaci Laplaceovy věty. Použijeme prostě dvakrát Laplaceův rozvoj na vhodné matice:

Uvažme nejprve matici H dimenze $2n$ (používáme tzv. blokovou symboliku, tj. píšeme matici jakoby složenou z matic)

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Laplaceovým rozvojem podle prvních n řádků obdržíme právě $|H| = |A| \cdot |B|$.

Nyní budeme k posledním n sloupcům postupně přičítat lineární kombinace prvních n sloupců tak, abychom obdrželi matici s nulami v pravém dolním rohu. Dostaneme

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \\ -1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Prvky submatice nahoře vpravo přitom musí splňovat

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

neboli jde právě o prvky součinu $A \cdot B$ a $|K| = |H|$. Přitom rozvojem podle posledních n sloupců dostáváme

$$|K| = (-1)^{n+1+\dots+2n}|A \cdot B| = (-1)^{2n \cdot (n+1)} \cdot |A \cdot B| = |A \cdot B|.$$

2.16

2.22. Determinant a inverzní matice. Předpokládejme nejprve, že existuje matice inverzní k matici A , tj. $A \cdot A^{-1} = E$. Protože pro jednotkovou matici platí vždy $|E| = 1$, je pro každou invertibilní matici vždy $|A|$ invertibilní skalár a platí $|A|^{-1} = |A^{-1}|$.

My však kombinací Laplaceovy věty a Cauchyho věty umíme víc. Pro libovolnou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ dimenze n definujeme matici $A^* = (a_{ij}^*)$, kde $a_{ij}^* = A_{ji}$ jsou algebraické doplňky k prvkům a_{ji} v A . Nazýváme ji *algebraicky adjungovaná matice* k matici A .

Věta. Pro každou čtvercovou matici A nad okruhem skalárů \mathbb{K} platí

$$AA^* = A^*A = |A| \cdot E.$$

Zejména tedy

- (1) A^{-1} existuje jako matice nad okruhem skalárů \mathbb{K} právě, když $|A|^{-1}$ existuje v \mathbb{K} .
- (2) Pokud existuje A^{-1} , pak platí $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$.

DŮKAZ. Jak jsme již zmínili, Cauchyova věta ukazuje, že z existence A^{-1} vyplývá invertibilita $|A| \in \mathbb{K}$. Předpokládejme naopak, že $|A|$ je invertibilní skalár. Spočteme přímým výpočtem $A \cdot A^* = (c_{ij})$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj}^* = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk}.$$

Pokud $i = j$ je to právě Laplaceův rozvoj $|A|$ podle i -tého řádku. Pokud $i \neq j$ jde o rozvoj determinantu matice v níž je i -tý a j -tý řádek stejný a proto je $c_{ij} = 0$. Odtud plyne $A \cdot A^* = |A| \cdot E$, ale již v 2.10 jsme odvodili, že z rovnosti $A \cdot B = E$ plyne i $B \cdot A = E$. (Pokud tomu někdo dá přednost, může zopakovat předešlý výpočet pro $A^* \cdot A$). \square

3. Vektorové prostory a lineární zobrazení

Vraťme se teď na chvíli k systémům m lineárních rovnic pro n proměnných z 2.3 a předpokládejme navíc, že jde o rovnice tvaru $A \cdot x = 0$, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Díky vlastnosti distributivity pro násobení matic je okamžitě zřejmé, že součet dvou řešení $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$ splňuje

$$A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y = 0$$

a je tedy také řešením. Stejně tak zůstává řešením i skalární násobek $a \cdot x$. Množina všech řešení pevně zvoleného systému rovnic je proto uzavřená na sčítání vektorů a násobení vektorů skaláry. To byly základní vlastnosti vektorů dimenze n v \mathbb{K}^n , viz 2.1. Teď ale máme vektory v prostoru řešení s n souřadnicemi a „dimenze“ tohoto prostoru určitě nemá být n (pokud matice systému není nulová). Případy dvou rovnic pro dvě neznámé jsme potkali při řešení geometrických problémů v rovině v

1.41 a pro dvě závislé rovnice byl množinou všech řešení „jednorozměrný“ prostor – přímka. U dvou nezávislých rovnic to byl průsečík dvou přímek, tj. „nulorozměrný“ prostor.

Už v 1.16, jsme ale potkali ještě zajímavější příklad prostoru všech řešení homogenní lineární diferenční rovnice (druhého řádu). Opět jsme dvě řešení mohli libovolně kombinovat pomocí sčítání a násobení skaláry a dostali jsme tak všechna možná řešení. Tyto „vektory“ ovšem jsou nekonečné posloupnosti čísel, přestože intuitivně očekáváme, že dimenze celého prostoru řešení by měla být dvě.

Potřebujeme proto obecnější definici vektorového prostoru a jeho dimenze:

2.17

2.23. Abstraktní vektorové prostory. *Vektorovým prostorem* V nad polem skalárů \mathbb{K} rozumíme množinu spolu s operací sčítání, pro kterou platí axiomy 1.1(KG1)–(KG4), a s násobením skaláry, pro které platí axiomy 2.1(V1)–(V4).

Připomeňme naši jednoduchou konvenci ohledně značení: skaláry budou zpravidla označovány znaky z počátku abecedy, tj. a, b, c, \dots , zatímco pro vektory budeme užívat znaky z konce, u, v, w, x, y, z . Přitom ještě navíc většinou x, y, z budou opravdu n -tice skalárů. Pro úplnost výčtu, písmena z prostředka, např. i, j, k, ℓ budou nejčastěji označovat indexy výrazů.

Abychom se trochu pocvičili ve formálním postupu, ověříme jednoduché vlastnosti vektorů (které pro n -tice skalárů byly samozřejmé, nicméně teď je musíme odvodit z axiomů)

Tvrzení. *Nechť V je vektorový prostor nad polem skalárů \mathbb{K} , dále uvažme $a, b, a_i \in \mathbb{K}$, vektory $u, v, u_j \in V$. Potom*

- (1) $a \cdot u = 0$ právě když $a = 0$ nebo $u = 0$
- (2) $(-1) \cdot u = -u$
- (3) $a \cdot (u - v) = a \cdot u - a \cdot v$
- (4) $(a - b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$
- (5) $(\sum_{i=1}^n a_i) \cdot (\sum_{j=1}^m u_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \cdot u_j$.

DŮKAZ. Můžeme rozepsat

$$(a + 0) \cdot u \stackrel{(V2)}{=} a \cdot u + 0 \cdot u = a \cdot u$$

což podle axiomu (KG4) zaručuje $0 \cdot u = 0$. Nyní

$$u + (-1) \cdot u \stackrel{(V2)}{=} (1 + (-1)) \cdot u = 0 \cdot u = 0$$

a odtud $-u = (-1) \cdot u$. Dále

$$a \cdot (u + (-1) \cdot v) \stackrel{(V2, V3)}{=} a \cdot u + (-a) \cdot v = a \cdot u - a \cdot v$$

což dokazuje (3). Platí

$$(a - b) \cdot u \stackrel{(V2, V3)}{=} a \cdot u + (-b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$$

a tím je ověřeno (4). Vztah (5) plyne indukcí z (V2) a (V1).

Zbývá (1): $a \cdot 0 = a \cdot (u - u) = a \cdot u - a \cdot u = 0$, což spolu s prvním tvrzením tohoto důkazu ukazuje jednu implikaci. K opačné implikaci poprvé potřebujeme axiom pole pro skaláry a axiom (V4) pro vektorové prostory: je-li $p \cdot u = 0$ a $p \neq 0$, pak $u = 1 \cdot u = (p^{-1} \cdot p) \cdot u = p^{-1} \cdot 0 = 0$. \square

V odstavci 2.11 jsme pracovali s tzv. lineárními kombinacemi řádků matice. S obecnými vektory budeme zacházet zcela analogicky: Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \dots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \dots, v_k \subset V$. Množina vektorů $M \subset V$ ve vektorovém prostoru V nad \mathbb{K} se nazývá *lineárně nezávislá* jestliže pro každou k -tici vektorů $v_1, \dots, v_k \in M$ a každé skaláry $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \dots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \implies \quad a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

Posloupnost vektorů v_1, \dots, v_k nazveme *lineárně nezávislou* jestliže v_1, \dots, v_k jsou po dvou různé a $\{v_1, \dots, v_k\}$ je lineárně nezávislá. Množina M vektorů je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá. Přímo z definice pak vyplývá, že neprázdná podmnožina M vektorů ve vektorovém prostoru nad polem skalárů \mathbb{K} je závislá právě, když je jeden z jejích vektorů vyjádřitelný jako lineární kombinace ostatních.

Přímo z definic plyne, že každá podmnožina lineárně nezávislé množiny M je lineárně nezávislá. Stejně snadno vidíme, že $M \subset V$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když každá konečná podmnožina v M je lineárně nezávislá.

2.24. Vektorový prostor ano či ne? Rozhodněte o následujících množinách, jestli jsou vektorovými prostory nad tělesem reálných čísel:

- (1) Množina řešení homogenní diferencní rovnice.
- (2) Množina řešení nehomogenní diferencní rovnice.
- (3) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = c, c \in \mathbb{R}\}$

Řešení. (1) Ano. Množina řešení, tedy množina posloupností vyhovujících dané diferencní homogenní rovnici, je evidentně uzavřená vzhledem ke sčítání i násobení reálným číslem: mějme posloupnosti $(x_n)_{n=0}^\infty$ a $(y_n)_{n=0}^\infty$ vyhovující stejné homogenní diferencní rovnici, tedy

$$\begin{aligned} a(n)x_n + a(n-1)x_{n-1} + \dots + a(1)x_1 &= 0 \\ a(n)y_n + a(n-1)y_{n-1} + \dots + a(1)y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Sečtením těchto rovnic dostaneme

$$a(n)(x_n + y_n) + a(n-1)(x_{n-1} + y_{n-1}) + \dots + a(1)(x_1 + y_1) = 0,$$

tedy i posloupnost $(x_n + y_n)_{n=0}^\infty$, vyhovuje stejné diferencní rovnici. Rovněž tak pokud posloupnost $(x_n)_{n=0}^\infty$ vyhovuje dané rovnici, tak i posloupnost $(kx_n)_{n=0}^\infty$, kde $k \in \mathbb{R}$.

(2) Ne. Součet dvou řešení nehomogenní rovnice

$$\begin{aligned} a(n)x_n + a(n-1)x_{n-1} + \dots + a(1)x_1 &= c \\ a(n)y_n + a(n-1)y_{n-1} + \dots + a(1)y_1 &= c, \quad c \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

vyhovuje rovnici

$$a(n)(x_n + y_n) + a(n-1)(x_{n-1} + y_{n-1}) + \dots + a(1)(x_1 + y_1) = 2c \neq c,$$

zejména pak nevyhovuje původní nehomogenní rovnici.

(3) Vnímáme-li zadání jako „pro pevné $x \in \mathbb{R}$ a pevné c požadujeme po reálných funkcích, aby $f(x) = c$ “, pak je to vektorový prostor právě, když $c = 0$.

Pokud nám jde naopak o konstantní funkce, ty pochopitelně vektorový prostor jsou (opět jednorozměrný reálný prostor \mathbb{R}). \square

2.18

2.25. Generátory a podprostory. Podmnožina $M \subset V$ se nazývá *vektorovým podprostorem* jestliže spolu se zúženými operacemi sčítání a násobení skaláry je sama vektorovým prostorem. Tzn. požadujeme

$$\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall v, w \in M, a \cdot v + b \cdot w \in M.$$

Rozeberme si hned několik příkladů: Prostor n -tic skalárů \mathbb{R}^m se sčítáním a násobením po složkách je vektorový prostor nad \mathbb{R} , ale také vektorový prostor nad \mathbb{Q} . Např. pro $m = 2$, jsou vektory $(1, 0), (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ lineárně nezávislé, protože z $a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = (0, 0)$ plyne $a = b = 0$. Dále, vektory $(1, 0), (\sqrt{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$ jsou lineárně závislé nad \mathbb{R} , protože $\sqrt{2} \cdot (1, 0) = (\sqrt{2}, 0)$, ovšem nad \mathbb{Q} jsou lineárně nezávislé! Nad \mathbb{R} tedy tyto dva vektory „generují“ jednorozměrný podprostor, zatímco nad \mathbb{Q} je dvouřozměrný.

Polynomy stupně nejvýše m tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_m[x]$. Polynomy můžeme chápat jako zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a sčítání a násobení skaláry definujeme takto: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$. Polynomy všech stupňů také tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_\infty[x]$ a $\mathbb{R}_m[x] \subset \mathbb{R}_n[x]$ je vektorový podprostor pro všechna $m \leq n \leq \infty$. Podprostory jsou např. všechny sudé polynomy nebo liché polynomy ($f(-x) = \pm f(x)$).

Úplně analogicky jako u polynomů můžeme definovat strukturu vektorového prostoru na množině všech zobrazení $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nebo všech zobrazení $M \rightarrow V$ libovolné pevně zvolené množiny M do vektorového prostoru V .

Protože podmínka v definici podprostoru obsahuje pouze univerzální kvantifikátory, je jistě průnik podprostorů opět podprostor. Snadno to ověříme i přímo: Nechtě $W_i, i \in I$, jsou vektorové podprostory ve V , $a, b \in \mathbb{K}$, $u, v \in \bigcap_{i \in I} W_i$. Pak pro všechny $i \in I$, $a \cdot u + b \cdot v \in W_i$, to ale znamená, že $a \cdot u + b \cdot v \in \bigcap_{i \in I} W_i$.

Zejména je tedy podprostorem průnik všech podprostorů $W \subset V$, které obsahují předem danou množinu vektorů $M \subset V$. Říkáme, že takto M *generuje* podprostor $\langle M \rangle$, nebo že prvky M jsou *generátory* podprostoru $\langle M \rangle$.

Zformulujme opět několik jednoduchých tvrzení o generování podprostorů:

Tvrzení. Pro každou podmnožinu $M \subset V$ platí

- (1) $\langle M \rangle = \{a_1 \cdot u_1 + \dots + a_k \cdot u_k; k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, u_j \in M, j = 1, \dots, k\}$
- (2) $M = \langle M \rangle$ právě když M je vektorový podprostor
- (3) jestliže $N \subset M$ pak $\langle N \rangle \subset \langle M \rangle$ je vektorový podprostor
- (4) $\langle \emptyset \rangle = \{0\} \subset V$, *triviální podprostor*.

DŮKAZ. (1) Platí $\{a_1 u_1 + \dots + a_k u_k\} \subset \langle M \rangle$ a zároveň je to vektorový podprostor (ověřte!), který obsahuje M . (2) plyne z (1) a definice vektorového podprostoru. (3): Nejmenší vektorový podprostor je $\{0\}$, protože prázdnou množinu obsahují všechny podprostory a každý z nich obsahuje 0. \square

2.26. Báze a součty podprostorů. Nechtě $V_i, i \in I$, jsou podprostory ve V . Pak podprostor generovaný jejich sjednocením, tj. $\langle \bigcup_{i \in I} V_i \rangle$, nazýváme *součtem podprostorů* V_i . Značíme $\sum_{i \in I} V_i$. Zejména pro $V_1, \dots, V_k \subset V$,

$$V_1 + \dots + V_k = \langle V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k \rangle.$$

Viděli jsme, že každý prvek v uvažovaném součtu podprostorů můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z podprostorů V_i . Protože však je sčítání vektorů komutativní, lze k sobě poskládat členy patřící do stejného podprostoru a pro konečný součet k podprostorů tak dostáváme

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_k = \{v_1 + \cdots + v_k; v_i \in V_i, i = 1, \dots, k\}.$$

Součet $W = V_1 + \cdots + V_k \subset V$ se nazývá *přímý součet* podprostorů, jsou-li průniky všech dvojic triviální, tj. $V_i \cap V_j = \{0\}$ pro všechny $i \neq j$. V takovém případě lze každý vektor $w \in W$ napsat právě jedním způsobem jako součet

$$w = v_1 + \cdots + v_k,$$

kde $v_i \in V_i$. Pro přímé součty píšeme

$$W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k = \bigoplus_{i=1}^k V_i.$$

Podmnožina $M \subset V$ se nazývá *báze vektorového prostoru V* , jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá. Vektorový prostor, který má konečnou bázi nazýváme *konečněrozměrný*, mohutnost báze nazýváme *dimenzí V^2* . Nemá-li V konečnou bázi, říkáme, že V je *nekonečněrozměrný*. Píšeme $\dim V = k$, $k \in \mathbb{N}$, případně $k = \infty$. Bázi k -rozměrného prostoru budeme obvykle zapisovat jako k -tici $\underline{v} = (v_1, \dots, v_k)$ bázových vektorů. Jde tu především o zavedení konvence: U konečněrozměrných podprostorů budeme totiž vždy uvažovat bázi včetně zadaného pořadí prvků i když jsme to takto, striktně vzato, nedefinovali.

Zjevně, je-li (v_1, \dots, v_n) bazí V , je celý prostor V přímým součtem jednorozměrných podprostorů

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle.$$

2.20 **2.27. Věta.** *Z libovolné konečné množiny generátorů vektorového prostoru V lze vybrat bázi. Každá báze V má přitom stejný počet prvků.*

DŮKAZ. První tvrzení je snadno vidět indukcí přes počet generátorů k : Jedině nulový podprostor nepotřebuje žádný generátor a tedy umíme vybrat prázdnou bázi. Naopak, nulový vektor vybrat nesmíme (generátory by byly lineárně závislé) a nic jiného už v podprostoru není. Při $k = 1$ je $V = \langle \{v\} \rangle$ a $v \neq 0$ protože $\{v\}$ je lineárně nezávislá množina vektorů. Pak je ovšem $\{v\}$ zároveň báze V .

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k = n$, a uvažme $V = \langle v_1, \dots, v_{n+1} \rangle$. Jsou-li v_1, \dots, v_{n+1} lineárně nezávislé, pak tvoří bázi. V opačném případě existuje index i takový, že

$$v_i = a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_{n+1} v_{n+1}.$$

Pak ovšem $V = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1} \rangle$ a již umíme vybrat bázi (podle indukčního předpokladu).

Zbývá ověřit, že báze mají vždy stejný počet prvků. Uvažujme bázi (v_1, \dots, v_n) prostoru V a libovolný nenulový vektor

$$u = a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n \in V$$

s $a_i \neq 0$ pro jisté i . Pak

$$v_i = \frac{1}{a_i} (u - (a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_{i-1} \cdot v_{i-1} + a_{i+1} \cdot v_{i+1} + \cdots + a_n \cdot v_n))$$

a proto také $\langle u, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = V$. Jistě je to opět báze, protože vektory $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ byly nezávislé, takže kdyby přidáním u vznikly lineárně závislé

²Všimněme si, že triviální podprostor je generován prázdnou množinou, která je "prázdnou" bazí. Má tedy triviální podprostor dimenzi nulovou.

vektory, pak by u bylo jejich lineární kombinací, ale to by znamenalo $V = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$, což není možné. Takže už víme, že pro libovolný nenulový vektor $u \in V$ existuje i , $1 \leq i \leq n$, takové, že $(u, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ je opět báze V .

Dále budeme místo jednoho vektoru u uvažovat lineárně nezávislou množinu u_1, \dots, u_k a budeme postupně přidávat u_1, u_2, \dots , vždy výměnou za vhodné v_i podle předchozího postupu. Je třeba pouze ověřit, že takové v_i vždy bude existovat (tj. že se nebudou vektory u vyměňovat vzájemně). Předpokládejme tedy, že již máme umístěné u_1, \dots, u_ℓ . Pak $u_{\ell+1}$ se jistě vyjádří jako lineární kombinace těchto vektorů a zbylých v_j . Pokud by pouze koeficienty u u_1, \dots, u_ℓ byly nenulové, znamenalo by to, že již samy vektory $u_1, \dots, u_{\ell+1}$ byly lineárně závislé, což je ve sporu s našimi předpoklady.

Pro každé $k \leq n$ tak po k krocích získáme bázi ve které z původní došlo k výměně k vektorů za nové. Pokud by $k > n$, pak již v n -tém kroku obdržíme bázi vybranou z těchto vektorů, což znamená, že nemohou být lineárně nezávislé. Zejména tedy není možné, aby dvě báze měly různý počet prvků. \square

Ve skutečnosti jsme dokázali silnější tvrzení, tzv. *Steinitzovu větu o výměně*, která říká, že pro každou konečnou bázi a každý systém lineárně nezávislých vektorů ve V umíme najít podmnožinu bázových vektorů, které záměnou za zadané nové vektory dají opět bázi. Můžeme si také sformulovat zjevné důsledky:

Tvrzení. (1) *Každé dvě báze konečněrozměrného vektorového prostoru mají stejný počet vektorů, tzn. že naše definice dimenze nezávisí na volbě báze.*

(2) *Má-li V konečnou bázi, lze každou lineárně nezávislou množinu doplnit do báze.*

(3) *Báze konečněrozměrných vektorových prostorů jsou právě maximální lineárně nezávislé množiny*

(4) *Báze prostoru s konečnou dimenzí jsou právě minimální množiny generátorů*

Důsledek. *Nechť $W, W_1, W_2 \subset V$ jsou podprostory v prostoru konečné dimenze. Pak platí*

(1) $\dim W \leq \dim V$

(2) $V = W$ právě když $\dim V = \dim W$

(3) $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$.

DŮKAZ. Zbývá dokázat pouze poslední tvrzení. To je zřejmé, pokud je dimenze jednoho z prostorů nulová. Předpokládejme tedy $\dim W_1 = r \neq 0$, $\dim W_2 = s \neq 0$ a necht' (w_1, \dots, w_t) je báze $W_1 \cap W_2$ (nebo prázdná množina, pokud je průnik triviální). Podle předchozí věty lze tuto bázi doplnit na bázi $(w_1, \dots, w_t, u_{t+1}, \dots, u_r)$ pro W_1 a bázi $(w_1, \dots, w_t, v_{t+1}, \dots, v_s)$ pro W_2 . Vektory $w_1, \dots, w_t, u_{t+1}, \dots, u_r, v_{t+1}, \dots, v_s$ jistě generují $W_1 + W_2$. Ukážeme, že jsou přitom lineárně nezávislé. Necht'

$$a_1 \cdot w_1 + \dots + a_t \cdot w_t + b_{t+1} \cdot u_{t+1} + \dots + b_r \cdot u_r + c_{t+1} \cdot v_{t+1} + \dots + c_s \cdot v_s = 0$$

Pak $-(c_{t+1} \cdot v_{t+1} + \dots + c_s \cdot v_s) = a_1 \cdot w_1 + \dots + a_t \cdot w_t + b_{t+1} \cdot u_{t+1} + \dots + b_r \cdot u_r$ musí patřit do $W_2 \cap W_1$. To ale má za následek, že $b_{t+1} = \dots = b_r = 0$. Pak ovšem i $a_1 \cdot w_1 + \dots + a_t \cdot w_t + c_{t+1} \cdot v_{t+1} + \dots + c_s \cdot v_s = 0$ a protože příslušné vektory tvoří bázi W_2 , jsou všechny koeficienty nulové. Tvrzení (3) se nyní ověří přímým počítáním generátorů. \square

2.21 **2.28. Příklady.** (1) \mathbb{K}^n má (jako vektorový prostor nad \mathbb{K}) dimenzi n . Bazí je např. n -tice vektorů

$$((1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)).$$

Tuto bázi nazýváme *standardní báze v \mathbb{K}^n* . V případě konečného pole skalárů, např. \mathbb{Z}_k , má celý vektorový prostor \mathbb{K}^n jen konečný počet prvků. Kolik?

- (2) \mathbb{C} jako vektorový prostor nad \mathbb{R} má dimenzi 2, bázi tvoří např. čísla 1 a i .
- (3) $\mathbb{K}_m[x]$, tj. prostor polynomů stupně nejvýše m , má dimenzi $m + 1$, bázi je např. posloupnost $1, x, x^2, \dots, x^m$. Vektorový prostor všech polynomů $\mathbb{K}[x]$ má dimenzi ∞ , umíme však ještě stále najít bázi (i když s nekonečně mnoha prvky): $1, x, x^2, \dots$.
- (4) Vektorový prostor \mathbb{R} nad \mathbb{Q} má dimenzi ∞ a nemá spočetnou bázi.
- (5) Vektorový prostor všech zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ má také dimenzi ∞ a nemá spočetnou bázi.

2.22

2.29. Souřadnice vektorů. Když je množina $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ je báze, můžeme každý vektor $v \in V$ vyjádřit jako lineární kombinaci $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$. Předpokládejme, že to uděláme dvěma způsoby:

$$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n = b_1v_1 + \dots + b_nv_n.$$

Potom ale

$$0 = (a_1 - b_1) \cdot v_1 + \dots + (a_n - b_n) \cdot v_n$$

a proto $a_i = b_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. Lze tedy každý vektor zadat právě jedním způsobem jako lineární kombinaci bázevých vektorů. Koefficienty této jediné lineární kombinace vyjadřující daný vektor $v \in V$ ve zvolené bázi (v_1, \dots, v_n) se nazývají *souřadnice vektoru v v této bázi*.

Přiřazení, které vektoru $u = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ přiřadí jeho souřadnice v bázi v , budeme značit stejným symbolem $\underline{v} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$. Má tyto vlastnosti:³

- $\underline{v}(u + w) = \underline{v}(u) + \underline{v}(w); \forall u, w \in V$
- $\underline{v}(a \cdot u) = a \cdot \underline{v}(u); \forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in V$.

To jsou ale vlastnosti zobrazení, kterým jsme v geometrii roviny říkali lineární (zachovávaly naši lineární strukturu v rovině). Jsou tedy souřadnice vlastně lineární zobrazení z (abstraktního) vektorového prostoru V do n -tic skalárů \mathbb{K}^n , kde n je dimenze V . Než se budeme věnovat podrobněji závislosti souřadnic na volbě báze, podíváme se obecněji na pojem linearitu zobrazení.

2.30. Příklad. Příklad. Určete všechny konstanty $a \in \mathbb{R}$ takové, aby polynomy $ax^2 + x + 2$, $-2x^2 + ax + 3$ a $x^2 + 2x + a$ byly lineárně závislé (ve vektorovém prostoru polynomů jedné proměnné stupně nejvýše 3 nad reálnými čísly).

Řešení. V bázi $1, x, x^2$ jsou souřadnice zadaných vektorů (polynomů) následující: $(a, 1, 2)$, $(-2, a, 3)$, $(1, 2, a)$. Polynomy budou závislé, právě když bude mít matice, jejíž řádky jsou tvořeny souřadnicemi zadaných vektorů menší hodnot, než je počet vektorů, v tomto případě tedy hodnot dvě a menší. V případě čtvercové matice nižší hodnot než je počet řádků je ekvivalentní nulovosti determinantu dané matice. Podmínka na a tedy zní

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ -2 & a & 3 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0,$$

³Všimněme si, že operace na levých a pravých stranách těchto rovnic nejsou totožné, naopak, jde o operace na různých vektorových prostorech! Při této příležitosti se také můžeme zamyslet nad obecným případem báze M (možná nekonečněrozměrného) prostoru V . Báze pak nemusí být spočetná, pořád ale ještě můžeme definovat zobrazení $\underline{M} : V \rightarrow \mathbb{K}^M$ (tj. souřadnice vektoru jsou zobrazení z M do \mathbb{K}).

tj. a bude kořenem polynomu $a^3 - 6a - 5 = (a + 1)(a^2 - a - 5)$, tj. úloha má tři řešení $a_1 = -1$, $a_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. \square

2.23

2.31. Lineární zobrazení. Necht V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů \mathbb{K} . Zobrazení $f : V \rightarrow W$ se nazývá *lineární zobrazení (homomorfismus)* jestliže platí:

- (1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in V$
- (2) $f(a \cdot u) = a \cdot f(u)$, $\forall a \in \mathbb{K}$, $\forall u \in V$.

Samozřejmě, že jsme taková zobrazení již viděli ve formě násobení matic:

$$\mathbb{K}^n \ni x \mapsto A \cdot x \in \mathbb{K}^m$$

s maticí typu m/n nad \mathbb{K} . *Obraz* $\text{Im} f := f(V) \subset W$ je zjevně vektorový podprostor. Stejně tak je vektorovým podprostorem množina všech vektorů $\text{Ker} f := f^{-1}(\{0\}) \subset V$. Nazývá se *jádro lineárního zobrazení* f . Lineární zobrazení, které je bijekcí nazýváme *izomorfismus*.

Podobně jako u abstraktní definice vektorových prostorů, i zde je na místě z axiomů ověřit zdánlivě samozřejmá tvrzení:

Tvrzení. *Necht $f : V \rightarrow W$ je lineární zobrazení. Pro všechny $u, u_1, \dots, u_k \in V$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:*

- (1) $f(0) = 0$
- (2) $f(-u) = -f(u)$
- (3) $f(a_1 \cdot u_1 + \dots + a_k \cdot u_k) = a_1 \cdot f(u_1) + \dots + a_k \cdot f(u_k)$
- (4) *pro každý vektorový podprostor $V_1 \subset V$ je jeho obraz $f(V_1)$ vektorový podprostor ve W .*
- (5) *Pro každý podprostor $W_1 \subset W$ je množina $f^{-1}(W_1) = \{v \in V; f(v) \in W_1\}$ vektorový podprostor ve V .*

DŮKAZ. Počítáme s využitím axiomů a definic a již dokázaných výsledků – dohleďte samostatně!

$$f(0) = f(u - u) = f((1 - 1) \cdot u) = 0 \cdot f(u) = 0.$$

$$f(-u) = f((-1) \cdot u) = (-1) \cdot f(u) = -f(u).$$

Vlastnost (3) se ověří snadno indukcí z definičního vztahu.

Z (3) nyní plyne, že $\langle f(V_1) \rangle = f(V_1)$, je to tedy vektorový podprostor.

Je-li naopak $f(u) \in W_1$ a $f(v) \in W_1$, pak pro libovolné skaláry bude i $f(a \cdot u + b \cdot v) = a \cdot f(u) + b \cdot f(v) \in W_1$. \square

2.24

2.32. Jednoduché důsledky.

- (1) Složení $g \circ f : V \rightarrow Z$ dvou lineárních zobrazení $f : V \rightarrow W$ a $g : W \rightarrow Z$ je opět lineární zobrazení.
- (2) Lineární zobrazení $f : V \rightarrow W$ je izomorfismus právě když $\text{Im} f = W$ a $\text{Ker} f = \{0\} \subset V$. Inverzní zobrazení k izomorfismu je opět izomorfismus.
- (3) Pro podprostory V_1, V_2 a lineární zobrazení $f : V \rightarrow W$ platí $f(V_1 + V_2) = f(V_1) + f(V_2)$, $f(V_1 \cap V_2) \subset f(V_1) \cap f(V_2)$.
- (4) Zobrazení "přiřazení souřadnic" $\underline{u} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ dané libovolně zvolenou bází $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ vektorového prostoru V je izomorfismus.
- (5) Dva konečněrozměrné vektorové prostory jsou izomorfní právě když mají stejnou dimenzi.
- (6) Složení dvou izomorfismů je izomorfismus.

DŮKAZ. Ověření prvního tvrzení je snadné cvičení. Pro druhé si uvědomme, že je-li f lineární bijekce, pak $w = f^{-1}(au + bv)$ právě, když $f(w) = f(a \cdot f^{-1}(u) + b \cdot f^{-1}(v))$. Je tedy inverze k lineární bijekci opět lineární zobrazení. Dále, f je surjektivní právě, když $\text{Im } f = W$ a pokud $\text{Ker } f = \{0\}$, pak $f(u) = f(v)$ zaručuje $f(u - v) = 0$, tj. $u = v$. Je tedy v tom případě f injektivní.

Další tvrzení se dokáže snadno přímo z definic. Najděte si protipříklad, že v dokazované inkluzi opravdu nemusí nastat rovnost! Zbývající body jsou již zřejmé. \square

2.33. Opět souřadnice. Uvažujme libovolné vektorové prostory V, W nad \mathbb{K} s $\dim V = n$, $\dim W = m$ a mějme lineární zobrazení $f : V \rightarrow W$. Pro každou volbu bázi $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na V , $\underline{v} = (v_1, \dots, v_m)$ na W , máme k dispozici příslušná přiřazení souřadnic:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \underline{u} \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \underline{v} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_{\underline{u}, \underline{v}}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Přitom je každé lineární zobrazení jednoznačně určeno svými hodnotami na libovolné množině generátorů, zejména tedy na bázi \underline{u} . Označme

$$f(u_1) = a_{11} \cdot v_1 + a_{21} \cdot v_2 + \dots + a_{m1} v_m$$

$$f(u_2) = a_{12} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \dots + a_{m2} v_m$$

$$\vdots$$

$$f(u_n) = a_{1n} \cdot v_1 + a_{2n} \cdot v_2 + \dots + a_{mn} v_m$$

tj. skaláry a_{ij} tvoří matici A , kde sloupce jsou souřadnice hodnot zobrazení f na bázových vektorech. Pro obecný vektor $u = b_1 \cdot u_1 + \dots + b_n \cdot u_n$ spočteme

$$\begin{aligned} f(u) &= b_1 \cdot f(u_1) + \dots + b_n \cdot f(u_n) \\ &= b_1(a_{11}v_1 + \dots + a_{m1}v_m) + \dots + b_n(a_{1n}v_1 + \dots + a_{mn}v_m) \\ &= (b_1a_{11} + \dots + b_na_{1n}) \cdot v_1 + \dots + (b_1a_{m1} + \dots + b_na_{mn}) \cdot v_m \end{aligned}$$

Pomocí násobení matic lze nyní velice snadno a přehledně zapsat hodnoty zobrazení $f_{\underline{u}, \underline{v}}(w)$ definovaného jednoznačně předchozím diagramem. Připomeňme si, že vektory v \mathbb{K}^k chápeme jako sloupce, tj. matice typu $k/1$

$$f_{\underline{u}, \underline{v}}(\underline{u}(w)) = \underline{v}(f(w)) = A \cdot \underline{u}(w).$$

Matici A nazýváme *maticí zobrazení f* v bázích $\underline{u}, \underline{v}$. Naopak, každá volba matice A typu m/n zadává jednoznačně lineární zobrazení $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$. Máme-li tedy zvoleny báze prostorů V a W , odpovídá každé volbě matice typu m/n právě jedno lineární zobrazení $V \rightarrow W$.

Jestliže za V i W zvolíme tentýž prostor, ale s různými bazemi, a za f identické zobrazení, vyjadřuje náš postup vektory báze \underline{u} v souřadnicích vzhledem k \underline{v} . Označme výslednou matici T . Když pak zadáme vektor u

$$u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$$

v souřadnicích vzhledem k \underline{u} a dosadíme za u_i , obdržíme souřadné vyjádření \bar{x} téhož vektoru v bázi \underline{v} . Stačí k tomu přeskádat pořadí sčítanců a vyjádřit skaláry u jednotlivých vektorů báze. Podle výše uvedeného postupu musí vyjít $\bar{x} = T \cdot x$.

Tuto matici nazýváme *matice přechodu* od báze \underline{u} k bázi \underline{v} . Matice T zadávající transformaci souřadnic z báze \underline{u} do báze \underline{v} je tedy maticí identického zobrazení $\text{id}_V : V \rightarrow V$:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V \\ \underline{u} \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \underline{v} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{(\text{id}_V)_{\underline{u}, \underline{v}}} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Přímo z definice vyplývá:

Tvrzení. *Matice T přechodu (od báze \underline{u} k bázi \underline{v}) získáme tak, že souřadnice vektorů báze \underline{u} v bázi \underline{v} napíšeme do sloupců matice T .*

Funkce matice přechodu je taková, že známe-li souřadnice x vektoru v v bázi \underline{u} , pak jeho souřadnice v bázi \underline{v} se obdrží vynásobením sloupce x maticí přechodu (zleva). Protože inverzní zobrazení k identickému je opět totéž identické zobrazení, je matice přechodu vždy invertibilní a její inverze je právě matice přechodu opačným směrem, tj. od báze \underline{v} k bázi \underline{u} .

2.26

2.34. Více souřadnic. Nyní snadno vidíme, jak se skládají souřadná vyjádření lineárních zobrazení. Uvažme ještě další vektorový prostor Z nad \mathbb{K} dimenze k s bázi \underline{w} , lineární zobrazení $g : W \rightarrow Z$ a označme příslušnou matici $g_{\underline{v}, \underline{w}}$. Pro matice těchto zobrazení dostáváme čímž jsme odvodili:

$$g_{\underline{v}, \underline{w}} \circ f_{\underline{u}, \underline{v}}(x) = B \cdot (A \cdot x) = (B \cdot A) \cdot x = (g \circ f)_{\underline{u}, \underline{w}}(x)$$

pro všechny $x \in \mathbb{K}^n$. Všimněte si, že isomorfismy odpovídají právě invertibilním maticím.

Stejný postup nám dává odpověď na otázku, jak se změní matice zobrazení, změníme-li báze na definičním oboru i oboru hodnot:

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{\text{id}_W} & W \\ \underline{u}' \downarrow \simeq & & \underline{u} \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \underline{v} & & \simeq \downarrow \underline{w}' \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{T} & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_{\underline{u}, \underline{v}}} & \mathbb{K}^m & \xrightarrow{S^{-1}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

kde T je matice přechodu od \underline{u}' k \underline{u} a S je matice přechodu od \underline{v}' k \underline{v} . Je-li tedy A původní matice zobrazení, bude nová dána jako $A' = S^{-1}AT$.

Ve speciálním případě lineárního zobrazení $f : V \rightarrow V$ vyjadřujeme zpravidla f pomocí jedné báze \underline{u} prostoru V , to je přechod k nové bázi \underline{u}' bude znamenat změnu na $A' = T^{-1}AT$.

2.35. Příklad. *Je dáno lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ve standardní bázi následující maticí:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Napište matici tohoto zobrazení v bázi

$$\begin{aligned} f_1 &= (1, 1, 0) \\ f_2 &= (-1, 1, 1) \\ f_3 &= (2, 0, 1). \end{aligned}$$

Řešení. Matice přechodu T od báze $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ k standardní bázi, tj. bázi danou vektory $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, získáme podle Tvzení 2.25 zapsáním souřadnic vektorů f_1, f_2, f_3 ve standardní bázi do sloupců matice přechodu T . Máme tedy

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu od standardní báze k bázi \underline{f} je potom T^{-1} , což je

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matice zobrazení v bázi \underline{f} je potom

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 2 & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} & -2 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

□

2.27

2.36. Lineární a multilineární formy. Speciálním případem lineárních zobrazení jsou tzv. *lineární formy*. Jde o lineární zobrazení z vektorového prostoru V nad polem skalárů \mathbb{K} do skalárů \mathbb{K} . Jsou-li dány souřadnice na V , je přiřazení jednotlivé i -té souřadnice vektorům právě takovou lineární formou.

Při pevně zvolené bázi $\{1\}$ na \mathbb{K} jsou s každou volbou báze na V lineární formy ztotožněny s maticemi typu $1/n$, tj. s řádky. Vyčíslení takové formy na vektoru je pak dáno vynásobením příslušného řádkového vektoru se sloupcem souřadnic.

Množina všech lineárních forem na daném prostoru V je opět vektorový prostor, značíme jej V^* . Pokud je V konečněrozměrný, je V^* izomorfní prostoru V . Realizace takového izomorfismu je dána např. volbou tzv. *duální báze* k zvolené bázi na V , jejímiž prvky α_i jsou právě formy zadávající i -tou souřadnici.

Podobně budeme pracovat i se zobrazeními ze součinu k kopií vektorového prostoru V do skalárů lineárních v každém argumentu. Hovoříme o *k -lineárních formách*. Budeme se setkávat (a již jsme je viděli v dimenzi 2) zejména s n -lineárními antisymetrickými formami (formy objemu) a symetrickými bilineárními formami.

2.28

2.37. Velikost vektorů. V geometrii roviny jsem již pracovali nejen s bázemi a lineárními zobrazeními, ale také s velikostí vektorů a jejich úhly. Pro zavedení těchto pojmů jsme použili souřadného vyjádření pro velikost $v = (x, y)$:

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

zatímco úhel φ dvou vektorů $v = (x, y)$ a $v' = (x', y')$ byl dán

$$\cos \varphi = \frac{xx' + yy'}{\|v\|\|v'\|}.$$

Povšimněme si, že výraz v čitateli posledního výrazu je lineární v každém ze svých argumentů, značíme jej $\langle v, v' \rangle$ a říkáme mu skalární součin vektorů v a v' . Skalární součin je také symetrický ve svých argumentech a platí

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle.$$

Zejména platí, že $\|v\| = 0$ právě, když $v = 0$. Z našich úvah je také vidět, že v Euklidovské rovině jsou dva vektory kolmé právě, když je jejich skalární součin nulový.

Analogicky budeme postupovat v obecném případě reálného vektorového prostoru. *Skalární součin* na vektorovém prostoru V nad reálnými čísly je bilineární symetrická forma $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že $\langle v, v \rangle \geq 0$ a je roven nule pouze při $v = 0$. Pro skalární součin se často používá také obvyklé tečky, tj. $\langle u, v \rangle = u \cdot v$. Z kontextu je pak třeba poznat, zda jde o součin dvou vektorů (tedy výsledkem je skalár) nebo něco jiného.

Vektory v a $w \in V$ se nazývají *ortogonální*, jestliže $\langle v, w \rangle = 0$. Vektor v se nazývá *normovaný*, jestliže $\|v\| = 1$. Báze prostoru V složená z ortogonálních vektorů se nazývá *ortogonální báze*. Jsou-li báze vektory navíc i normované, je to *ortonormální báze*.

Úhel φ dvou vektorů v a w je dán vztahem

$$\cos \varphi = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Tvrzení. *Skalární součin je v každé ortonormální bázi dán výrazem*

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot y.$$

V obecné bázi V existuje symetrická matice S taková, že

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot S \cdot y.$$

DŮKAZ. Skalární součin je plně určen svými hodnotami na dvojicích báze vektorů. Zvolme tedy bázi \underline{u} a označme

$$s_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle.$$

Pak ze symetričnosti skalárního součinu plyne $s_{ij} = s_{ji}$ a z lineárnosti součinu v každém z argumentů dostáváme:

$$\left\langle \sum_i x_i u_i, \sum_j y_j u_j \right\rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i,j} s_{ij} x_i y_j.$$

Pokud je báze ortonormální, je matice S jednotkovou maticí. \square

Uvidíme o něco později, že na každém vektorovém prostoru se skalárním součinem existují ortonormální báze, viz 2.46.

4. Vlastnosti lineárních zobrazení

Podrobnějším rozбором vlastností různých typů lineárních zobrazení se nyní dostaneme k pořádnějšímu pochopení nástrojů, které nám vektorové prostory pro lineární modelování procesů a systémů nabízejí.

2.29

2.38. Příklady. Začneme několika příklady v prostorech malých dimenzí. Ve standardní bázi \mathbb{R}^2 uvažujme následující matice zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice A zadává kolmou projekci podél podprostoru

$$W \subset \{(0, a); a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

na podprostor

$$V \subset \{(a, 0); a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Evidentně pro toto zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ platí $f \circ f = f$ a tedy $f|_{\text{Im } f}$ je identické zobrazení. Jádrem f je právě podprostor W .

Matrice B má vlastnost $B^2 = 0$, platí tedy totéž o příslušném zobrazení f . Můžeme si jej představit jako matici derivování polynomů $\mathbb{R}_1[x]$ stupně nejvýše jedna v bázi $(1, x)$.

Matrice C zadává zobrazení f , které první vektor báze zvětší a -krát, druhý b -krát. Tady se nám tedy celá rovina rozpadá na dva podprostory, které jsou zobrazením f zachovány a ve kterých jde o pouhou *homotetii*, tj. roztažení skalárním násobkem. Např. volba $a = 1, b = -1$ odpovídá komplexní konjugaci $x + iy \mapsto x - iy$ na dvourozměrném reálném prostoru $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ v bázi $(1, i)$. Toto je lineární zobrazení reálného vektorového prostoru, nikoliv však jednorozměrného komplexního prostoru \mathbb{C} . V geometrii roviny jde o zrcadlení podle osy x .

Matrice D je maticí rotace o pravý úhel ve standardní bázi. Jako pro každé lineární zobrazení, které je bijekcí, umíme najít báze na definičním oboru a oboru hodnot, ve kterých bude jeho maticí jednotková matice E (prostě vezmeme jakoukoliv bázi na definičním oboru a její obraz na oboru hodnot). Neumíme ale v tomto případě totéž s jednou bází na začátku i konci. Zkusme však uvažovat matici C jako matici zobrazení $g: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Pak umíme najít vektory $u = (i, 1), v = (1, i)$, pro které bude platit

$$g(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \cdot u, \quad g(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i \cdot v.$$

To ale znamená, že v bázi (u, v) na \mathbb{C}^2 má g matici

$$K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

a povšimněme si, že tato komplexní analogie k případu matice C má na diagonále prvky $\pm a$, $a = \cos(\frac{1}{2}\pi) + i \sin(\frac{1}{2}\pi)$. Jinými slovy, argument v goniometrickém tvaru tohoto komplexního čísla udává úhel otočení. Navíc, můžeme si označit reálnou a imaginární část vektoru u takto

$$u = x_u + iy_u = \text{Re } u + i \text{Im } u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a zúžení komplexního zobrazení g na reálný vektorový podprostor generovaný vektory x_u a iy_u (tj. násobení komplexní jednotkou i) je právě otočení o úhel $\frac{1}{2}\pi$.

2.30

2.39. Vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení. Klíčem k popisu zobrazení v předchozích příkladech byly odpovědi na otázku „jaké jsou vektory splňující rovnici $f(u) = a \cdot u$ “ pro nějaké skaláry a . Zvolme tedy pevně lineární zobrazení $f: V \rightarrow V$ na vektorovém prostoru dimenze n nad skaláry \mathbb{K} . Jestliže si představíme takovou rovnost zapsanou v souřadnicích, tj. s využitím matice zobrazení A v nějakých bazích, jde o výraz

$$A \cdot x - a \cdot x = (A - a \cdot E) \cdot x = 0.$$

Z předchozího víme, že taková soustava rovnic má jediné řešení $x = 0$, pokud je matice $A - aE$ invertibilní. My tedy chceme najít takové hodnoty $a \in \mathbb{K}$, pro které

naopak $A - aE$ invertibilní není, a nutnou a dostatečnou podmínkou je (viz Věta 2.22)

$$\boxed{\text{e2.1}} \quad (2.1) \quad \det(A - a \cdot E) = 0.$$

Jestliže považujeme $\lambda = a$ za proměnnou v předchozí skalární rovnici, hledáme ve skutečnosti kořeny polynomu stupně n . Jak jsme viděli v případě matice D výše, kořeny mohou, ale nemusí existovat podle volby pole skalárů \mathbb{K} .

Skaláry vyhovující rovnici $f(u) = a \cdot u$ pro nenulový vektor $u \in V$ nazýváme *vlastní čísla zobrazení f* , příslušné vektory u pak *vlastní vektory zobrazení f* .

Z definice vlastních čísel je zřejmé, že jejich výpočet nemůže záviset na volbě báze a tedy matice zobrazení f . Skutečně, jako přímý důsledek transformačních vlastností z 2.34 a Cauchyovy věty 2.18 pro výpočet determinantu součinu dostáváme jinou volbou souřadnic matici $A' = P^{-1}AP$ s invertibilní maticí P a

$$|P^{-1}AP - \lambda E| = |P^{-1}AP - P^{-1}\lambda EP| = |P^{-1}(A - \lambda E)P| = |P^{-1}| |(A - \lambda E)P|,$$

protože násobení skalárů je komutativní a $|P^{-1}| = |P|^{-1}$.

Obdobnou terminologii používáme i pro matice. Pro matici A dimenze n nad \mathbb{K} nazýváme polynom $|A - \lambda E| \in \mathbb{K}_n[\lambda]$ *charakteristický polynom matice A* . Kořeny tohoto polynomu jsou *vlastní hodnoty matice A* . Je-li A matice zobrazení $f : V \rightarrow V$ v jisté bázi, pak $|A - \lambda E|$ nazýváme také *charakteristický polynom zobrazení f* .

Protože je charakteristický polynom zobrazení $f : V \rightarrow V$ nezávislý na volbě báze V , $\dim V = n$, jsou i jeho koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné λ skaláry vyjadřující vlastnosti zobrazení f , tj. nemohou záviset na naší volbě báze. Zejména je snadné vyjádřit koeficienty u nejvyšších a nejnižších mocnin:

$$|A - \lambda \cdot E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) \cdot \lambda^{n-1} + \dots + |A| \cdot \lambda^0$$

Součet diagonálních členů matice se nazývá *stopa matice*, značíme ji $\text{Tr}A$, *stopa zobrazení* je definována jako stopa jeho matice v libovolné bázi.

2.30a **2.40. Věta.** *Vlastní vektory lineárního zobrazení $f : V \rightarrow V$ příslušné různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.*

DŮKAZ. Nechť a_1, \dots, a_k jsou různé vlastní hodnoty zobrazení f a u_1, \dots, u_k vlastní vektory s těmito vlastními hodnotami. Důkaz provedeme indukcí přes počet lineárně nezávislých vektorů mezi zvolenými. Předpokládejme, že u_1, \dots, u_ℓ jsou lineárně nezávislé a $u_{\ell+1} = \sum_i c_i u_i$ je jejich lineární kombinací. Alespoň $\ell = 1$ lze zvolit, protože vlastní vektory jsou nenulové. Pak ovšem $a_{\ell+1} \cdot u_{\ell+1} = \sum_{i=1}^{\ell} a_{\ell+1} \cdot c_i \cdot u_i$, tj.

$$f(u_{\ell+1}) = \sum_{i=1}^{\ell} a_{\ell+1} \cdot c_i \cdot u_i = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \cdot f(u_i) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \cdot a_i \cdot u_i.$$

Odečtením dostáváme $0 = \sum_{i=1}^{\ell} (a_{\ell+1} - a_i) \cdot c_i \cdot u_i$, všechny rozdíly vlastních hodnot jsou nenulové a alespoň jeden koeficient c_i je nenulový. To je spor s předpokládanou nezávislostí u_1, \dots, u_ℓ . \square

Důsledek. *Jestliže existuje n navzájem různých kořenů a_i charakteristického polynomu zobrazení $f : V \rightarrow V$, $\dim V = n$, pak existuje rozklad V na přímý součet vlastních podprostorů dimenze 1. To znamená, že existuje báze V složená výhradně z vlastních vektorů a v této bázi má f diagonální matici. Příslušnou bázi (vyjádřenou v souřadnicích vzhledem k libovolně zvolené bázi V) obdržíme řešením n systémů*

homogenních lineárních rovnic o n neznámých s maticemi $(A - a_i \cdot E)$, kde A je matice f ve zvolené bázi.

2.31 **2.41. Příklady.** (1) Uvažme zobrazení s maticí ve standardní bázi

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak dostáváme

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1,$$

s kořeny $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1$. Vlastní vektory s vlastní hodnotou $\lambda = 1$ se spočtou:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

s bázi prostoru řešení, tj. všech vlastních vektorů s touto vlastní hodnotou

$$u_1 = (0, 1, 0), \quad u_2 = (1, 0, 1).$$

Podobně pro $\lambda = -1$ dostáváme třetí nezávislý vlastní vektor

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_3 = (-1, 0, 1).$$

V bázi u_1, u_2, u_3 (všimněte si, že u_3 musí být lineárně nezávislý na zbylých dvou díky předchozí větě a u_1, u_2 vyšly jako dvě nezávislá řešení) má f diagonální matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Celý prostor \mathbb{R}^3 je přímým součtem vlastních podprostorů, $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 1$. Tento rozklad je dán jednoznačně a vypovídá mnoho o geometrických vlastnostech zobrazení f . Vlastní podprostor V_1 je navíc přímým součtem jednorozměrných vlastních podprostorů, které lze však zvolit mnoha různými způsoby (takový další rozklad nemá tedy již žádný geometrický význam).

(2) Uvažme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definované derivováním polynomů, tj. $f(1) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x^2) = 2x$. Zobrazení f má tedy v obvyklé bázi $(1, x, x^2)$ matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je $|A - \lambda \cdot E| = -\lambda^3$, existuje tedy pouze jediná vlastní hodnota, $\lambda = 0$. Spočtěme vlastní vektory:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prostor vlastních vektorů je tedy jednorozměrný, generovaný konstantním polynomem 1.

2.42. Příklad včetně změny báze. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané ve standardní bázi maticí:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete toto zobrazení a napište jeho matici v bázi:

$$e_1 = [1, -1, 1]$$

$$e_2 = [1, 2, 0]$$

$$e_3 = [0, 1, 1]$$

Řešení. Spočítejme nejprve vlastní čísla jim příslušné vlastní vektory: charakteristický polynom dané matice je

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 2).$$

Kořeny tohoto polynomu, vlastní čísla, udávají, kdy nebude mít matice

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

plnou hodnotu, tedy soustava rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

bude mít i jiné řešení než řešení $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$. Vlastní čísla tedy jsou 0 , $2 + \sqrt{2}$, $2 - \sqrt{2}$. Spočítejme vlastní vektory příslušné jednotlivým vlastním hodnotám:

- 0 : Řešíme tedy soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Její řešení je jednodimenzionální vektorový prostor vlastních vektorů $\langle\langle 1, -1, 1 \rangle\rangle$.

- $2 + \sqrt{2}$: Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} -(1 + \sqrt{2}) & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 & -(1 + \sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Řešením je jednodimenzionální prostor $\langle\langle 1, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \rangle\rangle$.

- $2 - \sqrt{2}$: Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} (\sqrt{2} - 1) & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 & (\sqrt{2} - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Řešením je prostor vlastních vektorů $\langle\langle 1, 1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2} \rangle\rangle$.

Zobrazení tedy můžeme interpretovat jako projekci podél vektoru $(1, -1, 1)$ do roviny dané vektory $(1, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ a $(1, 1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ složenou s lineárním zobrazením daným natažením daným vlastními čísly ve směru uvedených vlastních vektorů.

Nyní jej vyjádříme v uvedené bázi. K tomu budeme potřebovat matici přechodu T od standardní báze k dané nové bázi. Tu získáme tak, že souřadnice vektorů staré báze v bázi nové napíšeme do sloupců matice T . My však snadněji zapíšeme matici přechodu od příklané báze k bázi standardní, tedy matici T^{-1} . Souřadnice vektorů nové báze pouze zapíšeme do sloupců:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pro matici B zobrazení v nové bázi pak máme (viz 2.34).

$$B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

2.32

2.43. Spektra a nilpotentní zobrazení. *Spektrum lineárního zobrazení $f : V \rightarrow V$ je posloupnost kořenů charakteristického polynomu zobrazení f , včetně násobností. Algebraickou násobností vlastní hodnoty rozumíme její násobnost jako kořenu charakteristického polynomu, geometrická násobnost vlastní hodnoty je dimenze příslušného podprostoru vlastních vektorů.*

Lineární zobrazení $f : V \rightarrow V$ se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje celé číslo $k \geq 1$ takové, že iterované zobrazení f^k je identicky nulové. Nejmenší číslo k s touto vlastností se nazývá *stupněm nilpotentnosti* zobrazení f . Zobrazení $f : V \rightarrow V$ se nazývá *cyklické*, jestliže existuje báze (u_1, \dots, u_n) prostoru V taková, že $f(u_1) = 0$ a $f(u_i) = u_{i-1}$ pro všechna $i = 2, \dots, n$. Jinými slovy, matice f v této bázi je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Je-li $f(v) = a \cdot v$, pak pro každé přirozené k je $f^k(v) = a^k \cdot v$. Zejména tedy může spektrum nilpotentního zobrazení obsahovat pouze nulový skalár (a ten tam vždy je).

Přímo z definice plyne, že každé cyklické zobrazení je nilpotentní, navíc je jeho stupeň nilpotentnosti roven dimenzi prostoru V . Operátor derivování na polynomech definovaný v předchozím příkladu 2.41 je příkladem cyklického zobrazení. Kupodivu to platí i naopak a každé nilpotentní zobrazení je přímým součtem cyklických. Navíc pro každé lineární zobrazení $f : V \rightarrow V$, pro které je součet algebraických násobností vlastních čísel roven dimenzi (to nastane vždy pro prostory nad komplexními skaláry), existuje jednoznačný rozklad V na invariantní podprostory V_i příslušné k jednotlivým vlastním číslům λ_i , na kterých je zobrazení $f - \lambda_i \text{id}_{V_i}$ nilpotentní.

Tento dosti hluboký výsledek nebudeme dokazovat, sformulujeme jen výslednou větu o *Jordanově rozkladu*. V ní vystupují vektorové (pod)prostory a lineární

zobrazení na nich s jediným vlastním číslem λ a maticí

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Takovýmto maticím (a odpovídajícím invariantním podprostorům) se řídá *Jordanův blok*.

2.33 **2.44. Věta.** *Nechť V je vektorový prostor dimenze n a $f : V \rightarrow V$ je lineární zobrazení s n vlastními čísly včetně algebraických násobností. Pak existuje jednoznačný rozklad prostoru V na přímý součet podprostorů*

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

takových, že $f(V_i) \subset V_i$, zúžení f na každé V_i má jediné vlastní číslo λ_i a zúžení $f - \lambda_i \cdot \text{id}$ na V_i je buď cyklické nebo nulové zobrazení.

Věta tedy říká, že ve vhodné bázi má každé lineární zobrazení blokově diagonální tvar s Jordanovými bloky podél diagonály. Celkový počet jedniček nad diagonálou v takovém tvaru je roven rozdílu mezi celkovou algebraickou a geometrickou násobností vlastních čísel.

Všimněme si, že jsme tuto větu plně dokázali v případech, kdy jsou všechna vlastní čísla různá nebo když jsou geometrické a algebraické násobnosti vlastních čísel stejné.

2.45. Projekce. Lineární zobrazení $f : V \rightarrow V$ se nazývá *projekce*, jestliže platí

$$f \circ f = f.$$

V takovém případě je pro každý vektor $v \in V$

$$v = f(v) + (v - f(v)) \in \text{Im}(f) + \text{Ker}(f) = V$$

a je-li $v \in \text{Im}(f)$ a $f(v) = 0$, pak je $v = 0$. Je tedy přechází součet podprostorů přímý. Říkáme, že f je projekce na podprostor $W = \text{Im}(f)$ podél podprostoru $U = \text{Ker}(f)$. Slovy se dá projekce popsat přirozeně takto: rozložíme daný vektor na komponentu ve W a v U a tu druhou zapomeneme.

Předpokládejme nyní, že na V je definován skalární součin, viz 2.37. Pro každý pevně zvolený podprostor $W \subset V$ definujeme jeho *ortogonální doplněk*

$$W^\perp = \{u \in V; \langle u, v \rangle = 0 \text{ pro všechny } v \in W\}.$$

Přímo z definice je zjevné, že W^\perp je vektorový podprostor. Jestliže $W \subset V$ má bázi (u_1, \dots, u_k) je podmínka pro W^\perp dána jako k homogenních rovnic pro n proměnných. Bude tedy mít W^\perp dimenzi alespoň $n - k$. Zároveň ale $u \in W \cap W^\perp$ znamená $\langle u, u \rangle = 0$ a tedy $u = 0$ podle definice skalárního součinu. Zřejmě je tedy vždy

$$V = W \oplus W^\perp.$$

Každý podprostor $W \neq V$ definuje *kolmou projekci* na W . Je to projekce na W podél W^\perp .

2.33a

2.46. Existence ortonormální báze. Přímočaré početní využití kolmých projekcí vede k tzv. *Grammovu–Schmidtovu ortogonalizačnímu procesu*. Cílem procedury je z dané posloupnosti nenulových generátorů v_1, \dots, v_k konečněrozměrného prostoru V vytvořit ortogonální množinu nenulových generátorů pro V .

Začneme prvním (nenulovým) vektorem v_1 a spočteme kolmou projekci v_2 do

$$\langle v_1 \rangle^\perp \subset \langle \{v_1, v_2\} \rangle.$$

Výsledek bude nenulový právě, když je v_2 nezávislé na v_1 . Ve všech dalších krocích budeme postupovat obdobně.

V ℓ -tém kroku tedy chceme, aby pro $v_{\ell+1} = u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell$ platilo $\langle v_{\ell+1}, v_i \rangle = 0$, pro všechny $i = 1, \dots, \ell$. Odtud plyne

$$0 = \langle u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell, v_i \rangle = \langle u_{\ell+1}, v_i \rangle + a_i \langle v_i, v_i \rangle$$

a je vidět, že vektory s požadovanými vlastnostmi jsou určeny jednoznačně až na násobek. Dokázali jsme tedy následující tvrzení:

Tvrzení. *Nechť (u_1, \dots, u_k) je lineárně nezávislá k -tice vektorů prostoru V se skalárním součinem. Pak existuje ortogonální systém vektorů (v_1, \dots, v_k) takový, že $v_i \in \langle u_1, \dots, u_i \rangle$, $i = 1, \dots, k$. Získáme je následující procedurou:*

- Z nezávislosti vektorů u_i plyne $u_1 \neq 0$. Položíme $v_1 = u_1$.
- Máme-li již vektory v_1, \dots, v_ℓ potřebných vlastností klademe

$$v_{\ell+1} = u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell, \quad a_i = -\frac{\langle u_{\ell+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$$

Kdykoliv máme ortogonální bázi vektorového prostoru V , stačí vektory vynormovat a získáme bázi ortonormální. Dokázali jsme proto:

Důsledek. *Na každém vektorovém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.*

V ortonormální bázi se obzvlášť snadno spočtou souřadnice a kolmé projekce. Skutečně, mějme ortonormální bázi (e_1, \dots, e_n) prostoru V . Pak každý vektor $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ splňuje

$$\langle e_i, v \rangle = \langle e_i, x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \rangle = x_i$$

a platí tedy vždy

$$(2.2) \quad v = \langle e_1, v \rangle e_1 + \dots + \langle e_n, v \rangle e_n.$$

Pokud máme zadán podprostor $W \subset V$ a jeho ortonormální bázi (e_1, \dots, e_k) , jde ji jistě doplnit na ortonormální bázi (e_1, \dots, e_n) celého V . Kolmá projekce obecného vektoru $v \in V$ do W pak bude dána vztahem

$$v \mapsto \langle e_1, v \rangle e_1 + \dots + \langle e_k, v \rangle e_k.$$

Pro kolmou projekci nám tedy stačí znát jen ortonormální bázi podprostoru W , na nějž promítáme.

Povšimněme si také, že obecně jsou projekce f na podprostor W podél U a projekce g na U podél W svázány vztahem $g = \text{id}_V - f$. Je tedy u kolmých projekcí na daný podprostor W vždy výhodnější počítat ortonormální bázi toho z dvojice W, W^\perp , který má menší dimenzi.

Uvědomme si také, že existence ortonormální báze nám zaručuje, že pro každý prostor V se skalárním součinem existuje lineární zobrazení, které je izomorfismem

mezi V a prostorem \mathbb{R}^n se standardním skalárním součinem. Podrobně to bylo ukázáno již ve Tvzení 2.37, kde jsme ukázali, že hledaným izomorfismem je právě přiřazení souřadnic. Řečeno volnými slovy – v ortonormální bázi se skalární součin pomocí souřadnic počítá stejnou formuli jako standardní skalární součin v \mathbb{R}^n .

2.47. Příklad. Napište matici zobrazení kolmé projekce do roviny procházející počátkem a kolmé na vektor $(1, 1, 1)$.

Řešení. Obraz libovolného bodu (vektoru) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ v uvažovaném zobrazení získáme tak, že od daného bodu odečteme jeho kolmou projekci do normálového směru dané roviny, tedy do směru $(1, 1, 1)$. Tato projekce \mathbf{p} je dána (viz přednáška) jako

$$\frac{(\mathbf{x}, (1, 1, 1))}{|(1, 1, 1)|^2} = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right).$$

Výsledné zobrazení je tedy

$$\mathbf{x} - \mathbf{p} = \left(\frac{2x_1}{3} - \frac{x_2 + x_3}{3}, \frac{2x_2}{3} - \frac{x_1 + x_3}{3}, \frac{2x_3}{3} - \frac{x_1 + x_2}{3} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

□

2.48. Tři příklady k samostatnému řešení. Příklad.1. Napište nějakou bázi reálného vektorového prostoru matic 3×3 nad \mathbb{R} s nulovou stopou (součet prvků na diagonále) a napište souřadnice matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

v této bázi.

Příklad.2. Zaveďte nějaký skalární součin na vektorovém prostoru matic z předchozího příkladu. Spočítejte normu matice z předchozího příkladu, která je indukovaná Vámi zavedeným součinem.

Příklad.3. Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem nalezněte nějakou ortonormální bázi podprostoru $V \subset \mathbb{R}^4$, kde $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$.

2.36

2.49. Ortogonální zobrazení. Zobrazení $f : V \rightarrow W$, které zachovává velikosti pro všechny vektory $u \in V$, se nazývá *ortogonální zobrazení*. Požadujeme tedy

$$\langle f(u), f(u) \rangle = \langle u, u \rangle.$$

Z linearity f a symetrie skalárního součinu plyne

$$\langle f(u + v), f(u + v) \rangle = \langle f(u), f(u) \rangle + \langle f(v), f(v) \rangle + 2\langle f(u), f(v) \rangle,$$

je tedy ekvivalentní podmínkou i zdánlivě silnější požadavek, aby

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle,$$

pro všechny vektory $u, v \in V$. V úvodní diskusi o geometrii v rovině jsme ve Větě 1.44 dokázali, že lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zachovává velikosti vektorů právě, když jeho matice ve standardní bázi (a ta je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) splňuje $A^T \cdot A = E$, tj. $A^{-1} = A^T$.

Obecně, ortogonální zobrazení musí vždycky být injektivní, protože podmínka

$$\langle f(u), f(u) \rangle = 0$$

znamená i $\langle u, u \rangle = 0$ a tedy $u = 0$. Je tedy vždy v takovém případě dimenze oboru hodnot alespoň taková, jako je dimenze definičního oboru f . Pak ovšem je dimenze obrazu rovna dimenzi oboru hodnot a bez újmy na obecnost můžeme rovnou předpokládat, že jsou stejné a $f : V \rightarrow V$ (pokud by nebyly, doplníme ortonormální bázi na oboru hodnot na bázi cílového prostoru a matice zobrazení bude čtvercovou maticí A doplněnou nulami na potřebnou velikost). Naše podmínka pro matici ortogonálního zobrazení v ortonormální bázi pak říká pro všechny vektory x a y v prostoru \mathbb{K}^n toto:

$$(A \cdot x)^T \cdot (A \cdot y) = x^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot y = x^T \cdot y.$$

Speciálními volbami vektorů standardní báze za x a y dostaneme přímo, že $A^T \cdot A = E$, tedy tentýž výsledek jako v dimenzi 2! Dokázali jsme tak následující tvrzení:

Věta. *Nechť V je reálný vektorový prostor se skalárním součinem a $f : V \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak f je ortogonální právě, když v některé ortonormální bázi (a pak už všech) má matici A splňující $A^T = A^{-1}$.*

Skutečně, jestliže zachovává f velikosti, musí mít uvedenou vlastnost v každé ortonormální bázi. Naopak, předchozí výpočet ukazuje, že vlastnost matice v jedné bázi už zaručuje zachovávání velikostí.

Důsledkem této věty je také popis všech matic přechodu S mezi ortonormálními bázemi. Každá totiž musí zadávat zobrazení $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ zachovávající velikosti a splňují tedy také právě podmínku $S^{-1} = S^T$. Při přechodu od jedné báze ke druhé se tedy matice ortogonálního zobrazení mění podle vztahu

$$A' = S^T A S.$$

Linární modely

*kde jsou matice užitečné?
– nakonec skoro všude...*

2.37

1. Lineární rovnice a procesy

3.1. Systémy lineárních rovnic. Jednoduché lineární procesy jsou dány lineárními zobrazeními $\varphi : V \rightarrow W$ na vektorových prostorech. Pokud nám totiž vektor $v \in V$ představuje stav nějakého námi sledovaného jevu (třeba počty občanů třídných dle nejvyšší dosažené kvalifikace, stav zásob jednotlivých dílů a výrobků atd.), pak $\varphi(v)$ může představovat výsledek provedené operace (výsledek vzdělávací činnosti školské soustavy nebo výroba a prodej za určité časové období apod.). Pokud chceme dosáhnout předem daného výsledku $b \in W$ takového jednorázového procesu, řešíme problém

$$\varphi(x) = b$$

pro neznámý vektor x . V pevně zvolených souřadnicích pak máme matici A zobrazení φ a souřadné vyjádření vektoru b . Jak jsme si povšimnuli už v úvodu druhé kapitoly, řešení tzv. *homogenní úlohy*

$$A \cdot x = 0$$

je vektorovým podprostorem. Pokud je dimenze V konečná, řekněme n , a dimenze obrazu zobrazení φ je k , pak řešením této soustavy pomocí převodu na řádkový schodovitý tvar (viz 2.7) zjistíme, že dimenze podprostoru všech řešení je právě $n - k$. Skutečně, protože sloupce matice zobrazení jsou právě obrazy bázových vektorů, je v matici systému právě k lineárně nezávislých sloupců a tedy i stejný počet lineárně nezávislých řádků. Proto nám zůstane při převodu na řádkový schodovitý tvar právě $n - k$ nulových řádků. Při řešení systému rovnic nám tak zůstane právě $n - k$ volných parametrů a dosazením vždy jednoho z nich hodnotou jedna a vynulováním ostatních získáme právě k lineárně nezávislých řešení. Každé takové k -tici řešení říkáme *fundamentální systém řešení* daného homogenního systému rovnic.

Uvažme nyní obecný systém rovnic

$$A \cdot x = b.$$

Jestliže rozšíříme matici A o sloupec b , můžeme, ale nemusíme, také zvětšit počet lineárně nezávislých sloupců a tedy i řádků. Pokud se tento počet zvětší, pak systém rovnic nemůže mít řešení (prostě se naše φ vůbec do b nestrefí). Jestliže ale naopak máme stejný počet nezávislých řádků, znamená to, že sloupec b musí být lineární kombinací sloupců matice A . Koeficienty takové kombinace jsou právě řešení.

Mějme tedy dvě pevně zvolená řešení x a y našeho systému a nějaké řešení z systému homogenního se stejnou maticí. Pak zjevně

$$\begin{aligned} A \cdot (x - y) &= b - b = 0 \\ A \cdot (x + z) &= 0 + b = b. \end{aligned}$$

Můžeme proto shrnout:

- podprostor všech řešení homogenního systému rovnic $A \cdot x = 0$ má dimenzi $n - k$, kde n je počet proměnných a k je počet lineárně nezávislých rovnic,
- všechna řešení jsou generována tzv. fundamentálním systémem $n - k$ řešení, který lze obdržet z Gausovy eliminace postupným dosazováním nul a jedniček za volné parametry,
- řešení nehomogenního systému existuje právě, když přidáním sloupce b k matici A nezvýšíme počet lineárně nezávislých řádků. V takovém případě je prostor všech řešení dán součty jednoho pevně zvoleného *partikulárního řešení* systému a všech řešení systému homogenního se stejnou maticí.

2.38

3.2. Iterované procesy. Pokud je dán nějaký proces prostřednictvím lineární operace pro jednotlivá časová období, budeme patrně chtít umět studovat jeho chování během delší doby. Zatímco pro řešení systémů lineárních rovnic jsme potřebovali jen minimum znalostí o vlastnostech lineárních zobrazení, teď už to bude jinak. Uvedeme si alespoň ilustrativní příklady.

Představme si, že zkoumáme nějaký systém jednotlivců (pěstovaná zvířata, hmyz, buněčné kultury apod) rozdělený do m skupin (třeba podle stáří, fází vývoje hmyzu apod.). Stav x_n je tedy dán vektorem (a_1, \dots, a_m) závislejícím na okamžiku t_n , ve kterém systém pozorujeme. Lineární model vývoje takového systému je dán maticí A dimenze n , která zadává změnu vektoru x_n na

$$x_{n+1} = A \cdot x_n$$

při přírůstku času z t_k na t_{k+1} . Dobrým příkladem lineárních procesů je tzv. *Leslieho model růstu*, viz následující příklad 3.3. V takových modelech vystupuje matice popisující vývoj populace rozdělené na několik věkových skupin

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_4 & 0 \end{pmatrix},$$

kde f_i označuje relativní plodnost příslušné věkové skupiny (ve sledovaném časovém skoku vznikne z N jedinců v i -té skupině $f_i N$ jedinců nových, tj. ve skupině první), zatímco τ_i je relativní úmrtnost i -té skupiny během jednoho období.

Všechny koeficienty jsou tedy kladná reálná čísla a τ jsou mezi nulou a jedničkou. Přímým výpočtem (třeba využitím Laplaceova rozvoje) nyní spočteme charakteristický polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^5 - a\lambda^4 - b\lambda^3 - c\lambda^2 - d\lambda - e$$

s vesměs nezápornými koeficienty a, b, c, d, e , např. $e = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 f_5$. Je tedy

$$p(\lambda) = \lambda^5 (1 - q(\lambda))$$

kde q je ostře klesající a nezáporná funkce pro $\lambda > 0$. Evidentně bude proto existovat právě jedno kladné λ , pro které bude $q(\lambda) = 1$ a tedy $p(\lambda) = 0$. Jinými slovy, pro každou Leslieho matici existuje právě jedno kladné vlastní číslo.

Pro konkrétní koeficienty (např. když všechny f_i jsou také mezi nulou a jedničkou) můžeme dojít k závěru, že absolutní hodnoty ostatních vlastních čísel jsou ostře menší než jedna, zatímco dominantní vlastní číslo může být větší než jedna. V takovém případě při iteraci kroků našeho procesu dojde při libovolné počáteční hodnotě x_0 k postupnému vymizení všech komponent v jednotlivých vlastních podprostorech a poměrné proporce rozložení populace do věkových skupin se budou blížit poměrům komponent vlastního vektoru k dominantnímu vlastnímu číslu. Například pro matici (uvědomme si význam jednotlivých koeficientů)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

vyjdou vlastní hodnoty přibližně

$$1.03, 0, -0.5, -0.27 + 0.74i, -0.27 - 0.74i$$

s velikostmi 1.03, 0, 0.5, 0.78, 0.78 a vlastní vektor příslušný dominantnímu vlastnímu číslu je přibližně

$$x = (30 \ 27 \ 21 \ 14 \ 8).$$

Zvolili jsme rovnou jediný vlastní vektor se součtem souřadnic rovným jedné, zadává nám proto přímo výsledné procentní rozložení populace.

3.3

3.3. Příklad – Leslieho růstový model. *Uvažujme následující model vývoje lidské populace. Bud'*

- $x_1(t)$ = počet jedinců starých 0 – 14 let.
- $x_2(t)$ = počet jedinců starých 15 – 29 let.
- $x_3(t)$ = počet jedinců starých 30 – 44 let.
- $x_4(t)$ = počet jedinců starých 45 – 59 let.
- $x_5(t)$ = počet jedinců starých 60 – 75 let.

Vše uvedeno v nějakém čase t . Pokud uvážíme časovou jednotku 15 let, tak v čase $(t + 1)$ budeme mít následující počty:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f_1x_1(t) + f_2x_2(t) + f_3x_3(t) + f_4x_4(t) + f_5x_5(t) \\ x_2(t+1) &= \tau_{1,2}x_1(t) \\ x_3(t+1) &= \tau_{2,3}x_2(t) \\ x_4(t+1) &= \tau_{3,4}x_3(t) \\ x_5(t+1) &= \tau_{4,5}x_4(t) \end{aligned}$$

Pokud označíme jako P následující matici

$$P := \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \tau_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{3,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_{4,5} & 0 \end{pmatrix},$$

tak v maticové formě pak můžeme psát

$$\mathbf{x}(t+1) = P\mathbf{x}(t),$$

kde $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t))$.

3.4. Příklad. Usherův model růstu. Variace předchozího. Mějme populaci jako v předchozím příkladě a uvažujme časovou jednotku 7,5 let, tedy polovinu předchozí. Pak můžeme psát opět

$$\mathbf{x}(t+1) = P\mathbf{x}(t),$$

kde ovšem nyní

$$P := \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \tau_{1,2} & \tau_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{2,3} & \tau_{3,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{3,4} & \tau_{4,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_{4,5} & \tau_{5,5} \end{pmatrix}.$$

3.5. Příklad. Příklad. Uvažujme Leslieho model růstu pro populaci krys, které máme rozděleny do tří věkových skupin: do jednoho roku, od jednoho do dvou let a od dvou let do tří. Předpokládáme, že se žádná krysa nedožívá více než tři let. Průměrná porodnost v jednotlivých věkových skupinách připadajících na jednu krysou je následující: v 1.skupině je to nula a ve druhé i třetí 2 krysy. Krysy, které se dožijí jednoho roku umírají až po druhém roce života (úmrtnost ve druhé skupině je nulová). Určete úmrtnost v první skupině víte-li, že daná populace krys stagnuje (počet jedinců v ní se nemění).

Řešení. Leslieho matice daného modelu je (úmrtnost v první skupině označíme a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podmínka stagnace populace odpovídá tomu, že matice má vlastní hodnotu 1, neboli polynom $\lambda^3 - 2a\lambda - 2a$ má mít kořen 1, t.j $a = 1/4$. \square

2. Lineární diferenční rovnice a filtry

Diferenčními rovnicemi jsme se zabývali již v první kapitole, viz např 1.16. Nyní si uvedeme náznak obecné teorie.

2.40

3.6. Diferenční rovnice. Homogenní lineární diferenční rovnice řádu k s konstantními koeficienty je dána výrazem

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots + a_kx_{n-k} = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad a_k \neq 0.$$

Říkáme také, že řešíme *homogenní lineární rekurenci* řádu k . Libovolným zadáním k po sobě jdoucích hodnot x_i jsou určeny i všechny ostatní hodnoty jednoznačně. Zároveň je zřejmé, že součet dvou řešení nebo skalární násobek řešení je opět řešení. Opět tedy máme příklad vektorového prostoru. Uvědomme si, že vektory jsou sice nekonečné posloupnosti čísel, samotný prostor všech řešení ovšem bude konečně-rozměrný a předem víme, že jeho dimenze bude rovna řádu rovnice k .

Pokud tedy budeme předpokládat řešení v nějaké vhodné formě a podaří se nám najít k lineárně nezávislých možností, budeme mít opět *fundamentální systém řešení* a všechna ostatní budou jejich lineárními kombinacemi.

Uvažujme tedy stejně jako v 1.16 možnost $x_n = \lambda^n$ pro nějaký skalár λ . Pak dostáváme podmínku

$$\lambda^{n-k}(a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} \dots + a_k) = 0$$

což znamená, že buď $\lambda = 0$ nebo je λ kořenem tzv. *charakteristického polynomu* v závorce. Předpokládejme, že má tento polynom k různých kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Můžeme za tímto účelem i rozšířit uvažované pole skalárů, např. \mathbb{Q} na \mathbb{R} nebo \mathbb{R} na \mathbb{C} , protože výsledkem výpočtu pak stejně budou i všechna řešení, která opět zůstanou v původním poli díky samotné rovnici. Každý z kořenů nám dává jedno možné řešení

$$x_n = (\lambda_i)^n.$$

Abychom byli uspokojeni, potřebujeme k lineárně nezávislých řešení.

K tomu nám postačí ověřit nezávislost dosazením k hodnot pro $n = 0, \dots, k-1$ pro k možností λ_i . Dostaneme tzv. Vandermondovu matici a je pěkným (ale ne úplně snadným) cvičením spočítat, že pro všechna k a jakékoli k -tice různých λ_i je determinant takovéto matice nenulový. To ale znamená, že zvolená řešení jsou lineárně nezávislá.

Uvažme nyní násobný kořen λ a dosadíme do definiční rovnice předpokládané řešení $x_n = n\lambda^n$. Dostáváme podmínku

$$a_0n\lambda^n + \dots + a_k(n-k)\lambda^{n-k} = 0.$$

Tuto podmínku je možné přepsat pomocí tzv. derivace polynomu, kterou značíme apostrofem:

$$\lambda(a_0\lambda^n + \dots + a_k\lambda^{n-k})'$$

a časem uvidíme, že kořen polynomu f je vícenásobný právě, když je kořenem i jeho derivace f' . Naše podmínka je tedy splněna. Při vyšší násobnosti ℓ kořene charakteristického polynomu λ dojdeme obdobně k řešením $x_n = n^j \lambda^n$ pro $j = 0, \dots, \ell-1$.

Úplně obdobně jako u systémů lineárních rovnic můžeme dostat všechna řešení nehomogenních rovnic tak, že najdeme jedno řešení a přičteme celý vektorový prostor dimenze k řešení odpovídajících systémů homogenních. Za tímto účelem zpravidla hledáme řešení ve tvaru polynomu

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_{k-1} n^{k-1}$$

s neznámými koeficienty α_i , $i = 1, \dots, k-1$. Dosazením do diferenční rovnice dostaneme systém k rovnic pro k proměnných α_i .

Nyní můžeme shrnout získané výsledky:

2.41

3.7. Vlastnosti řešení lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty.

- prostor všech řešení homogenního systému řádu k je vektorový prostor dimenze k ,
- všechna řešení jsou generována fundamentálním systémem k řešení, který lze obdržet získat z kořenů charakteristického polynomu (λ_i^n , pokud jsou kořeny po dvou různé, složitěji v případě násobných kořenů),
- všechna řešení nehomogenního systému obdržíme, když přičteme jedno pevně zvolené partikulární řešení systému ke všem řešením systému homogenního se stejnými koeficienty. Partikulární řešení můžeme hledat pomocí tzv. *metody neurčitých koeficientů*, tj. hledáme jej jako polynom s neznámými koeficienty a řešíme systém lineárních rovnic.

- řešení vyhovující daným počátečním podmínkám

$$x_0 = b_0, \dots, x_{k-1} = b_{k-1}$$

hledáme z obecného řešení dosazením podmínek a určením koeficientů lineární kombinace funadamentálních řešení. Opět to znamená řešit systém lineárních rovnic.

Všimněme si také, že pro rovnice s reálnými koeficienty musí vždy kořeny charakteristického polynomu být reálné, nebo musí vystupovat po dvou komplexně združené nereálné kořeny. Jejich lineárními kombinacemi (součet a rozdíl goniometrických tvarů mocnin) lze pak přímo obdržet reálná řešení vyjádřená pomocí funkcí $\cos(n\varphi)$ a $\sin(n\varphi)$.

3.8. Příklad. Příklad. Najděte posloupnost, která vyhovuje nehomogenní diferenční rovnici s počátečními podmínkami:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + 1, \quad x_1 = 2, x_2 = 2.$$

Řešení. Obecné řešení zhomogenizované rovnice je tvaru $a(-1)^n + b2^n$. Partikulárním řešením je konstanta $-1/2$. Obecné řešení dané nehomogenní rovnice bez počátečních podmínek je tedy

$$a(-1)^n + b2^n - \frac{1}{2}.$$

Dosazením do počátečních podmínek zjistíme konstanty $a = -5/6$, $b = 5/6$. Dané rovnici s počátečními podmínkami tedy vyhovuje posloupnost

$$-\frac{5}{6}(-1)^n + \frac{5}{3}2^{n-1} - \frac{1}{2}.$$

□

3.9. Příklad. Příklad. Určete posloupnost reálných čísel, která vyhovuje následující nehomogenní diferenční rovnici s počátečními podmínkami:

$$2x_{n+2} = -x_{n+1} + x_n + 2, \quad x_1 = 2, x_2 = 3.$$

Řešení. Obecné řešení zhomogenizované rovnice je tvaru $a(-1)^n + b(1/2)^n$. Partikulárním řešením je konstanta 1. Obecné řešení dané nehomogenní rovnice bez počátečních podmínek je tedy

$$a(-1)^n + b\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1.$$

Dosazením do počátečních podmínek zjistíme konstanty $a = 1$, $b = 4$. Dané rovnici s počátečními podmínkami tedy vyhovuje posloupnost

$$(-1)^n + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1.$$

□

3.10. Příklad. Řešte následující diferenční rovnici:

$$x_{n+4} = x_{n+3} - x_{n+2} + x_{n+1} - x_n.$$

Řešení. Z teorie víme, že prostor řešení této diferenční rovnice bude čtyřdimenzionální vektorový prostor, jehož generátory zjistíme z kořenů charakteristického polynomu dané rovnice. Charakteristická rovnice je

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0.$$

Jedná se o reciprokovou rovnici (to znamená, že koeficienty u $(n-k)$ -té a k -té mocniny x , $k = 1, \dots, n$, jsou shodné). Zavedeme tedy substituci $u = x + \frac{1}{x}$. Po vydělení rovnice x^2 (nula nemůže být kořenem) a substituci (všimněte si, že $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$) dostáváme

$$x^2 - x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = u^2 - u - 1 = 0.$$

Dostáváme tedy neznámé $u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Odtud pak z rovnice $x^2 - ux + 1 = 0$ určíme čtyři kořeny

$$x_{1,2,3,4} = \frac{1 \pm 5 \pm \sqrt{-10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Nyní si všimněme, že kořeny charakteristické rovnice jsme mohli „uhodnout“ rovnou. Je totiž

$$x^5 + 1 = (x - 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1),$$

a tedy jsou kořeny polynomu $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ i kořeny polynomu $x^5 + 1$, což jsou páté odmocniny z -1 . Takto dostáváme, že řešením charakteristického polynomu jsou čísla $x_{1,2} = \cos(\frac{\pi}{5}) \pm \sin(\frac{\pi}{5})$ a $x_{3,4} = \cos(\frac{3\pi}{5}) \pm \sin(\frac{3\pi}{5})$. Tedy reálnou bází prostoru řešení dané diferenční rovnice je například báze posloupností $\cos(\frac{n\pi}{5})$, $\sin(\frac{n\pi}{5})$, $\cos(\frac{3n\pi}{5})$ a $\sin(\frac{3n\pi}{5})$, což jsou siny a cosiny argumentů příslušných mocnin kořenů charakteristického polynomu.

Všimněme si, že jsme mimochodem odvodili algebraické výrazy pro $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\sin(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\cos(\frac{3\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ a $\sin(\frac{3\pi}{5}) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. \square

2.39

3.11. Lineární filtry. Uvažujme nyní nekonečné posloupnosti

$$x = \dots, x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

a operaci T , která zobrazí posloupnost x na posloupnost $z = Tx$ se členy

$$z_n = a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k+1}.$$

Protože nekonečné posloupnosti x umíme sčítat i násobit skaláry po složkách, jedná se opět o příklad vektorového prostoru. Zjevně má dimenzi nekonečnou.

Posloupnosti můžeme chápat jako diskrétní hodnoty nějakého signálu, odečítané zpravidla ve velmi krátkých časových jednotkách, operace T je pak filtrem, který signál zpracovává. Z definice je zřejmé, že periodické posloupnosti x_n splňující pro nějaké pevné přirozené číslo p

$$x_{n+p} = x_n$$

budou mít i periodické obrazy $z = Tx$

$$\begin{aligned} z_{n+p} &= a_1 x_{n+p} + a_2 x_{n-1+p} + \dots + a_k x_{n-k+1+p} \\ &= a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k+1} = z_n \end{aligned}$$

se stejnou periodou p . Pro pevně zvolenou operaci T nás bude zajímat, které vstupní posloupnosti zůstanou přibližně stejné (případně až na násobek) a které budou utlumeny na nulové hodnoty.

Jde nám tedy v první řadě o vyčíslení jádra našeho lineárního zobrazení T . To je ale dáno homogenní diferencí rovnicí

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots + a_kx_{n-k} = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad a_k \neq 0.$$

2.42

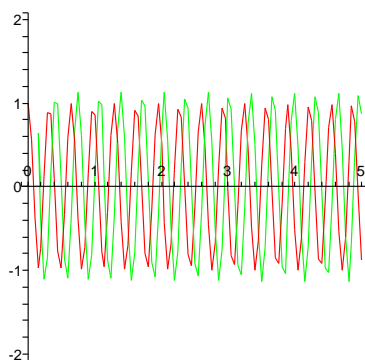
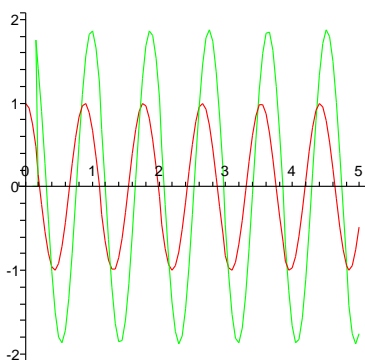
3.12. Špatný equalizer. Jako příklad uvažujme lineární filtr zadaný rovnicí

$$z_n = (Tx)_n = x_{n+2} + x_n.$$

Výsledky takového zpracování signálu jsou naznačeny na následujících čtyřech obrázcích pro postupně se zvyšující frekvenci periodického signálu $x_n = \cos(\varphi n)$. Červený je původní signál, zelený je výsledek po zpracování filtrem. Nerovnoměrnosti křivek jsou důsledkem nepřesného kreslení, oba signály jsou samozřejmě rovnoměrnými sinusovkami.

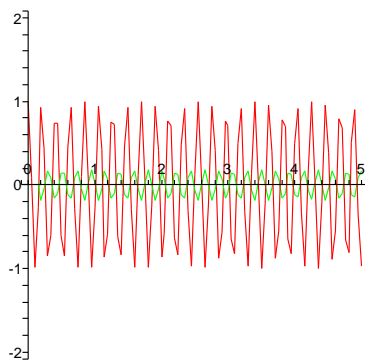
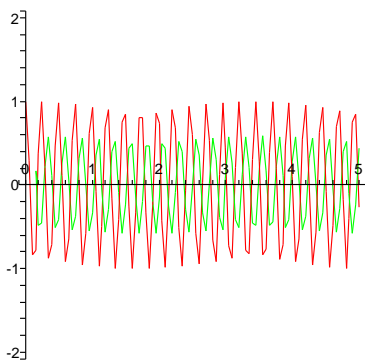
A = 7.1250

A = 19.375



A = 25.500

A = 29.583



Všimněme si, že v oblastech, kde je výsledný signál přibližně stejně silný jako původní, dochází k dramatickému posuvu fáze signálu. Levné equalizery skutečně podobně špatně fungují.

Výsledek lze samozřejmě podrobně spočítat výše uvedenou metodikou.

3. Markovovy procesy

2.43

3.13. Markovovy řetězce. Velice častý a zajímavý případ lineárních procesů je popis systému, který se může nacházet v m různých stavech s různou pravděpodobností. V jistém okamžiku je ve stavu s pravděpodobností a_i pro stav i a k přechodu z možného stavu i do stavu j dojde s pravděpodobností t_{ij} .

Můžeme tedy proces zapsat takto: V čase n je systém popsán pravděpodobnostním vektorem $x_n = (a_1, \dots, a_m)$. To znamená, že všechny komponenty vektoru x jsou reálná nezáporná čísla a jejich součet je roven jedné. Komponenty udávají rozdělení pravděpodobnosti jednotlivých možností stavů systému. Rozdělení pravděpodobností pro čas $n + 1$ bude dáno vynásobením pravděpodobnostní maticí přechodu $T = (t_{ij})$, tj.

$$x_{n+1} = T \cdot x_n.$$

Protože předpokládáme, že vektor x zachycuje všechny možné stavy, budou všechny sloupce matice T tvořeny také pravděpodobnostními vektory. Takovému procesu říkáme *Markovův proces*. Všimněme si, že každý pravděpodobnostní vektor x je opět zobrazen na vektor se součtem souřadnic jedna:

$$\sum_{i,j} t_{ij}x_j = \sum_j \left(\sum_i t_{ij} \right) x_j = \sum_j x_j = 1.$$

Protože je součet řádků matice T vždy roven vektoru $(1, \dots, 1)$, bude jednička zaručeně vlastním číslem matice T a k ní musí existovat vlastní vektor x_0 . Abychom mohli podrobněji pochopit chování Markovových procesů, uvedeme si docela snadno pochopitelné obecné tvrzení o maticích, tzv. Perronovu–Frobeniovu větu. Její důkaz však uvádět nebudeme.

Věta. *Nechť A je reálná čtvercová matice dimenze m s kladnými prvky. Pak platí*

- (1) *existuje reálné vlastní číslo λ_m matice A takové, že pro všechna ostatní vlastní čísla λ platí $|\lambda| < \lambda_m$,*
- (2) *vlastní číslo λ_m má algebraickou násobnost jedna,*
- (3) *vlastní podprostor odpovídající λ_m obsahuje vektor se všemi souřadnicemi kladnými*
- (4) *platí odhad $\min_i \sum_j a_{ij} \leq \lambda_m \leq \max_i \sum_j a_{ij}$.*

Tvrzení bezesbýtku platí i pro tzv. regulární matice, tj. takové, jejichž nějaká mocnina má výhradně kladné prvky.

Důsledkem této věty pro Markovovy procesy s maticí, která nemá žádné nulové prvky (nebo jejíž některá mocnina má tuto vlastnost), je

- existence vlastního vektoru x_∞ pro vlastní číslo 1, který je pravděpodobnostní
- přibližování hodnoty iterací $T^k x_0$ k vektoru x_∞ pro jakýkoliv pravděpodobnostní vektor x_0 .

První tvrzení vyplývá přímo z kladnosti souřadnic vlastního vektoru zmíněné v Perronově–Frobeniově větě, druhé pak z toho, že absolutní hodnoty všech ostatních vlastních čísel musí být ostře menší než jedna.

3.14. Mlsný hazardér. *Hazardní hráč sází na to, která strana mince padne. Na začátku hry má tři kremrole. Na každý hod vsadí jednu kremroli a když jeho tip vyjde, tak k ní získá jednu navíc, pokud ne, tak kremroli prohrává. Hra končí, pokud všechny kremrole prohraje, nebo jich získá pět. Jaká je pravděpodobnost, že hra neskončí po čtyřech sázkách?*

Řešení. Před j -tým kolem (sázkou) můžeme popsat stav, ve kterém se hráč nachází náhodným vektorem $X_j = (p_0(j), p_1(j), p_2(j), p_3(j), p_4(j), p_5(j))$, kde p_i je pravděpodobnost, že hráč má i kremrolí. Pokud má hráč před j -tou sázkou i kremrolí ($i=2,3,4$), tak po sázce má s poloviční pravděpodobností $(i-1)$ kremrolí a s poloviční pravděpodobností $(i+1)$ kremrolí. Pokud dosáhne pěti kremrolí nebo všechny prohraje už se počet kremrolí nemění. Vektor X_{j+1} tak získáme podle podmínek v příklání z X_j vynásobením maticí

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na začátku máme

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

po čtyřech sázkách bude situaci popisovat náhodný vektor

$$X_5 = A^4 X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \\ \frac{5}{16} \\ 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

tedy pravděpodobnost, že hra skončí do čtvrté sázky (včetně) je polovina.

Všimněme si ještě, že matice A popisující vývoj pravděpodobnostního vektoru X je pravděpodobnostní, tedy má součet prvků v každém sloupci 1. Nemá ale vlastnost vyžadovanou v Perronově–Frobeniově větě a snadným výpočtem zjistíte (nebo přímo uvidíte bez počítání), že existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu 1 – případ, kdy hráči nezůstane žádná krémrole, tj. $x = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, nebo případ kdy získá 5 krémrolí a hra tím pádem končí a všechny mu už zůstávají, tj. $x = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$. Všechna ostatní vlastní čísla (přibližně 0, 8, 0, 3, $-0,8$, $-0,3$) jsou v absolutní hodnotě ostře menší než jedna. Proto komponenty v příslušných vlastních podprostorech při iteraci procesu s libovolnou počáteční hodnotou vymizí a proces se blíží k limitní hodnotě pravděpodobnostního vektoru tvaru $(a, 0, 0, 0, 0, 1-a)$, kde hodnota a závisí na počtu krémrolí, se kterými hráč začíná. V našem případě je to $a = 0,4$, kdyby začal se 4 krémrolemi, bylo by to $a = 0,2$ atd. \square

Ruleta Hráč rulety má následující strategii: přišel hrát se 100 Kč. Vždy všechno, co aktuálně má. Sází vždy na černou (v ruletě je 37 čísel, z toho je 18 černých, 18 červených a nula). Hráč skončí, pokud nic nemá, nebo pokud získá 800 Uvažte tuto úlohu jako Markovův proces a napište jeho matici.

Řešení.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \end{pmatrix},$$

kde $a = \frac{19}{37}$ a $b = \frac{18}{37}$. □

3.15. Příklad. Uvažujme situaci z předchozího případu a předpokládejme, že pravděpodobnost výhry i prohry je $1/2$. Označme matici procesu A . Bez použití výpočetního software určete A^{100} .

Řešení. Hra skončí po třech sázkách. Jsou tedy všechny mocniny A , počínaje A^3 shodné.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7/8 & 3/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

□

3.16. Sledovanost televizí. V jisté zemi vysílají jisté dvě televizní stanice. Z veřejného výzkumu vyplynulo, že po jednom roce přejde $1/6$ diváků první stanice ke druhé stanici, $1/5$ diváků druhé stanice přejde k první stanici. Popište časový vývoj počtu diváků sledujících dané stanice jako Markovův proces, napište jeho matici, nalezněte její vlastní čísla a vlastní vektory.

Řešení.

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Matice má dominantní vlastní hodnotu 1, příslušný vlastní vektor je $(\frac{6}{5}, 1)$. Protože je vlastní hodnota dominantní, tak se poměr diváků se ustálí na poměru $6 : 5$. □

4. Více maticového počtu

Na vcelku praktických příkladech jsme viděli, že porozumění vnitřní struktúře matic a jejím vlastnostem je silným nástrojem pro konkrétní výpočty nebo analýzy. Ještě více to platí pro efektivitu numerického počítání s maticemi. Proto se budeme zase chvíli věnovat abstraktní teorii.

2.44

3.17. Invariantní podprostory. Mějme nějaké lineární zobrazení $f : V \rightarrow V$ na vektorovém prostoru V a předpokládejme, že pro nějaký podprostor $W \subset V$ platí $f(W) \subset W$. Říkáme, že W je *invariantní podprostor* pro zobrazení f . Jestliže je V konečněrozměrné a vybereme nějakou bázi (u_1, \dots, u_k) podprostoru W , můžeme ji vždy doplnit na bázi (u_1, \dots, u_n) celého V a v každé takové bázi má naše zobrazení matici A tvaru

e2.3

$$(3.1) \quad A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

kde B je čtvercová matice dimenze k , D je čtvercová matice dimenze $n - k$ a C je matice typu $n/(n - k)$. Naopak, jestliže existuje v nějaké bázi matice zobrazení f tvaru (3.1), je $W = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ invariantní podprostor zobrazení f .

Extrémní případy jsme viděli v odstavcích 2.39–2.43, kde jsme zkoumali vlastní vektory. Ke každému vlastnímu číslu zobrazení (resp. matice) existoval vlastní vektor a jím generovaný jednorozměrný podprostor je samozřejmě invariantní. V případě existence n různých vlastních čísel zobrazení f jsme dostali rozklad V na přímý součet n vlastních podprostorů a v bazích z vlastních vektorů má naše zobrazení diagonální tvar s vlastními čísly na diagonále. Zároveň jsme viděli dva různé příklady důvodů, proč zobrazení diagonální matici mít nemusí. První souvisel s nilpotentními zobrazeními, druhý s rotacemi v dvourozměrných podprostorech.

Nejsložitější a úplně obecný popis jsme potkali v odstavci 2.43, kde jsme pouze s mlhavým náznakem důkazu uvedli větu o Jordanově rozkladu. Ta říká, že nad algebraicky uzavřeným polem skalárů se celý prostor vždy rozloží na invariantní podprostory na kterých je zobrazení dáno tzv. Jordanovými bloky. Budeme teď pracovat se speciálními typy zobrazení, jejichž struktura je daleko jednodušší. První budou na řadě ortogonální zobrazení.

2.45

3.18. Rozklad ortogonálního zobrazení. Zkoumejme zobrazení na vektorovém prostoru V se skalárním součinem. Uvažme pevně zvolené ortogonální zobrazení $f : V \rightarrow V$ s maticí A v nějaké ortonormální bázi a zkusme postupovat obdobně jako s rotací v příkladu 2.38.

Nejprve se ale podívejme obecně na invariantní podprostory ortogonálních zobrazení a jejich ortogonální doplňky. Jestliže pro libovolný podprostor $W \subset V$ a ortogonální zobrazení $f : V \rightarrow V$ platí $f(W) \subset W$, pak také platí pro všechny $v \in W^\perp$, $w \in W$

$$\langle f(v), w \rangle = \langle f(v), f \circ f^{-1}(w) \rangle = \langle v, f^{-1}(w) \rangle = 0$$

protože i $f^{-1}(w) \in W$. To ale znamená, že také $f(W^\perp) \subset W^\perp$. Dokázali jsme tedy jednoduché, ale velice důležité tvrzení:

Tvrzení. *Ortogonální doplněk k invariantnímu podprostoru je také invariantní.*

Kdyby byla vlastní čísla ortogonálního zobrazení reálná, zaručovalo by už toto tvrzení, že bude vždy existovat báze V z vlastních vektorů. Skutečně, zúžení f na ortogonální doplněk invariantního podprostoru je opět ortogonální zobrazení, takže můžeme do báze přibírat jeden vlastní vektor za druhým, až dostaneme celý rozklad V . Nicméně většinou nejsou vlastní čísla ortogonálních zobrazení reálná. Musíme si proto pomoci opět výletem do komplexních vektorových prostorů.

Jestliže budeme považovat matici A za matici lineárního zobrazení na komplexním prostoru \mathbb{C}^n (která je jen shodou okolností reálná), budeme mít právě n kořenů charakteristického polynomu, včetně jejich algebraické násobnosti. Navíc, protože charakteristický polynom zobrazení bude mít výhradně reálné koeficienty, budou tyto kořeny buď reálné, nebo půjde o dvojice komplexně sdružených kořenů λ a $\bar{\lambda}$. Příslušné vlastní vektory v \mathbb{C}^n k takové dvojici vektorů budou také komplexně sdružené, protože budou řešením dvou komplexně sdružených systémů lineárních rovnic.

Označme v_λ , stejně jako v případě rotace v 2.38, vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Reálný vektorový podprostor P_λ generovaný reálnou a imaginární částí $x_\lambda = \operatorname{re} v_\lambda$, $y_\lambda = \operatorname{im} v_\lambda$ je zjevně invariantní vůči násobení maticí A a dostáváme

$$A \cdot x_\lambda = \alpha x_\lambda - \beta y_\lambda, \quad A \cdot y_\lambda = \alpha y_\lambda + \beta x_\lambda.$$

To ale neznamená nic jiného, než že zúžení našeho zobrazení na P_λ je dáno složením rotace o argument vlastní hodnoty λ (úhel $\arccos \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$) s násobením velikostí vlastní hodnoty λ (skalárem $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$). Protože naše zobrazení zachovává velikosti, musí být velikost vlastní hodnoty λ rovna jedné.

Společně s předchozími úvahami jsme tedy dokázali úplný popis všech ortogonálních zobrazení:

Věta. *Nechť $f : V \rightarrow V$ je ortogonální zobrazení na prostoru se skalárním součinem. Pak všechny kořeny charakteristického polynomu f mají velikost jedna a existuje rozklad V na jednorozměrné vlastní podprostory odpovídající vlastním číslům $\lambda = \pm 1$ a dvourozměrné podprostory $P_{\lambda, \bar{\lambda}}$, na kterých působí f rotací o úhel rovný argumentu komplexního čísla λ . Všechny tyto různé podprostory jsou po dvou ortogonální.*

Příklad. Zkusme si předchozí větu na příkladu v dimenzi tři. Charakteristický polynom v tomto případě musí mít alespoň jeden reálný kořen, kterým musí být buď jednička nebo mínus jednička. Další dva musí být opět ± 1 nebo dva komplexně sdružené nereálné. V posledním případě zadává vlastní vektor odpovídající reálnému vlastnímu číslu osu rotace o argument vlastního čísla druhého. Pokud je reálné vlastní číslo -1 , bude navíc ještě uplatněno zrcadlení podle roviny rotace.

Uvažme tedy zobrazení s maticí ve standardní bázi

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme polynom $-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$ s kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda = i$ a $\bar{\lambda} = -i$. Pochopitelně matice zadává rotaci o devadesát stupňů podle osy y .

2.46

3.19. Symetrická zobrazení. Uvažujme opět reálný vektorový prostor V se skalárním součinem. Zobrazení $f : V \rightarrow V$ se nazývá *symetrické*, jestliže pro všechny vektory $u, v \in V$ platí

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle.$$

V libovolné ortonormální bázi můžeme předchozí vztah v souřadnicích vyjádřit takto:

$$(A \cdot x)^T \cdot y = x^T \cdot (A \cdot y) = x^T \cdot (A^T y).$$

Volbou souřadnic bázevých vektorů (tj. jedna jednička a zbytek nuly) se dostaneme ke vztahům $a_{ij} = a_{ji}$ pro jednotlivé komponenty matice A , tzn. ke vztahu $A = A^T$. Dokázali jsme tedy souřadný popis symetrických zobrazení:

Tvrzení. *Zobrazení $f : V \rightarrow V$ na vektorovém prostoru se skalárním součinem je symetrické právě tehdy, když v některé (a pak už všech) ortonormální bázi má symetrickou matici.*

3.15

3.20. Adjungovaná zobrazení. Jestliže zvolíme pevně jeden vektor $v \in V$, dosazování vektorů za druhý argument nám dává zobrazení $V \rightarrow V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$

$$V \ni v \mapsto (w \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}).$$

Podmínka nedegenerovanosti skalárního součinu nám zaručuje, že toto zobrazení je bijekcí. Na první pohled je vidět, že vektory ortonormální báze jsou zobrazeny na formy tvořící bázi duální.

Každé zobrazení $f : V \rightarrow W$ mezi vektorovými prostory zadává tzv. duální zobrazení $f^* : W^* \rightarrow V^*$ mezi formami, definované pro všechny $w^* \in W^*$, $v \in V$ pomocí

$$f^*(w^*)(v) = w^*(f(v)).$$

V libovolných bazích na V a W a jejich duálních bazích na V^* a W^* pak tentýž definiční vztah má tvar (píšeme A^* pro matici zobrazení f^* , x^T jsou souřadnice formy w^* , y jsou souřadnice vektoru v)

$$(A^* x^T) \cdot y = x^T \cdot (A \cdot y)$$

a vidíme, že duální zobrazení má v duálních bazích transponovanou matici k matici zobrazení původního.

V případě vektorových prostorů se skalárním součinem, převádí výše uvedené bijekce duální zobrazení f^* na zobrazení $f^* : W \rightarrow V$ zadané formulí

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f^*(v) \rangle$$

a tomuto zobrazení se říká *adjungované zobrazení* k f . Předchozí výpočet v souřadnicích pro symetrická zobrazení nám ve skutečnosti sdělil, že je-li A matice zobrazení f v ortonormální bázi, pak matice adjungovaného zobrazení f^* je matice transponovaná A^T . Můžeme proto také přeformulovat definici takto: Symetrické je takové zobrazení $f : V \rightarrow V$, které je rovno svému adjungovanému zobrazení f^* . Často se takovým zobrazením také proto říká *samoadjungovaná*.

2.47

3.21. Spektrální rozklad symetrického zobrazení. Uvažujme symetrické zobrazení $f : V \rightarrow V$ s maticí A v nějaké ortonormální bázi a zkusme postupovat obdobně jako v 3.18. Opět se nejprve obecně podíváme na invariantní podprostory ortogonálních zobrazení a jejich ortogonální doplňky. Jestliže pro libovolný podprostor $W \subset V$ a symetrické zobrazení $f : V \rightarrow V$ platí $f(W) \subset W$, pak také platí pro všechny $v \in W^\perp$, $w \in W$

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle = 0.$$

To ale znamená, že také $f(W^\perp) \subset W^\perp$.

Představme si dále, že A je matice symetrického zobrazení a $A \cdot x = \lambda x$ pro nějaký komplexní vektor $x \in \mathbb{C}^n$. Rozšíříme si definici skalárního součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na \mathbb{C}^n vztahem

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot \bar{y}$$

kde \bar{y} je vektor v \mathbb{C}^n s komplexně konjugovanými souřadnicemi. Zjevně platí i pro rozšířené zobrazení $x \mapsto A \cdot x$ vztah

$$\langle A \cdot x, y \rangle = \langle x, A \cdot y \rangle$$

a pro náš vlastní vektor x tedy dostáváme

$$\lambda \langle x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle.$$

Kladným reálným číslem $\langle x, x \rangle$ můžeme krátit a proto musí být $\bar{\lambda} = \lambda$, tj. vlastní čísla jsou skutečně reálná.

Komplexních kořenů má charakteristický polynom $\det(A - \lambda E)$ tolik, kolik je dimenze čtvercové matice A , a všechny jsou ve skutečnosti reálné. Dokázali jsme tak důležitý obecný výsledek:

Tvrzení. *Ortogonalní doplněk k invariantnímu podprostoru pro symetrické zobrazení je také invariantní. Navíc jsou všechna vlastní čísla symetrické matice A reálná.*

Ze samotné definice je zřejmé, že zúžení symetrického zobrazení na invariantní podprostor je opět symetrické. Předchozí tvrzení nám tedy zaručuje, že bude vždy existovat báze V z vlastních vektorů. Skutečně, zúžení f na ortogonální doplněk invariantního podprostoru je opět ortogonální zobrazení, takže můžeme do báze přibírat jeden vlastní vektor za druhým, až dostaneme celý rozklad V . Vlastní

vektory příslušející různým vlastním číslům jsou navíc kolmé, protože z rovností $f(u) = \lambda u$, $f(v) = \mu v$ vyplývá

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle = \mu \langle u, v \rangle.$$

Obvykle se náš výsledek formuluje pomocí projekcí na vlastní podprostory. O projektoru $P : V \rightarrow V$ říkáme, že je *kolmý*, je-li $\text{Im } P \perp \text{Ker } P$. Dva kolmé projektory P, Q jsou *vzájemně kolmé*, je-li $\text{Im } P \perp \text{Im } Q$.

3.17 **3.22. Věta.** *Pro každé symetrické zobrazení $f : V \rightarrow V$ na vektorovém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze z vlastních vektorů. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ všechna různá vlastní čísla f a P_1, \dots, P_k příslušné kolmé a navzájem kolmé projektory na vlastní podprostory, pak*

$$f = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k.$$

Poznámka. Všechna zobrazení, pro která lze najít ortonormální bázi jako v této větě o spektrálním rozkladu se nazývají *normální*. Lze poměrně snadno ukázat, že zobrazení $f : V \rightarrow V$ je normální právě, když komutuje se svým adjungovaným zobrazením. Stopa zobrazení $f^* \circ f$ je rovna součtu absolutních hodnot kvadrátů všech prvků A . V bázi z předchozí věty je tento výraz ovšem roven součtu kvadrátů absolutních hodnot všech vlastních čísel λ_i matice A . Rovnost

$$\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$$

v některé a pak už ve všech ortonormálních bazích je nutnou a dostatečnou podmínkou pro to, aby zobrazení f bylo normální. Důkaz nebudeme uvádět.

2.48

3.23. Nezáporná zobrazení a odmocniny. Nezáporná reálná čísla jsou právě ta, která umíme psát jako druhé mocniny. Zobecnění takového chování pro matice a zobrazení lze vidět u součinů $B = A^T \cdot A$ (tj. složení zobrazení $f^* \circ f$):

$$\langle B \cdot x, x \rangle = \langle A^T \cdot A \cdot x, x \rangle = \langle A \cdot x, A \cdot x \rangle \geq 0$$

pro všechny vektory x . Navíc zjevně

$$B^T = (A^T \cdot A)^T = A^T \cdot A = B.$$

Symetrickým maticím B s takovou vlastností říkáme *nezáporné* a pokud nastane nulová hodnota pouze pro $x = 0$, pak jim říkáme *kladné*. Obdobně hovoříme o *kladných* a *nezáporných* zobrazeních $f : V \rightarrow V$.

Pro každé nezáporné zobrazení $f : V \rightarrow V$ umíme najít jeho odmocninu, tj. zobrazení g takové, že $g \circ g = f$. Nejjednodušeji to uvidíme v ortonormální bázi, ve které bude mít f diagonální matici. Taková podle našich předchozích úvah vždy existuje a matice A zobrazení f v ní bude mít na diagonále nezáporná reálná vlastní čísla zobrazení f . Kdyby totiž bylo některé z nich záporné, nebyla by splněna podmínka nezápornosti již pro některý z bazových vektorů. Pak ovšem stačí definovat zobrazení g pomocí matice B s odmocninami příslušných vlastních čísel na diagonále.

5. Rozklady matic a pseudoinverze

I při počítání s reálnými čísly užíváme pro zjednodušení rozklady na součiny. Nejjednodušším je vyjádření každého reálného čísla jednoznačně ve tvaru $a = \operatorname{sgn}(a) \cdot |a|$, tj. jako součin znaménka a absolutní hodnoty. V dalším textu si uvedeme stručně přehled několika takových rozkladů pro různé typy matic, které bývají nesmírně užitečné při numerických výpočtech s maticemi. Ve skutečnosti jsme příslušný rozklad pro nezáporné symetrické matice využili v předchozím odstavci pro konstrukci odmocniny z matice.

Začneme přeformulováním několika výsledků, které jsme už dávno odvodili. V odstavcích 2.7 a 2.8 jsme upravovali matice nad skaláry z libovolného pole na řádkový schodovitý tvar. K tomu jsme používali elementární úpravy, které spočívaly v postupném násobení naší matice invertibilními dolními trojúhelníkovými maticemi P_i , které postihovaly přičítání násobků řádků pod právě zpravovávaným. Předpokládejme pro jednoduchost, že naše matice A je čtvercová a že má všechny hlavní minory nenulové. Pak se nemůže stát, že bychom potřebovali při Gausově eliminaci přehazovat řádky a všechny naše matice P_i mohou být dolní trojúhelníkové s jedničkami na diagonálách (nikdy nepotřebujeme přehazovat řádky). Konečně, stačí si povšimnout, že inverzní matice k takovýmto P_i jsou opět dolní trojúhelníkové s jedničkami na diagonálách a dostáváme

$$U = P \cdot A = P_k \cdots P_1 \cdot A$$

kde U je horní trojúhelníková matice a tedy

$$A = L \cdot U$$

kde L je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a U je horní trojúhelníková. Tomuto rozkladu se říká *LU-rozklad* matice A . V případě obecné matice můžeme při Gausově eliminaci na řádkově schodovitý tvar potřebovat navíc permutace řádků, někdy i sloupců matice. Pak dostáváme obecněji $A = P \cdot L \cdot U \cdot Q$, kde P a Q jsou nějaké permutační matice.

Přímým důsledkem Gausovy eliminace bylo také zjištění, že až na volbu vhodných bází na definičním oboru a oboru hodnot je každé zobrazení $f : V \rightarrow W$ zadáno maticí v blokově diagonálním tvaru s jednotkovou maticí s rozměrem daným dimenzí obrazu f nulovými bloky všude kolem. To lze přeformulovat takto: Každou matici A typu m/n nad polem skalárů \mathbb{K} lze rozložit na součin

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Q.$$

Pro čtvercové matice jsme v 2.44 ukázali při diskusi vlastností lineárních zobrazení $f : V \rightarrow V$ na komplexních vektorových prostorech, že každou čtvercovou matici A dimenze m umíme rozložit na součin

$$A = P \cdot B \cdot P^{-1}$$

kde B je blokově diagonální s Jordanovými bloky příslušnými k vlastním číslům na diagonále. Všimněme si, že násobení maticí P a její inverzí z opačných stran odpovídá v tomto případě právě změně báze na vektorovém prostoru V .

Obdobně, pro symetrické matice jsme dokázali, že jdou rozložit na součin

$$A = P \cdot B \cdot P^T,$$

kde B je diagonální matice se všemi (vždy reálnými) vlastními čísly na diagonále, včetně násobností. Zde jde také o součin s maticemi vystihující změnu báze, nicméně připouštíme nyní pouze změny mezi ortonormálními bazemi a proto i matice přechodu P musí být ortogonální. Odtud $P^{-1} = P^T$.

Pro ortogonální zobrazení jsme odvodili obdobné vyjádření jako u symetrických, pouze naše B bude blokově diagonální s bloky rozměru dva nebo jedna vyjadřujícími buď rotaci nebo zrcadlení nebo identitu vzhledem k příslušným podprostorům.

2.50

3.24. Věta o singulárním rozkladu. Jestliže se omezíme na ortonormální báze, ale chceme znát více informací o struktuře obecných lineárních zobrazení, musíme postupovat o hodně rafinovaněji, než v případě bazí libovolných:

Věta. *Nechť A je reálná matice typu m/n . Pak existují čtvercové ortogonální matice U a V dimenzí m a n , a reálná diagonální matice s nezápornými prvky D dimenze r , $r \leq \min\{m, n\}$, takové, že*

$$A = USV^T, \quad S = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde r je hodnota matice AA^T . Přitom je S určena jednoznačně až na pořadí prvků a prvky diagonální matice D jsou druhé odmocniny vlastních čísel d_i matice AA^T .

DŮKAZ. Předpokládejme nejprve $m \leq n$ a označme $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zobrazení zadané maticí A ve standardních bazích. Máme vlastně ukázat, že existují ortonormální báze na \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m ve kterých bude mít φ matici S z tvrzení věty. Jak jsme viděli výše, matice $A^T A$ je pozitivně semidefinitní. Proto má samá reálná nezáporná vlastní čísla a existuje ortonormální báze \underline{w} v \mathbb{R}^n , ve které má příslušné zobrazení $\varphi^* \circ \varphi$ diagonální matici s vlastními čísly na diagonále. Jinými slovy, existuje ortogonální matice V taková, že $A^T A = V B V^T$ pro reálnou diagonální matici s nezápornými vlastními čísly $(d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$ na diagonále, $d_i \neq 0$ pro všechny $i = 1, \dots, r$. Odtud $B = V^T A^T A V = (AV)^T (AV)$. To je ale ekvivalentní tvrzení, že prvních r sloupců matice AV je ortogonálních a zbývající jsou nulové, protože mají nulovou velikost. Označme prvních r sloupců $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$. Tzn. $\langle v_i, v_i \rangle = d_i$, $i = 1, \dots, r$ a tedy vektory $u_i = \frac{1}{\sqrt{d_i}} v_i$ tvoří ortonormální systém nenulových vektorů. Doplňme je na ortonormální bázi u_1, \dots, u_n celého \mathbb{R}^n . Vyjádříme-li zobrazení φ v bazích \underline{u} na \mathbb{R}^n a \underline{v} na \mathbb{R}^m , dostáváme matici \sqrt{B} . Přejde od standardních bazí k nově vybraným odpovídají násobení zleva ortogonálními maticemi U a zprava $V^{-1} = V^T$.

Pokud je $m > n$, můžeme aplikovat předchozí část důkazu na matici A^T . Odtud pak přímo plyne požadované tvrzení. \square

Tento důkaz věty o singulárním rozkladu je konstruktivní a můžeme jej opravdu použít pro výpočet ortogonálních matic U , V a diagonálních nenulových prvků matice S .

2.51

3.25. Geometrická interpretace singulárního rozkladu. Diagonálním hodnotám matice D z předchozí věty se říká *singulární hodnoty matice A* . Pro příslušné zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mají jednoduchý geometrický význam: Necht $K \subset \mathbb{R}^n$ je jednotková sféra pro standardní skalární součin. Obrazem $\varphi(K)$ pak vždy bude (případně degenerovaný) m -rozměrný elipsoid. Singulární čísla matice A jsou přitom velikosti hlavních poloos a věta navíc říká, že původní sféra vždy připouští ortogonální sružené průměry, jejichž obrazem budou právě všechny poloosy tohoto elipsoidu.

Pro čtvercové matice je vidět, že A je invertibilní právě, když všechna singulární čísla jsou nenulová. Poměr největšího a nejmenšího singulárního čísla je důležitým

parametrem pro robustnost řady numerických výpočtů s maticemi, např. pro výpočet inverzní matice.

2.52

3.26. Věta o polárním rozkladu. Uvažujme společně nad důsledky věty o singulárním rozkladu. Plyne z ní $A = USW^T$ s diagonální S s nezápornými reálnými čísly na diagonále a ortogonálními U, W . Pak $A = USU^T UW^T$ a můžeme přímo definovat $P := USU^T$, $V := UW^T$. Odtud ale vyplývá, že P symetrická a pozitivně semidefinitní zatímco V je ortogonální. Navíc $A^T = WSU^T$ a tedy $AA^T = USSU^T = P^2$.

Předpokládejme, že $A = PV = QU$ jsou dva takové rozklady a A je invertibilní. Pak ovšem je $AA^T = PVV^T P = P^2 = QUU^T Q = Q^2$ pozitivně definitní a proto jsou matice $Q = P = \sqrt{AA^T}$ jednoznačně určené a invertibilní. Pak také $U = V = P^{-1}A$. Odvodili jsme tedy velice užitečnou analogii rozkladu reálného čísla na znaménko (ortogonální matice v případě dimenze jedna jsou právě ± 1) a absolutní hodnotu (matice P , ke které umíme odmocninu)

Věta. Každou čtvercovou reálnou matici A dimenze n lze vždy vyjádřit ve tvaru $A = P \cdot V$, kde P je symetrická a pozitivně definitní čtvercová matice téže dimenze a V je ortogonální. Přitom $P = \sqrt{AA^T}$. Je-li A invertibilní, je rozklad jednoznačný a $V = (\sqrt{AA^T})^{-1}A$.

Když budeme tutéž větu aplikovat na A^T místo A , dostaneme tentýž výsledek, ovšem s obráceným pořadím symetrických a ortogonálních matic. Matice v příslušných pravých a levých rozkladech budou samozřejmě obecně různé.

2.53

3.27. Poznámka. V tomto textu se bohužel z nedostatku prostoru vyhýbáme komplexním maticím. Ve skutečnosti jsou pro všechny koncepty a pojmy zavedené kolem skalárních součinů také přímočaré komplexní analogie a obvyklejší postup v literatuře je, že se z výsledků pro tzv. unitární prostory, hermiteovská zobrazení, samoadjungovaná zobrazení apod. odvozují i výsledky reálné. Například věta o spektrálním rozkladu pak pracuje s maticí s pozitivně definitní samoadjungovanou maticí P , která opět hraje roli absolutní hodnoty čísla, zatímco unitární matice V je analogií argumentu komplexního čísla (tj. komplexní jednotky, která se také rozkládá na součet $\varphi + i\psi$ se samoadjungovanými φ, ψ , které navíc splňují $\varphi^2 + \psi^2 = \text{id}_V$). Přitom ale nyní není jedno v jakém pořadí samoadjungované a unitární matice chceme násobit. Umíme v obou, vyjdou ale pokaždé jiné.

Pro řadu aplikací bývá rychlejší použití tzv. QR rozkladu:

2.54

3.28. Věta. Pro každou reálnou matici A typu m/n existuje ortogonální matice Q a horní trojúhelníková matice R takové, že $A = Q^T R$.

DŮKAZ. V geometrické formulaci potřebujeme dokázat, že pro každé zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s maticí A v standardních bazích můžeme zvolit novou bázi na \mathbb{R}^m tak, aby potom φ mělo horní trojúhelníkovou matici.

Uvažme obrazy $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \in \mathbb{R}^m$ vektorů standardní báze, vyberme z nich maximální lineárně nezávislý systém v_1, \dots, v_k takovým způsobem, že vypouštěné závislé vektory jsou vždy lineární kombinací předchozích vektorů, a doplňme je do báze v_1, \dots, v_m . Nechť u_1, \dots, u_m je ortonormální báze vzniklá Gram-Schmidtovou ortogonalizací tohoto systému vektorů. Nyní pro každé e_i je $\varphi(e_i)$ buď jedno z v_j , $j \leq i$, nebo je lineární kombinací v_1, \dots, v_{i-1} , proto ve vyjádření $\varphi(e_i)$ v bázi \underline{u} vystupují pouze vektory u_1, \dots, u_i . Zobrazení φ má proto ve standardní bázi na \mathbb{R}^n a ortonormální bázi \underline{u} na \mathbb{R}^m horní trojúhelníkovou matici R . Přejít k bázi \underline{u} na \mathbb{R}^m odpovídá násobení ortogonální maticí Q , tj. $R = QA$, ekvivalentně $A = Q^T R$. \square

Závěrem této části textu si všimněme mimořádně užitečné a důležité aplikace našich výsledků pro přibližné numerické výpočty. Opět uvádíme pro jednoduchost pouze reálnou variantu, obdobně platí a dokazuje se i varianta komplexní.

2.55 **3.29. Definice.** Nechť A je reálná matice typu m/n a nechť $A = USV^T$ je její singulární rozklad, $S = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Matici $A^{(-1)} := VS'U^T$ s $S' = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nazýváme *pseudoinverzní matice* k matici A .

Jak ukazuje následující věta, je pseudoinverze důležité zobecnění pojmu inverzní matice.

2.56 **3.30. Věta.** *Nechť A je reálná matice typu m/n . Platí*

(1) *Je-li A invertibilní (zejména tedy čtvercová), pak*

$$A^{(-1)} = A^{-1}.$$

(2) *pro pseudoinverzi $A^{(-1)}$ platí, že $A^{(-1)}A$ i $AA^{(-1)}$ jsou symetrické a*

$$AA^{(-1)}A = A, \quad A^{(-1)}AA^{(-1)} = A^{(-1)}.$$

(3) *Uvažme pro danou matici A systém lineárních rovnic $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^m$. Pak $y = A^{(-1)}b \in \mathbb{R}^n$ minimalizuje vzdálenost $\|Ax - b\|$ pro všechny $x \in \mathbb{R}^n$.*

DŮKAZ. (1): Je-li A invertibilní, pak i $S = U^T AV$ je invertibilní a přímo z definice je $S' = S^{-1}$. Odtud $A^{(-1)}A = AA^{(-1)} = E$.

(2): Přímým výpočtem dostáváme $SS'S = S$ a $S'SS' = S'$, proto

$$AA^{(-1)}A = USV^T VS'U^T USV^T = USS'SV^T = USV^T = A$$

a analogicky pro druhou rovnost. Dále

$$(AA^{(-1)})^T = (USS'SU^T)^T = U(S')^T S^T U^T = U(SS')^T U^T = USS'SU^T = AA^{(-1)}$$

a podobně se ukáže $(A^{(-1)}A)^T = A^{(-1)}A$.

(3): Uvažme zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$, a přímé součty $\mathbb{K}^n = (\text{Ker } \varphi)^\perp \oplus \text{Ker } \varphi$, $\mathbb{R}^m = \text{Im } \varphi \oplus (\text{Im } \varphi)^\perp$. Zúžené zobrazení $\tilde{\varphi} := \varphi|_{(\text{Ker } \varphi)^\perp} : (\text{Ker } \varphi)^\perp \rightarrow \text{Im } \varphi$ je lineární isomorfismus. Zvolíme-li vhodně ortonormální báze na $(\text{Ker } \varphi)^\perp$ a $\text{Im } \varphi$ a doplníme je na ortonormální báze na celých prostorech, bude mít φ matici S a $\tilde{\varphi}$ matici D z věty o singulárním rozkladu. Pro dané $b \in \mathbb{R}^m$ je bod $z \in \text{Im } \varphi$ minimalizující vzdálenost $\|b - z\|$ (tj. realizující vzdálenost od podprostoru $\rho(b, \text{Im } \varphi)$) právě komponenta $z = b_1$ rozkladu $b = b_1 + b_2$, $b_1 \in \text{Im } \varphi$, $b_2 \in (\text{Im } \varphi)^\perp$. Přitom ale ve zvolené bázi je zobrazení $\varphi^{(-1)}$, původně zadané ve standardních bazích pseudoinverzí $A^{(-1)}$, dáno maticí S' z věty o singulárním rozkladu, zejména je $\varphi^{(-1)}(\text{Im } \varphi) = (\text{Ker } \varphi)^\perp$ a D^{-1} maticí zúžení $\varphi|_{\text{Im } \varphi}^{(-1)}$ a $\varphi|_{(\text{Im } \varphi)^\perp}^{(-1)}$ je nulové. Je tedy skutečně

$$\varphi \circ \varphi^{(-1)}(b) = \varphi(\varphi^{(-1)}(z)) = z$$

a důkaz je ukončen. □

Lze také ukázat, že matice $A^{(-1)}$ minimalizuje výraz $\|AA^{(-1)} - E\|^2$ (tj. sumu kvadrátů všech prvků uvedené matice).

2.57

3.31. Lineární regrese. Aproximační vlastnost (3) předchozí věty je velice užitečná v případech, kdy máme najít co nejlepší přiblížení (neexistujícího) řešení přeúřčeného systému $Ax = b$, kde A je reálná matice typu m/n a m je větší než n .

Např. máme experimentem dáno mnoho naměřených hodnot b_j a chceme najít lineární kombinaci několika funkcí f_i , která bude co nejlépe aproximovat hodnoty b_j . Skutečné hodnoty zvolených funkcí v bodech $y_j \in \mathbb{R}$ zadají matici $a_{ij} = f_i(y_j)$ a naším úkolem je tedy určit koeficienty $x_j \in \mathbb{R}$ tak, aby $\sum_{i=1}^m (b_i - (\sum_{j=1}^n x_j a_{ij}))^2$ byla minimální. Jinými slovy, hledáme lineární kombinaci funkcí f_i takovou, abychom "dobře" proložili zadané hodnoty b_i . Díky předchozí větě jsou hledané optimální koeficienty $A^{(-1)}b$.

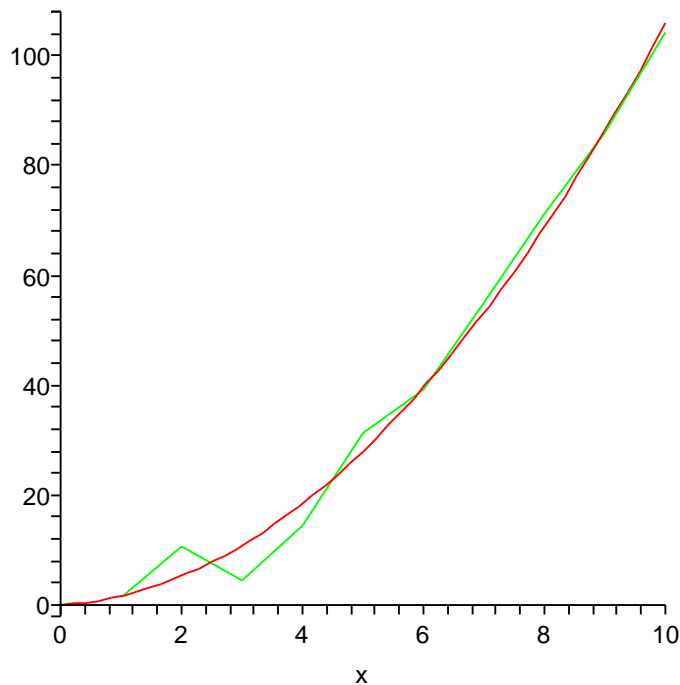
Abychom měli konkrétnější představu, uvažujme pouze dvě funkce $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ a předpokládejme, že „naměřené hodnoty“ jejich neznámé kombinace $g(x) = y_1x + y_2x^2$ v celočíselných hodnotách pro x mezi 1 a 10 jsou

$$b^T = (1.44 \ 10.64 \ 4.48 \ 14.56 \ 31.12 \ 39.20 \ 54.88 \ 71.28 \ 85.92 \ 104.16).$$

Tento vektor vzniknul výpočtem hodnot $x + x^2$ v daných bodech posunutých o náhodné hodnoty v rozmezí ± 8 . Matice $B = (b_{ij})$ je tedy v našem případě rovna

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 \end{pmatrix}$$

a $y = B^{(-1)} \cdot b = (0.61, 0.99)$. Výsledné proložení je možné dobře vidět na obrázku, kde zeleně jsou proloženy zadané hodnoty b lomenou čarou, zatímco červený je graf příslušné kombinace g . Výpočty byly provedeny v systému Maple pomocí příkazu `leastsqrs(B,b)`.



Pokud jste spřáteleni s Maplem (nebo jiným podobným souftwarem), zkuste si zaexperimentovat s podobnými úlohami.

Analytická geometrie

*poloha, incidence, projekce?
– a zase skončíme u matic...*

1. Afinity geometrie

Vrátíme se teď k úlohám elementární geometrie z podobného pohledu, jako když jsme zkoumali polohy bodů v rovině v 5. části první kapitoly, viz 1.40. Motivací k abstraktní definici vektorového prostoru nám byly množiny řešení systémů lineárních diferenciálních rovnic s nulovou pravou stranou, kde součty i skalární násobky řešení byly opět řešeními, „dimenzi“ celého prostoru řešení ale určoval rozdíl mezi počtem proměnných a počtem nezávislých rovnic. Taková dimenze bývá výrazně menší než počet proměnných a už proto není ideální pracovat s vektory jen jako s n -ticemi skalárů. Když jsme pak zkoumali aplikace obecné teorie na systémy rovnic v první části předchozí kapitoly, zjistili jsme v odstavci 3.1, že všechna řešení nehomogenních systémů rovnic sice netvoří vektorové podprostory, vždy ale vznikají tak, že k jednomu jedinému řešení přičteme celý vektorový prostor řešení příslušné homogenní soustavy. Naopak, rozdíl dvou řešení nehomogenní soustavy je vždy řešením homogenní. Obdobně se chovají lineární diferenciální rovnice, viz 3.6.

Návod na teoretické uchopení takové situace jsme viděli už při diskusi geometrie roviny, viz odstavec 1.41 a dále. Tam jsme totiž popisovali přímky a body jako množiny řešení systémů lineárních rovnic. Přímka pro nás pak byla „jedno-rozměrným“ prostorem, přestože její body byly popisovány dvěma souřadnicemi. Parametricky jsme ji zadávali tak, že k jednomu bodu (tj. dvojici souřadnic) jsme přičítali násobky pevně zvoleného směrového vektoru. Stejně budeme postupovat i teď v libovolné dimenzi.

2.58

4.1. Afinity prostory. *Standardní afinity prostor* \mathcal{A}_n je množina všech bodů v \mathbb{R}^n spolu s operací, kterou k bodu $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}_n$ a vektoru $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ přiřadíme bod $A + v = (a_1 + v_1, \dots, a_n + v_n) \in \mathbb{R}^n$. Tyto operace splňují následující tři vlastnosti:

- (1) $A + 0 = A$ pro všechny body $A \in P$ a nulový vektor $0 \in V$
- (2) $A + (v + w) = (A + v) + w$ pro všechny vektory $v, w \in V$, $A \in P$
- (3) pro každé dva body $A, B \in P$ existuje právě jeden vektor $v \in P$ takový, že $A + v = B$. Značíme jej $B - A$, někdy také \vec{AB} .

Vektorový prostor \mathbb{R}^n nazýváme *zaměřením afinity prostoru* \mathcal{A}_n .

Všimněme si několika formálních nebezpečí: Používáme stejný symbol „+“ pro dvě různé operace: přičtení vektoru ze zaměřením k bodu v afinity prostoru, ale také sčítání vektorů v zaměřením \mathbb{R}^n . Také nezavádíme zvláštní písmena pro samotnou

množinu bodů afinního prostoru, tj. \mathcal{A}_n pro nás představuje jak samotnou množinu bodů, tak i celou strukturu definující afinní prostor.

Proč vlastně chceme rozlišovat množinu bodů prostoru \mathcal{A}_n od jeho zaměření V , když se jedná jakoby o stejné \mathbb{R}^n ? Je to patrně podstatný formální krůček pro pochopení geometrie v \mathbb{R}^n : Geometrické objekty jako jsou přímky, body, roviny apod. nejsou totiž přímo závislé na vektorové struktuře na množině \mathbb{R}^n a už vůbec ne na tom, že pracujeme s n -ticemi skalárů. Musíme ale mít možnost říci, co je to „rovně v daném směru“. K tomu právě potřebujeme na jedné straně vnímat třeba rovinu jako neohrazenou desku bez zvolených souřadnic, ale s možností posunout se o zadaný vektor. Když přejdeme navíc k takovému abstraktnímu pohledu, budeme umět diskutovat „rovinnou geometrii“ pro dvourozměrné podprostory, tj. roviny ve vícerozměrných prostorech, „prostorovou“ pro třírozměrné atd., aniž bychom museli přímo manipulovat k -ticemi souřadnic.

Definice. Afinním prostorem \mathcal{A} se zaměřením V rozumíme množinu bodů P , spolu se zobrazením $P \times V \rightarrow P$, $(A, v) \mapsto A + v$, splňující vlastnosti (1)–(3). Pro libovolný pevně zvolený vektor $v \in V$ je tak definována *translace* $\tau_v : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ jako zúžené zobrazení

$$\tau_v : P \simeq P \times \{v\} \rightarrow P, \quad A \mapsto A + v.$$

Dimenzí afinního prostoru \mathcal{A} rozumíme dimenzi jeho zaměření.

Nadále nebudeme rozlišovat \mathcal{A} a P v označení. Z axiomů okamžitě plyne pro libovolné body A, B, C v afinním prostoru \mathcal{A}

$$(4) \quad A - A = 0 \in V$$

$$(5) \quad B - A = -(A - B)$$

$$(6) \quad (B - A) + (C - B) = (C - A).$$

(Dokažte si podrobně formálně sami!)

Všimněme si, že volba jednoho pevného bodu $A_0 \in \mathcal{A}$ nám určuje bijekci mezi V a \mathcal{A} . Při volbě pevné báze \underline{u} ve V tak dostáváme pro každý bod $A \in \mathcal{A}$ jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Hovoříme o *afinní soustavě souřadnic* $(A_0; u_1, \dots, u_n)$ zadané počátkem *afinní souřadné soustavy* A_0 a bází zaměření \underline{u} . Hovoříme také o *afinním repéru* (A_0, \underline{u}) .

Slovy můžeme shrnout situaci takto: Afinní souřadnice bodu A v soustavě (A_0, \underline{u}) jsou souřadnicemi vektoru $A - A_0$ v bázi \underline{u} zaměření V .

Volba afinního souřadného systému ztotožňuje n -rozměrný afinní prostor \mathcal{A} se standardním afinním prostorem \mathcal{A}_n .

2.59

4.2. Afinní podprostory. Jestliže si vybereme v \mathcal{A} jen body, které budou mít některé předem vybrané souřadnice nulové (třeba poslední jednu). Dostaneme opět množinu, která se bude chovat jako afinní prostor. Takto budeme skutečně parametricky popisovat tzv. afinní podprostory ve smyslu následující definice.

Definice. Neprázdná podmnožina $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ afinního prostoru \mathcal{A} se zaměřením V se nazývá *afinní podprostor* v \mathcal{A} , je-li podmnožina $W = \{B - A; A, B \in \mathcal{Q}\} \subset V$ vektorovým podprostorem a pro libovolné $A \in \mathcal{Q}$, $v \in W$ je $A + v \in \mathcal{Q}$.

Skutečně je rozumné mít obě podmínky v definici, protože je snadné najít příklady podmnožin, které budou splňovat první, ale nikoliv druhou. Přemýšlejte např. o přímce v rovině s vyjmutým jedním bodem.

Pro libovolnou množinu bodů $M \subset \mathcal{A}$ v afinním prostoru se zaměřením V definujeme vektorový podprostor

$$Z(M) = \langle \{B - A; B, A \in M\} \rangle \subset V.$$

Zejména je $V = Z(\mathcal{A})$ a každý afinní podprostor $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ splňuje sám axiomy afinního prostoru se zaměřením $Z(\mathcal{Q})$.

Přímo z definic je zřejmé, že průnik libovolné množiny afinních podprostorů je buď opět afinní podprostor nebo prázdná množina.

Afinní podprostor $\langle M \rangle$ v \mathcal{A} *generovaný* neprázdnou podmnožinou $M \subset \mathcal{A}$ je průnikem všech afinních podprostorů, které obsahují všechny body podmnožiny M .

Přímo z definic plyne, že pro kterýkoliv bod $A_0 \in M$ je $\langle M \rangle = \{A_0 + v; v \in Z(M) \subset Z(\mathcal{A})\}$, tj. pro generování afinního podprostoru vezmeme vektorový podprostor $Z(M)$ v zaměření generovaný všemi rozdíly bodů z M a ten pak přičteme k libovolnému z nich. Hovoříme také o *afinním obalu* množiny bodů M v \mathcal{A} .

Naopak, kdykoliv zvolíme podprostor U v zaměření $Z(\mathcal{A})$ a jeden pevný bod $A \in \mathcal{A}$, pak podmnožina $A + U$ vzniklá všemi možnými součty bodů A s vektory v U je afinní podprostor. Takový postup vede k pojmu parametrizace podprostorů:

Nechť $\mathcal{Q} = A + Z(\mathcal{Q})$ je afinní podprostor v \mathcal{A}_n a (u_1, \dots, u_k) je báze $Z(\mathcal{Q}) \subset \mathbb{R}^n$. Pak vyjádření podprostoru

$$\mathcal{Q} = \{A + t_1 u_1 + \dots + t_k u_k; t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

nazýváme *parametrický popis* podprostoru \mathcal{Q} . Jeho zadání systémem rovnic v daných souřadnicích je *implicitní popis* podprostoru \mathcal{Q} .

2.60

4.3. Příklady afinních prostorů. (1) Jednorozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů reálné přímky \mathcal{A}_1 . Její zaměření je jednorozměrný vektorový prostor \mathbb{R} (a nosná množina také \mathbb{R}). Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a měřítka (tj. báze ve vektorovém prostoru \mathbb{R}). Všechny vlastní afinní podprostory jsou 0-rozměrné, jsou to právě všechny body reálné přímky R .

(2) Dvourozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů prostoru \mathcal{A}_2 se zaměřením \mathbb{R}^2 . (Nosnou množinou je \mathbb{R}^2 .) Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a dvou nezávislých vektorů (směrů a měřítek). Vlastní afinní podprostory jsou pak všechny body a přímky v rovině (0-rozměrné a 1-rozměrné). Přímky přitom jednoznačně zadáme jejich jedním bodem a jedním generátorem zaměření (tzv. parametrický popis přímky).

(3) Trojrozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů prostoru \mathcal{A}_3 se zaměřením \mathbb{R}^3 . Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a tří nezávislých vektorů (směrů a měřítek). Vlastní afinní podprostory jsou pak všechny body, přímky a roviny (0-rozměrné, 1-rozměrné a 2-rozměrné).

(4) Podprostor všech řešení jedné lineární rovnice $a \cdot x = b$ pro neznámý bod $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_n$, známý nenulový vektor koeficientů (a_1, \dots, a_n) a skalár $b \in \mathbb{R}$ je afinní podprostor dimenze $n - 1$ (říkáme také, že je kodimenze 1), tj. tzv. *nadrovina* v \mathcal{A}_n .

Poslední příklad je zvláštním případem následující obecné věty popisující geometrickou podstatu systémů lineárních rovnic.

2.61

4.4. Věta. *Nechť $(A_0; u)$ je afinní souřadný systém v n -rozměrném afinním prostoru \mathcal{A} . Afinní podprostory dimenze k v \mathcal{A} , vyjádřené v daných souřadnicích, jsou právě množiny řešení řešitelných systémů $n - k$ lineárně nezávislých lineárních rovnic v n proměnných.*

DŮKAZ. Uvažujme libovolný řešitelný systém $n - k$ lineárně nezávislých rovnic $\alpha_i(x) = b_i$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n - k$. Je-li $A = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ libovolné pevně zvolené řešení tohoto (nehomogenního) systému rovnic a je-li $U \subset \mathbb{R}^n$ vektorový podprostor všech řešení zhomogenizovaného systému $\alpha_i(x) = 0$, pak dimenze U je k a podmnožina všech řešení daného systému je tvaru $\{B; B = A + (y_1, \dots, y_n)^T, y = (y_1, \dots, y_n)^T \in U\} \subset \mathbb{R}^n$, viz. 3.1. Příslušný afinní podprostor je tím popsán parametricky ve výchozích souřadnicích $(A_0; \underline{u})$.

Naopak, uvažme libovolný afinní podprostor $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}_n$ a zvolme nějaký jeho bod B za počátek afinního souřadného systému (B, \underline{v}) pro afinní prosotr \mathcal{A} . Protože $\mathcal{Q} = B + Z(\mathcal{Q})$, potřebujeme popsat zaměření podprostoru \mathcal{Q} jako podprostor řešení homogenního systému rovnic. Zvolme tedy bázi \underline{v} na $Z(\mathcal{A})$ tak, aby prvních k vektorů tvořilo bázi $Z(\mathcal{Q})$. Pak v těchto souřadnicích jsou vektory $v \in Z(\mathcal{Q})$ dány rovnostmi

$$\alpha_j(v) = 0, \quad j = k + 1, \dots, n,$$

kde α_i jsou lineární formy z tzv. duální báze k \underline{v} , tj. funkce přiřazení jednotlivých souřadnic v naší bázi \underline{v} .

Náš vektorový podprostor $Z(\mathcal{Q})$ dimenze k v n -rozměrném \mathbb{R}^n je tedy skutečně dán jako řešení homogenního systému $n - k$ nezávislých rovnic. Popis zvoleného afinního podprostoru ve vybraném souřadném systému $(A_0; \underline{u})$ je proto dán systémem homogenních lineárních rovnic.

Zbývá nám se vypořádat důsledky přechodu z původního zadaného souřadného systému $(A; \underline{u})$ do našeho přizpůsobeného $(B; \underline{v})$. Z obecné úvahy o transformacích souřadnic v následujícím odstavci vyplyne, že výsledný popis podprostoru bude opět pomocí systému rovnic, tentokrát ale už obecně nehomogenních. \square

2.62

4.5. Transformace souřadnic. Dvě libovolně zvolené afinní soustavy souřadnic (A_0, \underline{u}) , (B_0, \underline{v}) se obecně liší posunutím počátku o vektor $(B_0 - A_0)$ a jinou bazí zaměření. Transformační rovnice tedy vyčteme ze vztahu pro obecný bod $X \in \mathcal{A}$

$$X = B_0 + x'_1 v_1 + \dots + x'_n v_n = B_0 + (A_0 - B_0) + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n.$$

Označme $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ sloupec souřadnic vektoru $(A_0 - B_0)$ v bázi \underline{v} a $M = (a_{ij})$ buď matice vyjadřující bázi \underline{u} prostřednictvím báze \underline{v} . Potom

$$\begin{aligned} x'_1 &= y_1 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ x'_n &= y_n + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

tj. maticově

$$x' = y + M \cdot x.$$

Jako příklad si můžeme spočítat dopad takové změny báze na vyjádření řešení systémů rovnic. Nechť v souřadnicích $(A_0; \underline{u})$ má systém rovnic tvar

$$S \cdot x = b$$

s maticí systému S . Pak $S \cdot x = S \cdot M^{-1} \cdot (y + M \cdot x) - S \cdot M^{-1} \cdot y = b$. Proto v nových výše uvažovaných souřadnicích $(B_0; \underline{v})$ bude mít náš systém rovnic tvar

$$(S \cdot M^{-1}) \cdot x' = b' = b + (S \cdot M^{-1}) \cdot y.$$

To plně dokončuje důkaz předchozí věty.

2.63

4.6. Afinní kombinace bodů. Necht A_0, \dots, A_k jsou body v afinním prostoru \mathcal{A} . Jejich afinní obal $\langle \{A_0, \dots, A_k\} \rangle$ můžeme zapsat jako

$$\{A_0 + t_1(A_1 - A_0) + \dots + t_k(A_k - A_0); t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

a v libovolných afinních souřadnicích (tj. A_i je vyjádřen sloupcem skalárů) můžeme tutéž množinu zapsat jako

$$\langle A_0, \dots, A_k \rangle = \{t_0 A_0 + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k; t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^k t_i = 1\}.$$

Obecně výrazy $t_0 A_0 + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$ s koeficienty splňujícími $\sum_{i=0}^k t_i = 1$ rozumíme body $A_0 + \sum_{i=1}^k t_i (A_i - A_0)$ a nazýváme je *afinní kombinace bodů*.

Body A_0, \dots, A_k jsou v *obecné poloze*, jestliže generují k -rozměrný podprostor. Z našich definic je vidět, že to nastane právě, když pro kterýkoliv z nich platí, že vektory vzniklé pomocí rozdílů tohoto pevného s ostatními jsou lineárně nezávislé. Všimněme si také, že zadání posloupnosti $\dim \mathcal{A}$ bodů v obecné poloze je ekvivalentní zadání afinního repéru s středem v prvním z nich.

Afinní kombinace je obdobná konstrukce pro body afinního prostoru jako byla lineární kombinace pro vektorové prostory. Skutečně, afinní podprostor generovaný body A_0, \dots, A_k je roven množině všech afinních kombinací svých generátorů. Můžeme však nyní dobře zobecnit i pojem „mezi dvěma body na přímce“. V dvojrozměrném případě tomu odpovídá vnitřek trojúhelníku. Obecně budeme postupovat takto:

Necht A_0, \dots, A_k je $k+1$ bodů afinního prostoru \mathcal{A} v obecné poloze. k -rozměrný *simplex* $\Delta = \Delta(A_0, \dots, A_k)$ generovaný těmito body je definován jako množina všech afinních kombinací bodů A_i s pouze nezápornými koeficienty, tzn.

$$\Delta = \{t_0 A_0 + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k; t_i \in [0, 1] \subset \mathbb{R}, \sum_{i=0}^k t_i = 1\}.$$

Jednorozměrný simplex je *úsečka*, dvourozměrný *trojúhelník*.

Zadání podprostoru jako množiny afinních kombinací bodů v obecné poloze je ekvivalentní parametrickému popisu. Obdobně pracujeme s parametrickými popisy simplexů.

2.64

4.7. Konvexní množiny. Podmnožina M afinního prostoru se nazývá *konvexní*, jestliže s každými svými dvěma body A, B obsahuje i celou úsečku $\Delta(A, B)$. Přímo z definice je vidět, že každá konvexní množina obsahuje s každými $k+1$ body v obecné poloze i celý jimi definovaný simplex.

Konvexními množinami jsou např.

- (1) prázdná podmnožina
- (2) afinní podprostory
- (3) úsečky, polopřímky $p = \{P + t \cdot v; t \geq 0\}$, obecněji k -rozměrné poloprostory $\alpha = \{P + t_1 \cdot v_1 + \dots + t_k \cdot v_k; t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}, t_k \geq 0\}$, úhly v dvojrozměrných podprostorech $\beta = \{P + t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2; t_1 \geq 0, t_2 \geq 0\}$, atd.

Přímo z definice také plyne, že průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní. Průnik všech konvexních množin obsahujících danou množinu M nazýváme *konvexní obal* $\mathcal{K}(M)$ množiny M .

Věta. *Konvexní obal libovolné podmnožiny $M \subset \mathcal{A}$ je*

$$\mathcal{K}(M) = \{t_1 A_1 + \cdots + t_s A_s; \sum_{i=1}^s t_i = 1, t_i \geq 0\}$$

DŮKAZ. Označme S množinu všech afinních kombinací na pravé straně dokazované rovnosti. Nejprve ověříme, že je S konvexní. Zvolme tedy dvě sady parametrů $t_i, i = 1, \dots, s_1, t'_j, j = 1, \dots, s_2$ s požadovanými vlastnosti. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $s_1 = s_2$ a že v obou kombinacích vystupují stejné body z M (jinak prostě přidáme sčítance s nulovými koeficienty). Uvažme libovolný bod úsečky zadané takto získanými body:

$$\epsilon(t_1 A_1 + \cdots + t_s A_s) + (1 - \epsilon)(t'_1 A_1 + \cdots + t'_s A_s), \quad 0 \leq \epsilon \leq 1.$$

Zřejmě jsou opět všechny v S .

Zbývá ukázat, že konvexní obal bodů A_1, \dots, A_s nemůže být menší než S . Samotné body A_i odpovídají volbě parametrů $t_j = 0$ pro všechny $j \neq i$ a $t_i = 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny množiny s nejvýše $s - 1$ body. To znamená, že konvexní obal bodů A_1, \dots, A_{s-1} je (podle předpokladu) tvořen právě těmi kombinacemi z pravé strany dokazované rovnosti, kde $t_s = 0$. Uvažme nyní libovolný bod $A = t_1 A_1 + \cdots + t_s A_s \in S, t_s \neq 1$, a afinní kombinace

$$\epsilon(t_1 A_1 + \cdots + t_{s-1} A_{s-1}) + (1 - \epsilon(1 - t_s)) A_s, \quad 0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{1 - t_s}.$$

Jde o úsečku s krajními body určenými parametry $\epsilon = 0$ (bod A_s) a $\epsilon = 1/(1 - t_s)$ (bod v konvexním obalu bodů A_1, \dots, A_{s-1}). Bod A je vnitřním bodem této úsečky s parametrem $\epsilon = 1$. \square

Konvexní obaly konečných množin bodů se nazývají *konvexní mnohostěny*. Jsou-li definující body A_0, \dots, A_k konvexního mnohostěnu v obecné poloze, dostáváme právě k -rozměrný *simplex*. V případě simplexu je vyjádření jeho bodů ve tvaru afinní kombinace definujících vrcholů jednoznačné.

Jiným příkladem jsou konvexní podmnožiny generované jedním bodem a konečně mnoha vektory: Nechtě u_1, \dots, u_k , jsou libovolné vektory v zaměření \mathbb{R}^n , $A \in \mathcal{A}_n$ je libovolný bod. *Rovnoběžnostěn* $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{A}_n$ je množina

$$\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \{A + c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k; 0 \leq c_i \leq 1, i = 1, \dots, k\}.$$

Jsou-li vektory u_1, \dots, u_k nezávislé, hovoříme o k -rozměrném rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{A}_n$. Z definice je zřejmé, že rovnoběžnostěny jsou konvexní. Ve skutečnosti jde o konvexní obaly jejich vrcholů.

2.65

4.8. Příklady standardních afinních úloh. (1) *K podprostoru zadanému implicitně nalézt parametrický popis a naopak:*

Nalezením partikulárního řešení nehomogenního systému a fundamentálního řešení zhomogenizovaného systému rovnic získáme (v souřadnicích, ve kterých byly rovnice zadány) právě hledaný parametrický popis. Naopak, zapíšeme-li parametrický popis v souřadnicích, můžeme volné parametry t_1, \dots, t_k vyeliminovat a získáme právě rovnice zadávající daný podprostor implicitně.

(2) *Nalézt podprostor generovaný několika podprostory $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_s$ (obecně různých dimenzí, např. v \mathbb{R}_3 nalézt rovinu danou bodem a přímkou, třemi body apod.) a zadat jej implicitně či parametricky:*

Výsledný podprostor \mathcal{Q} je vždy určen jedním pevně zvoleným bodem A_i v každém z nich a součtem všech zaměření. Např.

$$\mathcal{Q} = A_1 + (Z(\{A_1, \dots, A_k\}) + Z(\mathcal{Q}_1) + \dots + Z(\mathcal{Q}_s)).$$

Pokud jsou podprostory zadány implicitně, je možné je nejdříve převést na parametrický tvar. V konkrétních situacích bývají funkční i jiné postupy. Všimněme si, že obecně je skutečně nutné využít jednoho bodu z každého podprostoru. Např. dvě paralelní přímky v rovině vygenerují celou rovinu, ale sdílí totéž jednorozměrné zaměření.

(3) *Nalézt průnik podprostorů $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_s$:*

Pokud jsou zadány v implicitním tvaru, stačí sjednotit všechny rovnice do jednoho systému (a případně vynechat lineární závislé). Pokud je vzniklý systém neřešitelný, je průnik prázdný. V opačném případě získáme implicitní popis afinního podprostoru, který je hledaným průnikem.

Pokud máme dány parametrické tvary, můžeme také hledat přímo společné body jako řešení vhodných rovnic, podobně jako při hledání průniků vektorových podprostorů. Získáme tak přímo opět parametrický popis. Pokud je podprostorů více než dva, musíme průnik hledat postupně.

Máme-li jeden prostor zadán parametricky a ostatní implicitně, stačí dosadit parametrizované souřadnice a řešit výsledný systém rovnic.

(4) *Nalezení příčky mimoběžek p, q v A_3 procházející daným bodem nebo mající předem daný směr (tj. zaměření):*

Příčkou rozumíme přímku, která má neprázdný průnik s oběma mimoběžkami. Výsledná příčka r tedy bude jednorozměrným afinním podprostorem. Pokud máme zadán jeho bod $A \in r$, pak afinní podprostor generovaný p a A je buď přímka ($A \in p$) nebo rovina ($A \notin p$). V prvním případě máme nekonečně mnoho řešení, jedno pro každý bod $z q$, v druhém stačí najít průnik B roviny $\langle p \cup A \rangle$ s q a $r = \langle \{A, B\} \rangle$. Pokud je průnik prázdný, úloha nemá řešení, v případě že $q \subset \langle p \cup A \rangle$, máme opět nekonečně mnoho řešení, a pokud je průnik jednorozměrný, dostáváme právě jedno řešení.

Máme-li místo bodu dán směr $u \in \mathbb{R}^n$, tj. zaměření r , pak uvažujeme opět podprostor \mathcal{Q} generovaný p a zaměření $Z(p) + \langle u \rangle \subset \mathbb{R}^n$. Opět, pokud $q \subset \mathcal{Q}$, máme nekonečně mnoho řešení, jinak uvážíme průnik \mathcal{Q} s q a úlohu dokončíme stejně jako v předchozím případě.

Řešení mnoha dalších standardních geometrických úloh spočívá v používání výše uvedených kroků.

4.9. Příklad. Uvádíme několik příkladů s výsledky.

Příklad.1. *Parametricky vyjádřete průnik následujících rovin v \mathbb{R}^3 :*

$$\sigma : 2x + 3y - z + 1 = 0 \quad \text{a} \quad \rho : x - 2y + 5 = 0.$$

Řešení. Přímka $(2t, t, 7t) + [-5, 0, -9]$. □

Příklad.2. *Najděte příčku přímek (úsečku, jejíž jeden koncový bod leží na jedné z přímek, druhý pak na druhé z nich)*

$$p : [1, 1, 1] + t(2, 1, 0), \quad q : [2, 2, 0] + t(1, 1, 1),$$

takovou, že přímka jí určená prochází bodem $[1, 0, 0]$.

Řešení. Hledaný bod v q najdeme jako průnik přímky q s rovinou

$$[1, 1, 1] + t(2, 1, 0) + s(0, 1, 1).$$

Jde o úsečku s krajními body $[5, 5, 3] \in q$, $[7/3, 5/3, 1] \in p$. □

Příklad.3. Určete osu mimoběžek

$$\begin{aligned} p &: [3, 0, 3] + (0, 1, 2)t \\ q &: [0, -1, -2] + (1, 2, 3)t. \end{aligned}$$

Řešení. Úsečka $([2, 3, 4], [3, 1, 5])$. □

Příklad.4. Nalezněte osu mimoběžek

$$p : [1, 1, 1] + t(2, 1, 0), \quad q : [2, 2, 0] + t(1, 1, 1).$$

Řešení. $[3, 2, 1][8/3, 8/3, 2/3]$. □

Příklad.5. Určete patu kolmice spuštěné z bodu $[0, 0, 7]$ na rovinu

$$\rho : [0, 5, 3] + (1, 2, 1)t + (-2, 1, 1)s.$$

Řešení. $(-1, 3, 2)$. □

Příklad.6. Zjistěte, zda leží body $[0, 2, 1]$, $[-1, 2, 0]$, $[-2, 5, 2]$ a $[0, 5, 4]$ z \mathbb{R}^3 v jedné rovině.

Řešení. Libovolná dvojice zadaných bodů z afinního prostoru \mathbb{R}^3 určuje vektor (viz definice afinního prostoru; jeho souřadnice jsou dány po složkách rozdílů souřadnic daných dvou bodů). To, že dané čtyři body leží v rovině je ekvivalentní tomu, že jsou tři vektory dané jedním vybraným bodem a vždy jedním ze tří zbylých lineárně závislé. Vybereme např. bod $[0, 2, 1]$ (na výběru nezáleží), pak uvažujeme vektory $[0, 2, 1] - [-1, 2, 0] = (1, 0, 1)$, $[0, 2, 1] - [-2, 5, 2] = (2, -3, -1)$ a $[0, 2, 1] - [0, 5, 4] = (0, -3, -3)$. Vidíme, že součet dvojnásobku prvního vektoru a třetího vektoru je roven druhému vektoru, vektory jsou tedy lineárně závislé (jinak má taky matice, jejíž řádky jsou tvořeny souřadnicemi daných vektorů, hodnotu nižší než tři; v tomto případě se tedy jedná o matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

kteřá má hodnotu dva). Dané body tedy leží v rovině. □

Příklad.7. Na kolik částí mohou dělit prostor (\mathbb{R}^3) tři roviny? Pro každou možnost popište odpovídající případ.

Řešení. 2, 3, 4, 6, 7, 8. Polohy rovin, které realizují dané počty si rozmyslete samostatně. □

Příklad.8. Rozhodněte, zda leží bod $[2, 1, 0]$ uvnitř konvexního obalu bodů $[0, 2, 1]$, $[1, 0, 1]$, $[3, -2, -1]$, $[-1, 0, 1]$.

Řešení. Sestavíme nehomogenní lin. soustavu, pro koeficienty t_1, t_2, t_3, t_4 , afinní kombinace daných bodů, která dává první bod (jsou určeny jednoznačně, pokud dané

body neleží v rovině).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poslední rovnice udává, že jde o afinní kombinaci. Jejím řešením dostáváme $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (1, 0, 1/2, -1/2)$, nejedná se tedy o konvexní kombinaci. (nelze odvodit pomocí projekcí na jednotlivé osy). \square

Příklad.9. Určete odchylku rovin

$$\begin{aligned} \sigma &: [1, 0, 2] + (1, -1, 1)t + (0, 1, -2)s \\ \rho &: [3, 3, 3] + (1, -2, 0)t + (0, 1, 1)s \end{aligned}$$

Řešení. Průsečnice má směrový vektor $(1, -1, 1)$, kolmá rovina na ni má pak s danými rovinami průniky generované vektory $(1, 0, -1)$ a $(0, 1, 1)$. Tyto jednorozměrné podprostory svírají úhel 60° . \square

Příklad.10. Je dán rovnoběžník $[0, 0, 1]$, $[2, 1, 1]$, $[3, 3, 1]$, $[1, 2, 1]$. Určete bod X na přímce $p : [0, 0, 1] + (1, 1, 1)t$ tak, aby rovnoběžnostěn určený daným rovnoběžníkem a bodem X měl objem 1.

Řešení. Sestavíme determinant udávající objem rovnoběžnostěnu při pohyblivém bodu X :

$$\begin{vmatrix} t & t & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Podmínka, že má být roven jedné dává $t = 1/3$. \square

Příklad.11. Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$ (ve standardním označení, tj. $ABCD$ a $A'B'C'D'$ jsou stěny, AA' pak hrana). Určete odchylku vektorů AB' a AD' .

Řešení. Uvažujme krychli o hraně 1 a umístěme ji v \mathbb{R}^3 tak, že bod A bude mít ve standardní bázi souřadnice $[0, 0, 0]$, bod B pak souřadnice $[1, 0, 0]$ a bod C souřadnice $[1, 1, 0]$. Potom má bod B' souřadnice $[1, 0, 1]$ a bod D' souřadnice $[0, 1, 1]$. Pro vyšetřované vektory tedy můžeme psát $AB' = B' - A = [1, 0, 1] - [0, 0, 0] = (1, 0, 1)$, $AD' = D' - A = [0, 1, 1] - [0, 0, 0] = (0, 1, 1)$. Podle definice odchylky φ těchto vektorů je pak

$$\cos(\varphi) = \frac{(1, 0, 1) \cdot (0, 1, 1)}{\| (1, 0, 1) \| \| (0, 1, 1) \|} = \frac{1}{2},$$

tedy $\varphi = 60^\circ$. \square

2.66

4.10. Afinní zobrazení. Zobrazení $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ mezi afinními prostory nazýváme *afinní zobrazení*, jestliže existuje lineární zobrazení $\varphi : Z(\mathcal{A}) \rightarrow Z(\mathcal{B})$ takové, že pro všechny $A \in \mathcal{A}$, $v \in Z(\mathcal{A})$ platí

$$f(A + v) = f(A) + \varphi(v).$$

Zobrazení f a φ jsou jednoznačně zadána touto vlastností a libovolně zvolenými obrazy $(\dim \mathcal{A} + 1)$ bodů v obecné poloze.

Pro libovolnou afinní kombinaci bodů $t_0A_0 + \dots + t_sA_s \in \mathcal{A}$ pak dostaneme

$$\begin{aligned} f(t_0A_0 + \dots + t_sA_s) &= f(A_0) + t_1\varphi(A_1 - A_0) + \dots + t_s\varphi(A_s - A_0) \\ &= t_0f(A_0) + t_1f(A_1) + \dots + t_sf(A_s). \end{aligned}$$

Naopak, pokud pro nějaké zobrazení platí, že zachovává afinní kombinace, můžeme číst předchozí výpočet v opačném pořadí a zjistíme, se jedná o afinní zobrazení. Ekvivalentně lze tedy definovat afinní zobrazení jako ta, která zachovávají afinní kombinace bodů.

Volbou afinních souřadnic (A_0, \underline{u}) na \mathcal{A} a (B_0, \underline{v}) na \mathcal{B} dostáváme souřadné vyjádření afinního zobrazení $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Přímo z definice je zřejmé, že stačí vyjádřit obraz počátku souřadnic v \mathcal{A} v souřadnicích na \mathcal{B} , tj. vyjádřit vektor $f(A_0) - B_0$ v bázi \underline{v} a vše ostatní je pak určeno násobením maticí zobrazení φ ve zvolených bazích a přičtením výsledku.

4.11. Příklad. *Napište matici B afinního zobrazení f daného ve standardní bázi v \mathbb{R}^2 jako*

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

souřadné soustavě dané bází $\underline{u} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ a počátkem $[2, 0]$.

Řešení. Matice přechodu od dané báze \underline{u} ke standardní bázi \underline{e} je

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matici zobrazení v bázi $([2, 0], \underline{u})$ získáme tak, že nejprve transformujeme souřadnice příkvané v bázi $([2, 0], \underline{u})$ na souřadnice ve standardní bázi, tedy v bázi $([0, 0], (1, 0), (0, 1))$, poté aplikujeme matici zobrazení f ve standardní bázi a na závěr výsledek transformujeme zpět do souřadnic v bázi $([2, 0], \underline{u})$. Transformační rovnice přechodu od souřadnic y_1, y_2 v bázi $([2, 0], \underline{u})$ k souřadnicím x_1, x_2 v standardní bázi jsou

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud máme, že

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pro matici zobrazení pak dostáváme

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

4.12. Příklad. Příklad. *Mejme dánu standardní souřadnou soustavu v trojrozměrném Eukleidovském prostoru. Agent K sídlí v bodě S o souřadnicích $[0, 1, 2]$ a ústředí mu přidělilo pro používání souřadnou soustavu s počátkem S a bází $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$. Agent Sokol bydlí domě D na kótě $[1, 1, 1]$ a používá souřadnou soustavu s bází $\{(0, 0, 1), (-1, 1, 2), (1, 0, 1)\}$. Agent K žádá Sokola*

o schůzku v cihelně, která leží podle jeho souřadné soustavy v bodě $[1, 1, 0]$. Kam má přijít Sokol (podle jeho souřadnic)?

Řešení. Matice přechodu od báze agenta K k Sokolově bázi (při stejných počátcích) je

$$T = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektor $(0, 1, 2)$ má tedy souřadnice $T \cdot (0, 1, 2)^T = (0, 2, 1)^T$, posunutím počátku (přičteme vektor $(-1, 0, 1)$) dostáváme výsledek $(-1, 2, 2)$. \square

2. Euklidovská geometrie

Na minulé kapitole jsme vytvořili východisko pro elementární geometrii a nepotřebovali jsme k tomu pojem vzdálenosti nebo velikosti. Ve skutečnosti jsme pojem velikosti vektorů a odchylku vektorů zavedli na konci třetí kapitoly této části. Několikrát jsme také nejen v geometrii roviny se vzdálenostmi pracovali, viz třeba optimalizační výsledek o neřešitelných systémech lineárních rovnic a pseudoinverzních maticích ve Větě 3.30. Asi proto dobře tušíme, jak se s problémem vypořádat:

4.13. Definice. Standardní *bodový euklidovský prostor* \mathcal{E}_n je afinní prostor \mathcal{A}_n , jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor \mathbb{R}^n se skalárním součinem

$$\langle x, z \rangle = x^T \cdot y.$$

Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; \underline{u})$ s ortonormální bází \underline{u} . *Vzdálenost bodů* $A, B \in \mathcal{E}_n$ definujeme jako velikost vektoru $\|B - A\|$, budeme ji značit $\rho(A, B)$. *Euklidovské podprostory* v \mathcal{E}_n jsou afinní podprostory jejichž zaměření uvažujeme spolu se zúženými skalárními součiny.

Bodovým euklidovským prostorem \mathcal{E} pak obecně rozumíme afinní prostor, jehož zaměření je euklidovský vektorový prostor. Pojem kartézské souřadné soustavy má opět jasný smysl. Každá volba takové souřadné soustavy ovšem zadává ztotožnění \mathcal{E} se standardním prostorem \mathcal{E}_n . Proto se budeme v dalším, bez újmy na obecnosti, zabývat hlavně standardními euklidovskými prostory a jejich podprostory.

Opět si napřed uvedeme několik jednoduchých tvrzení o euklidovských prostorech. K jejich formulaci i důkazům se ale musíme zamyslet nad standardními vztahy mezi velikostmi vektorů, které podobně jako v rovinné geometrii platí obecně:

4.12

4.14. Věta. Pro každé vektory u a v , které leží v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem, platí

- (1) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (*trojúhelníková nerovnost*). Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.
- (2) $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$ (*Cauchyova nerovnost*). Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.
- (3) pro každý ortonormální systém vektorů (e_1, \dots, e_k) platí $\|u\|^2 \geq |u \cdot e_1|^2 + \dots + |u \cdot e_k|^2$ (*Besselova nerovnost*).
- (4) Pro ortonormální systém vektorů (e_1, \dots, e_k) je $u \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ právě když $\|u\|^2 = |u \cdot e_1|^2 + \dots + |u \cdot e_k|^2$ (*Parsevalova rovnost*).
- (5) Pro ortonormální systém vektorů (e_1, \dots, e_k) a $u \in V$ je vektor

$$w = (u \cdot e_1)e_1 + \dots + (u \cdot e_k)e_k$$

jediným vektorem, který minimalizuje velikost $\|u - v\|$ pro všechny $v \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$.

DŮKAZ. Všechny důkazy spočívají v podstatě v přímých výpočtech:

(2): Definujme vektor $w := u - \frac{u \cdot v}{v \cdot v}v$, tzn. $w \perp v$ a počítejme

$$\begin{aligned} 0 \leq \|w\|^2 &= \|u\|^2 - \frac{(u \cdot v)}{\|v\|^2}(u \cdot v) - \frac{u \cdot v}{\|v\|^2}(v \cdot u) + \frac{(u \cdot v)(u \cdot v)}{\|v\|^4}\|v\|^2 \\ 0 \leq \|w\|^2\|v\|^2 &= \|u\|^2\|v\|^2 - 2(u \cdot v)(u \cdot v) + (u \cdot v)(u \cdot v) \end{aligned}$$

Odtud již přímo plyne, že $\|u\|^2\|v\|^2 \geq |u \cdot v|^2$ a rovnost nastane právě tehdy, když $w = 0$, tj. když jsou u a v lineárně závislé.

(1): Opět stačí počítat

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + u \cdot v + v \cdot u = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|u \cdot v| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Protože se přitom jedná o kladná reálná čísla, je opravdu $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Navíc, při rovnosti musí nastat rovnost ve všech předchozích nerovnostech, to však je ekvivalentní podmínce, že u a v jsou lineárně závislé (podle předchozí části důkazu).

(3), (4): Nechť (e_1, \dots, e_k) je ortonormální systém vektorů. Doplňme jej do ortonormální báze (e_1, \dots, e_n) . Pak je pro každý vektor $u \in V$

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n (u \cdot e_i)(u \cdot e_i) = \sum_{i=1}^n |u \cdot e_i|^2 \geq \sum_{i=1}^k |u \cdot e_i|^2.$$

To je ale právě dokazovaná Besselova nerovnost. Přitom rovnost může nastat právě tehdy, když $u \cdot e_i = 0$ pro všechny $i > k$, a to dokazuje Parsevalovu rovnost.

(5): Zvolme libovolný $v \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ a doplňme daný ortonormální systém na ortonormální bázi (e_1, \dots, e_n) . Nechť (u_1, \dots, u_n) a $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ jsou po řadě souřadnice u a v v této bázi. Pak

$$\|u - v\|^2 = |u_1 - x_1|^2 + \dots + |u_k - x_k|^2 + |u_{k+1}|^2 + \dots + |u_n|^2$$

a tento výraz je zjevně minimalizován při volbě $x_1 = u_1, \dots, x_k = u_k$. □

Nyní již dostáváme jednoduché důsledky pro euklidovskou geometrii:

4.13 **4.15. Věta.** Pro body $A, B, C \in \mathcal{E}_n$ platí

- (1) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$
- (2) $\rho(A, B) = 0$ právě, když $A = B$
- (3) $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$
- (4) V každé kartézské souřadné soustavě $(A_0; \underline{e})$ mají body

$$A = A_0 + a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, \quad B = A_0 + b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$$

vzdálenost $\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$.

- (5) Je-li dán bod A a podprostor \mathcal{Q} v \mathcal{E}_n , pak existuje bod $P \in \mathcal{Q}$ minimalizující vzdálenosti bodů \mathcal{Q} od A . Vzdálenost bodů A a P je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A - B$ do $Z(\mathcal{Q})^\perp$ pro libovolný $B \in \mathcal{Q}$.
- (6) Obecněji, pro podprostory \mathcal{R} a \mathcal{Q} v \mathcal{E}_n existují bod $P \in \mathcal{Q}$ a $Q \in \mathcal{R}$ minimalizující vzdálenosti bodů $B \in \mathcal{Q}$ a $A \in \mathcal{R}$. Vzdálenost bodů Q a P je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A - B$ do $Z(\mathcal{Q})^\perp$ pro libovolné body $B \in \mathcal{Q}$ a $A \in \mathcal{R}$.

DŮKAZ. První tři vlastnosti vyplývají přímo z vlastností velikosti vektorů v prostorech se skalárním součinem, čtvrtá plyne přímo z vyjádření skalárního součinu v libovolné ortonormální bázi.

Podívejme se na vztah pro minimalizaci vzdleností $\rho(A, B)$ pro $B \in \mathcal{Q}$. Vektor $A - B$ se jednoznačně rozkládá na $A - B = u_1 + u_2$, $u_1 \in Z(\mathcal{Q})$, $u_2 \in Z(\mathcal{Q})^\perp$. Přitom u_2 nezávisí na volbě $B \in \mathcal{Q}$, $P = A + (-u_2) = B + u_1 \in \mathcal{Q}$ a $\|A - B\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \geq \|u_2\|^2 = \|A - P\|$. Odtud již vyplývá, že infima je skutečně dosaženo, a to pro bod P . Vypočtená vzdálenost je skutečně $\|u_2\|$.

Obecný výsledek se dokáže zcela obdobně. \square

4.16. Vzdálenost přímek. Určete vzdálenost přímek v \mathbb{R}^3 .

$$p : [1, -1, 0] + t(-1, 2, 3), \quad a \quad q : [2, 5, -1] + t(-1, -2, 1).$$

Řešení. Vzdálenost je dána jako velikost kolmého průmětu libovolné příčky (spojnice) daných přímek do ortogonálního doplňku vektorového podprostoru generovaného jejich zaměřeními. Tento ortogonální doplněk zjistíme například pomocí vektorového součinu:

$$\langle (-1, 2, 3), (-1, -2, 1) \rangle^\perp = \langle (-1, 2, 3) \times (-1, -2, 1) \rangle = \langle (8, -2, 4) \rangle = \langle (4, -1, 2) \rangle.$$

Spojnici daných přímek je například úsečka $[1, -1, 0][2, 5, -1]$, promítneme tedy vektor $[1, -1, 0] - [2, 5, -1] = (-1, -6, 1)$. Pro vzdálenost přímek pak dostáváme:

$$\rho(p, q) = \frac{|(-1, -6, 1) \cdot (4, -1, 2)|}{\|(4, -1, 2)\|} = \frac{4}{\sqrt{21}}.$$

\square

Stejně jako vzdálenost, i řada dalších geometrických pojmů jako odchylky, orientace, objem apod. je v bodových prostorech \mathcal{E}_n zaváděna prostřednictvím vhodných pojmů ve vektorových euklidovských prostorech. Proto se nyní budeme chvíli věnovat opět reálným unitárním prostorům. Začneme s diskusí velikosti úhlů. Z Cauchyovy nerovnosti plyne $0 \leq \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$, má tedy smysl následující definice.

4.17. Definice. *Odchylka* $\varphi(u, v)$ vektorů $u, v \in V$ v reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem je dána vztahem

$$\cos \varphi(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}, \quad 0 \leq \varphi(u, v) \leq 2\pi.$$

Jak jsme viděli, v rovině \mathbb{R}^2 pro (obvyklou) odchylku vektorů na jednotkové kružnici $u = (1, 0)$, $v = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ skutečně platí $\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$. Protože odchylka je nezávislá na velikostech vektorů, platí stejný vztah i pro vektory $u = (x_1, 0)$, $v = (a \cos \varphi, a \sin \varphi)$. Protože vhodnou rotací dosáhneme toho, že jeden z dvojice vektorů má tvar $(x_1, 0)$, platí náš vztah zcela obecně v rovině. Ve vícerozměrných prostorech je odchylka dvou vektorů vždy měřena v rovině, kterou tyto vektory generují (nebo je nula), jistě tedy náš definiční vztah odpovídá zvyklostem ve všech dimenzích.

V libovolném reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem přímo z definic plyne

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u \cdot v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos \varphi(u, v).$$

To je tzv. *kosinová věta*.

Dále platí pro každou ortonormální bázi \underline{e} a $u \in V$ vztah $\|u\|^2 = \sum_i |u \cdot e_i|^2$, tj.

$$1 = \sum_i (\cos \varphi(u, e_i))^2,$$

což je obvyklé tvrzení o směrových kosinech $\varphi(u, e_i)$ vektoru u .

Z definice odchylek vektorů nyní můžeme dovodit rozumné definice pro obecné podprostory v každém euklidovském vektorovém prostoru.

4.18. Definice. Nechť U_1, U_2 jsou podprostory v euklidovském prostoru V . *Odchylka podprostorů* U_1, U_2 je reálné číslo $\alpha = \varphi(U_1, U_2) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ splňující:

(1) Je-li $\dim U_1 = \dim U_2 = 1$, $U_1 = \langle u \rangle$, $U_2 = \langle v \rangle$, pak

$$\cos \alpha = \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|}.$$

(2) Jsou-li dimenze U_1, U_2 kladné a $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, pak je odchylka minimem všech odchylek jednorozměrných podprostorů

$$\alpha = \min\{\varphi(\langle u \rangle, \langle v \rangle); 0 \neq u \in U_1, 0 \neq v \in U_2\}.$$

Ukážeme v zápětí, že takové minimum skutečně vždy existuje.

(3) Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

(4) Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp).$$

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru \mathcal{E}_n se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1), Z(\mathcal{Q}_2)$.

Všimněme si, že odchylka je vždy dobře definována, zejména v posledním případě je

$$(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp) \cap (U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^\perp) = \{0\}$$

můžeme tedy opravdu odchylku určit podle bodu (2). Všimněme si také, že v případě $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, jsou U_1 a U_2 kolmé podle našich dřívějších definic právě, když jejich odchylka je $\pi/2$. Pokud však mají netriviální průnik, nemohou být kolmé v dřívějším smyslu.

Ke korektnosti definice zbývá ukázat, že ve skutečnosti vždy existují vektory $u \in U_1$, $v \in U_2$, pro které nabývá výraz pro odchylku požadovaného minima. Nejdříve speciální případ:

4.19. Lemma. *Nechť v je vektor v euklidovském prostoru V a $U \subset V$ libovolný podprostor. Označme $v_1 \in U$, $v_2 \in U^\perp$ (jednoznačně určené) komponenty vektoru v , tj. $v = v_1 + v_2$. Pak pro odchylku φ podprostoru generovaného v od U platí*

$$\cos \varphi(\langle v \rangle, U) = \cos \varphi(\langle v \rangle, \langle v_1 \rangle) = \frac{\|v_1\|}{\|v\|}.$$

DŮKAZ. Pro všechny $u \in U$ platí

$$\begin{aligned} \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|} &= \frac{|u \cdot (v_1 + v_2)|}{\|u\| \|v\|} = \frac{|u \cdot v_1|}{\|u\| \|v\|} \\ &\leq \frac{\|u\| \|v_1\|}{\|u\| \|v\|} = \frac{\|v_1\|}{\|v\|} = \frac{\|v_1\|^2}{\|v\| \|v_1\|} = \frac{|v_1 \cdot v|}{\|v\| \|v_1\|}. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\cos \varphi(\langle v \rangle, \langle u \rangle) \leq \cos \varphi(\langle v \rangle, \langle v_1 \rangle) = \frac{\|v_1\|}{\|v\|}$$

a protože funkce \cos je na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ klesající, je tvrzení dokázané. \square

4.20. Výpočet odchylek. Uvažujme dva podprostory U_1, U_2 v euklidovském prostoru V , $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ a zvolme pevně ortonormální báze \underline{e} , a \underline{e}' tak, aby $U_1 = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$, $U_2 = \langle e'_1, \dots, e_l \rangle$. Nechť φ je kolmý průmět na U_2 , jeho zúžení na U_1 budeme opět značit $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$. Zobrazení $\psi : U_2 \rightarrow U_1$ nechť vznikne podobně z kolmého průmětu na U_1 . Tato zobrazení mají v bazích (e_1, \dots, e_k) a (e'_1, \dots, e_l) matice

$$A = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e'_1 & \dots & e_k \cdot e'_1 \\ \vdots & & \vdots \\ e_1 \cdot e'_l & \dots & e_k \cdot e'_l \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e'_1 \cdot e_1 & \dots & e'_l \cdot e_1 \\ \vdots & & \vdots \\ e'_1 \cdot e_k & \dots & e'_l \cdot e_k \end{pmatrix}$$

Zejména platí $B = A^T$. Složené zobrazení $\psi \circ \varphi : U_1 \rightarrow U_1$ má tedy symetrickou matici $A^T A$. Viděli jsme, že každé takové zobrazení má pouze nezáporná reálná vlastní čísla a že má ve vhodné ortonormální bázi diagonální matici s těmito vlastními čísly na diagonále, viz 3.21–3.23.

Nyní můžeme odvodit obecný postup pro výpočet odchylky $\alpha = \varphi(U_1, U_2)$.

Věta. V předchozím označení nechť λ je největší vlastní hodnota matice $A^T A$. Pak $\cos^2 \alpha = \lambda$

DŮKAZ. Nechť $u \in U_1$ je vlastní vektor zobrazení $\psi \circ \varphi$ příslušný největší vlastní hodnotě λ , $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ nechť jsou všechna vlastní čísla (včetně násobnosti) a nechť $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ je příslušná ortonormální báze U_1 z vlastních vektorů. Můžeme přímo předpokládat, že $\lambda = \lambda_1$, $u = u_1$. Potřebujeme ukázat, že odchylka libovolného $v \in U_1$ od U_2 je nejméně tak velká jako odchylka u od U_2 . Tzn. že kosinus příslušného úhlu nesmí být větší. Podle předchozího lemmatu stačí diskutovat odchylku u a $\varphi(u) \in U_2$ a přitom víme, že $\|u\| = 1$. Zvolme tedy $v \in U_1$, $v = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$, $\sum_{i=1}^k a_i^2 = \|v\|^2 = 1$. Pak

$$\|\varphi(v)\|^2 = \varphi(v) \cdot \varphi(v) = \psi \circ \varphi(v) \cdot v \leq \|\psi \circ \varphi(v)\| \|v\| = \|\psi \circ \varphi(v)\|.$$

Předchozí lemma navíc dává i vzorec pro odchylku α vektoru v od U_2

$$\cos \alpha = \frac{\|\varphi(v)\|}{\|v\|} = \|\varphi(v)\|.$$

Protože jsme zvolili za λ_1 největší z vlastních hodnot, dostáváme

$$\begin{aligned} (\cos \alpha)^2 &= \|\varphi(v)\|^2 \leq \|\psi \circ \varphi(v)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k (\lambda_i a_i)^2} = \\ &= \sqrt{\lambda_1^2 + \sum_{i=1}^k a_i^2 (\lambda_i^2 - \lambda_1^2)} \leq \sqrt{\lambda_1^2}. \end{aligned}$$

Při $v = u$ dostáváme ovšem přesně $\|\varphi(v)\|^2 = \lambda_1^2 \|v\|^2 = \lambda^2$ a tedy odchylka dosahuje pro tento vektor minimální možné hodnoty. Tím je věta dokázána. \square

4.21. Příklady standardních úloh. 1. Najděte vzdálenost bodu $A \in \mathcal{E}_n$ od podprostoru $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$:

Viz. věta 4.15.

2. V \mathcal{E}_2 vedte bodem A přímkou q svírající s danou přímkou p daný úhel:

Najdeme vektor $u \in \mathbb{R}^2$ ležící v zaměření přímky q a zvolíme vektor v mající od u zadanou odchylku. Hledaná přímka je dána bodem A a zaměřením $\langle v \rangle$. Úloha má dvě nebo jedno řešení.

3. Spočítejte patu kolmice vedené bodem na danou přímkou:

Viz. důkaz předposledního bodu věty 4.15.

4. V \mathcal{E}_3 určete vzdálenost dvou přímek p, q : Zvolíme libovolně jeden bod z každé přímky, $A \in p, B \in q$. Komponenta vektoru $A - B$ v ortogonálním doplňku $(Z(p) + Z(q))^\perp$ má velikost rovnu vzdálenosti p a q .

5. V \mathcal{E}_3 najděte osu dvou mimoběžek p a q :

Nechť η je rovina generovaná jedním bodem $A \in p$ a součtem $Z(p) + (Z(p) + Z(q))^\perp$. Pak průnik $\eta \cap q$ spolu se zaměřením $(Z(p) + Z(q))^\perp$ dávají parametrický popis hledané osy. (Prověřte, kolik má úloha obecně řešení!)

4.22. Příklad. Najděte průnik kolmé roviny spuštěné z bodu $A = [1, 2, 3, 4] \in \mathbb{R}^4$ na rovinu

$$\varrho : [1, 0, 1, 0] + (1, 2, -1, -2)s + (1, 0, 0, 1)t, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Nalezneme nejprve kolmou rovinu k ϱ . Její zaměření bude kolmé na zaměření ϱ , pro vektory (a, b, c, d) patřící do jejího zaměření dostáváme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) \cdot (1, 2, -1, -2) &= 0 &\equiv a + 2b - c - 2d &= 0 \\ (a, b, c, d) \cdot (1, 0, 0, 1) &= 0 &\equiv a + d &= 0. \end{aligned}$$

Jejím řešením je dvojdímní vektorový prostor $\langle (0, 1, 2, 0), (-1, 0, -3, 1) \rangle$. Rovina τ kolmá k rovině ϱ procházející bodem A má tedy parametrické vyjádření

$$\tau : [1, 2, 3, 4] + (0, 1, 2, 0)u + (-1, 0, -3, 1)v, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Průnik rovin potom můžeme získat pomocí obou parametrických vyjádření. Pro parametry popisující průnik tedy dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 1 + s + t &= 1 - v \\ 2s &= 2 + u \\ 1 - s &= 3 + 2u - 3v \\ -2s + t &= 4 + v, \end{aligned}$$

kteřá má jediné řešení (musí tomu tak být, protože sloupce matice soustavy jsou dány lineárně nezávislými vektory zaměření obou rovin) $s = -8/19, t = 34/19, u = -54/19, v = -26/19$. Dosazením hodnot parametrů s a t do parametrického vyjádření roviny ϱ pak dostaneme souřadnice průniku $[45/19, -16/19, 11/19, 18/19]$ (stejný výsledek pochopitelně obdržíme, dosadíme-li hodnoty parametrů u a v do parametrického vyjádření roviny τ). \square

4.23. Příklad. Bodem $[1, 2] \in \mathbb{R}^2$ vedte přímkou, která má odchylku 30° od přímky

$$p : [0, 1] + t(1, 1).$$

Řešení. Odchylka dvou přímek je dána úhlem, který svírají jejich směrové vektory. Stačí tedy najít směrový vektor \underline{v} hledané přímky. Ten získáme například rotací směrového vektoru přímky p o 30° . Matice rotace o 30° je

$$\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Hledaný vektor \underline{v} je tedy

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Rotovat jsme mohli i v opačném smyslu. Hledaná přímka (jedna ze dvou možných) má tedy parametrické vyjádření

$$[1, 2] + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)t.$$

□

4.24. Příklad. Příklad. Určete $\cos \alpha$, kde α je odchylka dvou sousedních stěn pravidelného osmistěnu (těleso, jehož stěny tvoří osm rovnostranných trojúhelníků).

Řešení. Odchylky libovolných dvou sousedních stěn jsou ze symetrie osmistěnu shodné. Rovněž tak nezáleží na jeho velikosti. Uvažujme osmistěn s délkou hrany 1, který je umístěn do standardní kartézské souřadné soustavy v \mathbb{R}^3 tak, že jeho těžiště je v bodě $[0, 0, 0]$. Jeho vrcholy jsou pak v bodech $A = [\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0]$, $B = [0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$, $C = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0]$, $D = [0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$, $E = [0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ a $F = [0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Určeme odchylku stěn CDF a BCF . Ta je dána odchylkou vektorů kolmých na jejich průnik a ležících v daných stěnách, tedy vektorů kolmých na CF . Těmi jsou vektory dané výškami z bodů D , resp. F na stranu CF v trojúhelnících CDF , resp. BCF . Výšky v rovnostranném trojúhelníku splývají s těžnicemi, jedná se tedy o úsečky SD a SB , kde S je střed strany CF . Protože známe souřadnice bodů C a F , má bod S souřadnice $[-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}]$ a pro vektory máme $SD = (\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$ a $SB = (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$. Celkem

$$\cos \alpha = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})}{\|(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})\| \|(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})\|} = -\frac{1}{3}.$$

Je tedy $\alpha \doteq 132^\circ$.

□

4.21

4.25. Počítání objemu. Orientovaný (bodový) euklidovský prostor je euklidovský bodový prostor, jehož zaměření je orientované. V dalším budeme uvažovat standardní \mathcal{E}_n spolu s orientací zadanou standardní bazí \mathcal{R}^n .

Necheť u_1, \dots, u_k , jsou libovolné vektory v zaměření \mathbb{R}^n , $A \in \mathcal{E}_n$ je libovolný bod. Rovnoběžnostěn $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{E}_n$ jsme definovali jako množinu

$$\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \{A + c_1 u_1 + \dots + c_k u_k; 0 \leq c_i \leq 1, i = 1, \dots, k\}.$$

Jsou-li vektory u_1, \dots, u_k nezávislé, hovořili jsme o k -rozměrném rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{E}_n$. Pro dané vektory u_1, \dots, u_k máme k dispozici také rovnoběžnostěny menších dimenzí

$$\mathcal{P}_1(A; u_1), \dots, \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k)$$

v euklidovských podprostorech $A + \langle u_1 \rangle, \dots, A + \langle u_1, \dots, u_k \rangle$.

Jsou-li u_1, \dots, u_k lineárně závislé definujeme objem $\text{Vol } \mathcal{P}_k = 0$. Pro nezávislé vektory pak platí $\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle \oplus (\langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle^\perp \cap \langle u_1, \dots, u_k \rangle)$. Navíc v tomto rozkladu se u_k jednoznačně vyjádří jako

$$u_k = u'_k + e_k, \text{ kde } e_k \perp \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle.$$

Absolutní hodnotu objemu definujeme induktivně:

$$|\text{Vol } \mathcal{P}_1(A; u_1)| = \|u_1\|$$

$$|\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k)| = \|e_k\| |\text{Vol } \mathcal{P}(A; u_1, \dots, u_{k-1})|.$$

Je-li u_1, \dots, u_n báze kompatibilní s orientací V , definujeme (orientovaný) objem rovnoběžnostěny $\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n) = |\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n)|$, v opačném případě klademe $\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n) = -|\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_n)|$.

Věta. *Nechť $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}_n$ je euklidovský podprostor a necht' (e_1, \dots, e_k) je jeho ortonormální báze. Pak pro libovolné vektory $u_1, \dots, u_k \in Z(\mathcal{Q})$ a $A \in \mathcal{Q}$ platí*

$$(1) \text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot e_1 & \dots & u_k \cdot e_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot e_k & \dots & u_k \cdot e_k \end{pmatrix}$$

$$(2) (\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k))^2 = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}$$

DŮKAZ. Matice

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \cdot e_1 & \dots & u_k \cdot e_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot e_k & \dots & u_k \cdot e_k \end{pmatrix}$$

má ve sloupcích souřadnice vektorů u_1, \dots, u_k ve zvolené ortonormální bázi. Platí

$$|A|^2 = |A||A| = |A^T||A| = |A^T A| = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}.$$

Přímo z definice je neorientovaný objem roven součinu $\|v_1\| \|v_2\| \dots \|v_k\|$, kde $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 + a_1^2 v_1, \dots, v_k = u_k + a_1^k v_1 + \dots + a_{k-1}^k v_{k-1}$ je výsledek Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Je tedy

$$(\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k))^2 = \det \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & \dots & v_k \cdot v_1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1 \cdot v_k & \dots & v_k \cdot v_k \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v_k \cdot v_k \end{pmatrix}.$$

Označme B matici jejíž sloupce jsou souřadnice vektorů v_1, \dots, v_k v bázi e . Protože v_1, \dots, v_k vznikly z u_1, \dots, u_k jako obrazy v lineární transformaci s horní trojúhelníkovou maticí C s jedničkami na diagonále, je $B = CA$ a $|B| = |C||A| = |A|$. Pak ovšem $|A|^2 = |B|^2 = |A||A|$, proto $\text{Vol } \mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \pm |A|$. Přitom pokud jsou vektory u_1, \dots, u_k závislé vyjde objem nulový, pokud jsou nezávislé, pak znaménko determinantu je kladné právě když je báze u_1, \dots, u_k kompatibilní s orientací danou bazí e . \square

Determinant

$$\det \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_k \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \cdot u_k & \dots & u_k \cdot u_k \end{pmatrix}$$

se nazývá *Grammův determinant* k -tice vektorů u_1, \dots, u_k . V geometrické formulaci dostáváme jako velice důležitý důsledek následující tvrzení:

4.26. Důsledek. *Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ euklidovského vektorového prostoru V je $\det \varphi$ roven (orientovanému) objemu obrazu rovnoběžnostěnu určeného vektory ortonormální báze. Obecněji, obraz rovnoběžnostěnu \mathcal{P} určeného libovolnými $\dim V$ vektory má objem roven $\det \varphi$ -násobku původního objemu.*

4.27. Příklad. *Jsou dány vektory $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Doplňte je třetím jednotkovým vektorem tak, aby rovnoběžnostěn daný těmito třemi vektory měl co největší objem.*

Řešení. Označme hledaný jednotkový vektor jako $\underline{t} = (t_1, t_2, t_3)$. Podle Tvrzení ?? je objem rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}_3(0; \underline{u}, \underline{v}, \underline{t})$ dán jako absolutní hodnota determinantu

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & t_1 \\ u_2 & v_2 & t_2 \\ u_3 & v_3 & t_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \underline{t} \cdot (\underline{u} \times \underline{v}) \leq \|\underline{t}\| \|\underline{u} \times \underline{v}\| = \|\underline{u} \times \underline{v}\|.$$

Použitě znaménko nerovnosti vyplývá z Cauchyovy nerovnosti, přičemž víme, že rovnost nastává právě pro $\underline{t} = c(\underline{u} \times \underline{v})$, $c \in \mathbb{R}$. Velikost objemu hledaného rovnoběžnostěnu tedy může být maximálně rovna velikosti obsahu rovnoběžníka daného vektory \underline{u} , \underline{v} (tj. velikosti vektoru $(\underline{u} \times \underline{v})$). Rovnost nastane právě když

$$\underline{t} = \pm \frac{(\underline{u} \times \underline{v})}{\|(\underline{u} \times \underline{v})\|}.$$

□

4.28. Vnější a vektorový součin vektorů. Předchozí úvahy úzce souvisí s tzv. vnějším tensorovým součinem vektorů. Nepůjdeme do této technicky poněkud nepřehledné oblasti, ale zmíníme alespoň případ vnějšího součinu $n = \dim V$ vektorů $u_1, \dots, u_n \in V$.

Nechť (u_{1j}, \dots, u_{nj}) jsou souřadná vyjádření vektorů u_j v nějaké pevně zvolené ortonormální bázi V a M nechť je matice s prvky (u_{ij}) . Pak determinant $|M|$ nezávisí na volbě báze a jeho hodnotu nazýváme *vnějším součinem vektorů* u_1, \dots, u_n a značíme $[u_1, \dots, u_n]$. Viz 4.25.

Přímo z definice nyní vyplývají užitečné vlastnosti vnějšího součinu

- (1) Zobrazení $(u_1, \dots, u_n) \mapsto [u_1, \dots, u_n]$ je antisymetrické n -lineární zobrazení. Tzn., že je lineární ve všech argumentech a výměna dvou argumentů se vždy projeví změnou znaménka výsledku.
- (2) Vnější součin je nulový právě, když jsou vektory u_1, \dots, u_n lineárně závislé
- (3) Vektory u_1, \dots, u_n tvoří kladnou bázi právě, když je jejich vnější součin kladný.

V \mathbb{R}_3 patrně již známe další významnou operaci, tzv. vektorový součin, který dvojici vektorů přiřazuje vektor třetí. Uvažme obecný euklidovský vektorový prostor V dimenze $n \geq 2$ a vektory $u_1, \dots, u_{n-1} \in V$. Vektor $v \in V$ nazveme *vektorový součin* vektorů u_1, \dots, u_{n-1} , jestliže pro každý vektor $w \in V$ platí

$$\langle v, w \rangle = [u_1, \dots, u_{n-1}, w].$$

Značíme $v = u_1 \times \dots \times u_{n-1}$.

V ortonormálních souřadnicích, kde $v = (y_1, \dots, y_n)^T$, $w = (x_1, \dots, x_n)^T$ a $u_j = (u_{1j}, \dots, u_{nj})^T$, předchozí vztah znamená

$$y_1 x_1 + \dots + y_n x_n = \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1(n-1)} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{n(n-1)} & x_n \end{vmatrix}$$

Odtud vyplývá, že vektor v je tímto vztahem zadán jednoznačně a jeho souřadnice spočteme formálním rozvojem tohoto determinantu podle posledního sloupce.

Věta. Pro vektorový součin $v = u_1 \times \dots \times u_{n-1}$ platí

- (1) $v \in \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle^\perp$
- (2) v je nenulový vektor právě, když jsou vektory u_1, \dots, u_{n-1} lineárně nezávislé
- (3) velikost $\|v\|$ vektorového součinu je rovna absolutní hodnotě objemu rovnoběžníku $\mathcal{P}(0; u_1, \dots, u_{n-1})$
- (4) (u_1, \dots, u_{n-1}, v) je kladná báze orientovaného euklidovského prostoru V

DŮKAZ. První tvrzení plyne přímo z definičního vztahu pro v , protože dosažením libovolného vektoru u_j za w máme nalevo skalární součin $v \cdot u_j$ a napravo determinant s dvěma shodnými sloupci.

Hodnota matice s $n - 1$ sloupci u_j je dána maximální velikostí nenulového minoru. Minory, které zadávají souřadnice vektorového součinu jsou stupně $n - 1$ a tím je dokázáno tvrzení (2).

Jsou-li vektory u_1, \dots, u_{n-1} závislé, pak platí i (3). Nechtě jsou tedy nezávislé, v je jejich vektorový součin a zvolme libovolnou ortonormální bázi (e_1, \dots, e_{n-1}) prostoru $\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle$. Z již dokázaného vyplývá, že existuje nějaký násobek $(1/\alpha)v$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, takový, že $(e_1, \dots, e_k, (1/\alpha)v)$ je ortonormální báze celého V . Souřadnice našich vektorů v této bázi jsou

$$u_j = (u_{1j}, \dots, u_{(n-1)j}, 0)^T, \quad v = (0, \dots, 0, \alpha)^T.$$

Proto je vnější součin $[u_1, \dots, u_{n-1}, v]$ roven (viz. definice vektorového součinu)

$$[u_1, \dots, u_{n-1}, v] = \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{(n-1)1} & \dots & u_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \langle v, v \rangle = \alpha^2.$$

Rozvojem determinantu podle posledního sloupce zároveň obdržíme

$$\alpha^2 = \alpha \text{Vol } \mathcal{P}(0; u_1, \dots, u_{n-1}).$$

Odtud už vyplývají obě zbylá tvrzení věty. □

4.29. Kvadratické formy. Závěrem zmíníme ještě pár poznámek o objektech v \mathcal{E}_n zadaných kvadratickými rovnicemi, hovoříme o *kvadrikách*. Zvolme v \mathcal{E}_n pevně kartézskou souřadnou soustavu (tj. bod a ortonormální bázi zaměření) a uvažme obecnou kvadratickou rovnici pro souřadnice (x_1, \dots, x_n) bodů $A \in \mathcal{E}_n$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n 2a_i x_i + a = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Můžeme ji zapsat jako $f(u) + g(u) + a = 0$ pro kvadratickou formu f (tj. zúžení symetrické bilineární formy F na dvojice stejných argumentů), lineární formu g a

skalár $a \in \mathbb{R}$ a předpokládáme že hodnota f je nenulová (jinak by se jednalo o lineární rovnici popisující euklidovský podprostor).

Začneme s kvadratickou částí, tj. bilineární symetrickou formou $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Stejně dobře můžeme přemýšlet o obecné symetrické bilineární formě na libovolném vektorovém prostoru. Pro libovolnou bázi na tomto vektorovém prostoru bude hodnota $f(x)$ na vektoru $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ dána vztahem

$$f(x) = F(x, x) = \sum_{i,j} x_i x_j F(e_i, e_j) = x^T \cdot A \cdot x$$

kde $A = (a_{ij})$ je symetrická matice s prvky $a_{ij} = F(e_i, e_j)$. Takovýmto zobrazením f říkáme *kvadratické formy* a výše uvedená formula pro hodnotu formy s použitím zvolených souřadnic se nazývá *analytický tvar* formy. Jestliže změníme bázi e_i na jinou bázi e'_1, \dots, e'_n , dostaneme pro stejný vektor jiné souřadnice $x = S \cdot x'$ a tedy

$$f(x) = (S \cdot x')^T \cdot A \cdot (S \cdot x') = (x')^T \cdot (S^T \cdot A \cdot S) \cdot x'.$$

Předpokládejme opět, že je na našem vektorovém prostoru zadán skalární součin. Předchozí výpočet pak můžeme shrnout slovy, že matice bilineární formy F a tedy i kvadratické formy f se transformuje při změně souřadnic způsobem, který pro ortogonální změny souřadnic splývá s transformací matic zobrazení (skutečně, pak je $S^{-1} = S^T$). Tento výsledek můžeme interpretovat také jako následující pozorování:

Tvrzení. *Nechť V je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Pak vztah*

$$\varphi \mapsto F, \quad F(u, u) = \langle \varphi(u), u \rangle$$

zadává bijekci mezi symetrickými lineárními zobrazeními a kvadratickými formami na V .

4.30. Euklidovská klasifikace kvadrik. Z poslední věty vyplývá okamžitý důsledek, že pro každou kvadratickou formu f existuje ortonormální báze zaměření, ve které má f diagonální matici (a diagonální hodnoty jsou jednoznačně určeny až na pořadí). Předpokládejme tedy přímo rovnici ve tvaru

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + b = 0.$$

V dalším kroku pro souřadnice x_i s $\lambda_i \neq 0$ provedeme doplnění do čtverců, které „pohltní“ kvadráty i lineární členy týchž neznámých (tzv. Lagrangeův algoritmus, viz poznámka níže) Tak nám zůstanou nejvýše ty neznámé, pro které byl jejich koeficient u kvadrátu nulový, a získáme tvar

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - p_i)^2 + \sum_{j \text{ splňující } \lambda_j = 0} b_j x_j + c = 0.$$

Pokud nám opravdu zůstaly nějaké lineární členy, můžeme zvolit novou bázi zaměření tak, aby odpovídající lineární forma byla prvkem duální báze a novou volbou počátku v \mathcal{E}_n pak dosáhneme výsledného tvaru

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i y_i^2 + b y_{k+1} + c = 0,$$

kde k je hodnota kvadratické formy f , lineární člen se může (ale nemusí) objevit jen pokud je hodnota f menší než n , $c \in \mathbb{R}$ může být nenulové pouze když je $b = 0$.

4.31. Příklad \mathcal{E}_2 . Provedme celou diskusi ještě jednou pro nejjednodušší případ netriviální dimenze. Původní rovnice má tvar

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_1x + a_2y + a = 0.$$

Volbou vhodné báze zaměření a následným doplněním čtverců dosáhneme tvaru (opět používáme stejného značení x, y pro nové souřadnice):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

kde a_i může být nenulové pouze v případě, že a_{ii} je nulové. Posledním krokem obecného postupu, tj. v dimenzi $n = 2$ jen případnou volbou posunutí, dosáhneme právě jedné z rovnic:

$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2 + 1$	prázdná množina
$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$	elipsa
$0 = x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1$	hyperbola
$0 = x^2/a^2 - 2py$	parabola
$0 = x^2/a^2 + y^2/b^2$	bod
$0 = x^2/a^2 - y^2/b^2$	2 různoběžné přímky
$0 = x^2 - a^2$	2 rovnoběžné přímky
$0 = x^2$	2 splývající přímky
$0 = x^2 + a^2$	prázdná množina

4.32. Afinní pohled. V předchozích dvou odstavcích jsme hledali podstatné vlastnosti a standardizované analytické popisy objektů zadávaných v euklidovských prostorech kvadratickými rovnicemi. Hledali jsme přitom co nejjednodušší rovnice v mezích daných volností výběru kartézských souřadnic. Geometrická formulace našeho výsledku pak může být taková, že pro dva různé objekty – kvadriky, zadané v obecně různých kartézských souřadnicích, existuje *euklidovská transformace* na \mathcal{E}_n (tj. afinní bijektivní zobrazení zachovávající velikosti) tehdy a jen tehdy, pokud výše uvedený algoritmus vede na stejný analytický tvar, až na pořadí souřadnic.

Pochopitelně se můžeme ptát, do jaké míry umíme podobnou věc v afinních prostorech, tj. s volností výběru jakékoliv afinní souřadné soustavy. Např. v rovině to bude znamenat, že neumíme rozlišit kružnici od elipsy, samozřejmě bychom ale měli odlišit hyperbolu a všechny ostatní typy kuželoseček. Hlavně ale splynou mezi sebou všechny hyperboly atd.

Ukážeme si hlavní rozdíl postupu na kvadratických formách a k záležitosti se pak ještě vrátíme níže.

Uvažme nějakou kvadratickou formu f na vektorovém prostoru V a její analytické vyjádření $f(u) = x^T Ax$ vzhledem ke zvolené bázi na V . Pro vektor $u = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$ pak také zapisujeme formu f ve tvaru

$$f(x_1, n) = \sum_{ij} a_{ij}x_ix_j,$$

V předchozích odstavcích jsme již s využitím skalárního součinu ukázali, že pro vhodnou bázi bude matice A diagonální, tj. že pro příslušnou symetrickou formu F bude platit $F(u_i, u_j) = 0$ při $i \neq j$. Každou takovou bázi nazýváme *polární báze* kvadratické formy f . Samozřejmě si pro takový účel můžeme vždy skalární součin vybrat. Dokážeme si ale toto tvrzení znovu bez využití skalárních součinů tak, že získáme daleko jednodušší algoritmus na to, jak takovou polární bázi najít mezi

všemi bazemi. Tím se zároveň dovíme podstatné informace o afinních vlastnostech kvadratických forem. Nasledující věta bývá v literatuře uváděna pod názvem *Lagrangeův algoritmus*.

Věta. *Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze n , $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratická forma. Pak na V existuje polární báze pro f .*

DŮKAZ. (1) Nechť A je matice f v bázi $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na V a předpokládejme $a_{11} \neq 0$. Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{22}x_2^2 + \dots \\ &= a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + \text{členy neobsahující } x_1 \end{aligned}$$

Provedeme tedy transformaci souřadnic (tj. změnu báze) tak, aby v nových souřadnicích bylo

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \quad x'_2 = x_2, \dots, x'_n = x_n.$$

To odpovídá nové bázi (spočtete si jako cvičení příslušnou matici přechodu!)

$$v_1 = a_{11}^{-1}u_1, \quad v_2 = u_2 - a_{11}^{-1}a_{12}u_1, \dots, v_n = u_n - a_{11}^{-1}a_{1n}u_1$$

a tak jak lze očekávat, v nové bázi bude příslušná symetrická bilinerární forma splňovat $g(v_i, v_i) = 0$ pro všechny $i > 0$ (přepočtete!). Má tedy f v nových souřadnicích analytický tvar $a_{11}^{-1}x_1'^2 + h$, kde h je kvadratická forma nezávislá na proměnné x_1 .

Z technických důvodů bývá lepší zvolit v nové bázi $v_1 = u_1$, opět dostaneme výraz $f = f_1 + h$, kde f_1 závisí pouze na x'_1 , zatímco v h se x'_1 nevyskytuje. Přitom pak $g(v_1, v_1) = a_{11}$.

(2) Předpokládejme, že po provedení kroku (1) dostaneme pro h matici (řádu o jedničku menšího) s koeficientem u $x_2'^2$ různým od nuly. Pak můžeme zopakovat přesně stejný postup a získáme vyjádření $f = f_1 + f_2 + h$, kde v h vystupují pouze proměnné s indexem větším než dvě. Tak můžeme postupovat tak dlouho, až buď provedeme $n - 1$ kroků a získáme diagonální tvar, nebo v řekněme i -tém kroku bude prvek a_{ii} dosud získané matice nulový.

(3) Nastane-li poslední možnost, ale přitom existuje jiný prvek $a_{jj} \neq 0$ s $j > i$, pak stačí přehodit i -tý prvek báze s j -tým a pokračovat podle předešlého postupu.

(4) Předpokládejme, že jsme narazili na situaci $a_{jj} = 0$ pro všechny $j \geq i$. Pokud přitom neexistuje ani žádný jiný prvek $a_{jk} \neq 0$ s $j \geq i$, $k \geq i$, pak jsme již úplně hotovi neboť jsme již dosáhli diagonální matice. Předpokládejme, že $a_{jk} \neq 0$. Použijeme pak transformaci $v_j = u_j + u_k$, ostatní vektory báze ponecháme (tj. $x'_k = x_k - x_j$, ostatní zůstávají). Pak $h(v_j, v_j) = h(u_j, u_j) + h(u_k, u_k) + 2h(u_k, u_j) = 2a_{jk} \neq 0$ a můžeme pokračovat podle postupu v (1). \square

4.33. Příklad. Nechť $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$. Její matice je

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Podle bodu (1) algoritmu provedeme úpravy

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{3}(3x_1 + x_2)^2 + \frac{2}{3}x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2 \\ &= \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}y_2 + 2y_3\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}z_1^2 + \frac{3}{2}z_2^2 \end{aligned}$$

a vidíme, že forma má hodnotu 2 a matice přechodu do příslušné polární báze \underline{w} získá posbíráním provedených transformací:

$$z_3 = y_3 = x_3, \quad z_2 = \frac{2}{3}y_2 + 2y_3 = \frac{2}{3}x_2 + 2x_3, \quad z_1 = y_1 = 3x_1 + x_2$$

Pokud by ale např. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3 + x_2^2$, tj. matice je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pak hned v prvním kroku můžeme přehodit proměnné: $y_1 = x_2$, $y_2 = x_1$, $y_3 = x_3$. Aplikace kroku (1) je pak triviální (nejsou tu žádné společné členy), pro další krok ale nastane situace z bodu (4). Zavedeme tedy transformaci $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3 - y_2$. Pak

$$f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 + 2z_2(z_3 + z_2) = z_1^2 + \frac{1}{2}(2z_2 + z_3)^2 - \frac{1}{2}z_3^2.$$

Matici přechodu do příslušné polární báze opět dostaneme posbíráním jednotlivých transformací (tj. vynásobením jednotlivých dílčích matic přechodu).

4.34. Afinní klasifikace kvadratických forem. Po výpočtu polární báze Lagrangeovým algoritmem můžeme ještě vylepšit bázové vektory pomocí násobení skalárem tak, aby v příslušném analytickém vyjádření naší formy vystupovaly v roli koeficientů u kvadrátů jednotlivých souřadnic pouze skaláry 1, -1 a 0. Následující věta o setrvačnosti říká navíc, že počet jedniček a mínus jedniček nezávisí na našich volbách v průběhu algoritmu. Tyto počty nazýváme *signaturou kvadratické formy*. Opět tedy dostáváme úplný popis kvadratických forem ve smyslu, že dvě takové formy jsou převoditelná jedna na druhou pomocí afinní transformace tehdy a jen tehdy, když mají stejnou signaturu.

Věta. Pro každou nenulovou kvadratickou formu hodnosti r na reálném vektorovém prostoru V existuje celé číslo $0 \leq p \leq r$ a r nezávislých lineárních forem $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$ takových, že

$$f(u) = (\varphi_1(u))^2 + \dots + (\varphi_p(u))^2 - (\varphi_{p+1}(u))^2 - \dots - (\varphi_r(u))^2.$$

Jinak řečeno, existuje polární báze, ve které má f analytické vyjádření

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2.$$

Počet p kladných diagonálních koeficientů v matici dané kvadratické formy nezávisí na volbě polární báze.

Dvě symetrické matice A, B dimenze n jsou maticemi téže kvadratické formy v různých bazích právě, když mají stejnou hodnotu a když matice příslušných forem v polární bázi mají stejný počet kladných koeficientů.

DŮKAZ. Lagrangeovým algoritmem obdržíme $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$, $\lambda_i \neq 0$, v jisté bázi na V . Předpokládejme navíc, že právě prvních p koeficientů λ_i je kladných. Pak transformace $y_1 = \sqrt{\lambda_1} x_1, \dots, y_p = \sqrt{\lambda_p} x_p, y_{p+1} = \sqrt{-\lambda_{p+1}} x_{p+1}, \dots, y_r = \sqrt{-\lambda_r} x_r, y_{r+1} = x_{r+1}, \dots, y_n = x_n$ již vede na požadovaný tvar. Formy φ_i pak jsou právě formy z duální báze ve V^* k získané polární bázi. Musíme ale ještě ukázat, že p nezávisí na našem postupu. Předpokládejme, že se nám podařilo najít vyjádření téže formy f v polárních bazích $\underline{u}, \underline{v}$, tj.

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 \\ f(y_1, \dots, y_n) &= y_1^2 + \dots + y_q^2 - y_{q+1}^2 - \dots - y_r^2 \end{aligned}$$

a označme podprostor generovaný prvními p vektory prvé báze $P = \langle u_1, \dots, u_p \rangle$, a obdobně $Q = \langle v_{q+1}, \dots, v_n \rangle$. Pak pro každý $u \in P$ je $f(u) > 0$ zatímco pro $v \in Q$ je $f(v) \leq 0$. Nutně tedy platí $P \cap Q = \{0\}$ a proto $\dim P + \dim Q \leq n$. Odtud plyne $p + (n - q) \leq n$, tj. $p \leq q$. Opačnou volbou podprostorů však získáme i $q \leq p$.

Je tedy p nezávislé na volbě polární báze. Pak ovšem pro dvě matice se stejnou hodnotí a stejným počtem kladných koeficientů v diagonálním tvaru příslušné kvadratické formy získáme stejný analytický tvar. \square

Při diskusi symetrických zobrazení jsme hovořili o definitních a semidefinitních zobrazeních. Tatáž diskuse má jasný smysl i pro symetrické bilineární formy a kvadratické formy. Kvadratickou formu f forma na reálném vektorovém prostoru V nazýváme

- (1) *pozitivně definitní*, je-li $f(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
- (2) *pozitivně semidefinitní*, je-li $f(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
- (3) *negativně definitní*, je-li $f(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
- (4) *negativně semidefinitní*, je-li $f(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
- (5) *indefinitní*, je-li $f(u) > 0$ a $f(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

Stejně názvy používáme i pro symetrické reálné matice, jsou-li maticemi patřičných kvadratických forem. Signaturou symetrické matice pak rozumíme signaturu příslušné kvadratické formy.

3. Projektivní geometrie

V mnoha elementárních textech o analytické geometrii autoři končí afinními a euklidovskými objekty popsány výše. Na mnoho praktických úloh euklidovská nebo afinní geometrie stačí, na jiné bohužel ale nikoliv.

Tak třeba při zpracovávání obrazu z kamery nejsou zachovávány úhly a rovnoběžné přímky se mohou (ale nemusí) protínat. Dalším dobrým důvodem pro hledání širšího rámce geometrických úloh a úvah je požadovaná robustnost a jednoduchost numerických operací. Daleko jednodušší jsou totiž operace prováděné prostým násobením matic a velice těžko se totiž od sebe odlišují malinké úhly od nulových, proto je lepší mít nástroje, které takové odlišení nevyžadují.

Základní ideou projektivní geometrie je rozšíření afinních prostorů o body v nekonečnu způsobem, který bude dobře umožňovat manipulace s lineárními objekty typu bodů, přímek, rovin, projekcí, apod.

4.35. Projektivní rozšíření afinní roviny. Začneme tím nejjednodušším zajímavým případem, geometrií v rovině. Jestliže si body roviny \mathcal{A}_2 představíme jako rovinu $z = 1$ v \mathcal{R}^3 , pak každý bod P naší afinní roviny představuje vektor

$u = (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ a tím i jednorozměrný podprostor $\langle u \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Naopak, skoro každý podprostor v \mathbb{R}^3 protíná naši rovinu v právě jednom bodě P a jednotlivé vektory takového podprostoru jsou dány souřadnicemi (x, y, z) jednoznačně, až na společný skalární násobek. Žádný průnik s naší rovinou nebudou mít pouze podprostory s body o souřadnicích $(x, y, 0)$.

Projektivní rovina \mathcal{P}_2 je množina všech jednorozměrných podprostorů v \mathbb{R}^3 . *Homogenní souřadnice* bodu $P = (x : y : z)$ v projektivní rovině jsou trojice reálných čísel určené až na společný skalární násobek a alespoň jedno z nich musí být nenulové. Přímka v projektivní rovině je definována jako množina jednorozměrných podprostorů (tj. bodů v \mathcal{P}_2)

Příklad. V afinním prostoru \mathbb{R}^2 uvažujme dvě přímky $L_1 : y - x - 1 = 0$ a $L_2 : y - x + 1 = 0$.

Jestliže budeme body přímek L_1 a L_2 chápat jako konečné body v projektivním prostoru \mathcal{P}_2 , budou zjevně jejich homogenní souřadnice $(x : y : z)$ splňovat rovnice

$$L_1 : y - x - z = 0, \quad L_2 : y - x + z = 0.$$

Podívejme se, jak budou rovnice těchto přímek vypadat v souřadnicích v afinní rovině, která bude dána jako $y = 1$. Za tím účelem stačí dosadit $y = 1$ do předchozích rovnic:

$$L'_1 : 1 - x - z = 0, \quad L'_2 : 1 - x + z = 0$$

Nyní jsou „nekonečné“ body naší původní afinní roviny dány vztahem $z = 0$ a vidíme, že naše přímky L'_1 a L'_2 se protínají v bodě $(1, 1, 0)$. To odpovídá geometrické představě, že rovnoběžné přímky L_1, L_2 v afinní rovině se protínají v nekonečnu (a to v bodě $(1 : 1 : 0)$).

4.36. Projektivní prostory a transformace. Postup z roviny se přirozeným způsobem zobecňuje na každou konečnou dimenzi. Volbou libovolné afinní nadroviny \mathcal{A}_n ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^{n+1} , která neprochází počátkem, můžeme ztožnit body $P \in \mathcal{A}_n$ s jednorozměrnými podprostory, které tyto generují. Zbylé jednorozměrné podprostory vyplní rovinu rovnoběžnou s \mathcal{A}_n a říkáme jim „nekonečné body“ v projektivním rozšíření \mathcal{P}_n afinní roviny \mathcal{A}_n . Zjevně je vždy množina nekonečných bodů v \mathcal{P}_n projektivním prostorem dimenze o jedničku nižší. Abstraktněji hovoříme o *projektivizaci vektorového prostoru*: pro libovolný vektorový prostor V dimenze $n + 1$ definujeme

$$\mathcal{P}(V) = \{P \subset V; P \text{ je jednorozměrný vektorový podprostor}\}.$$

Volbou libovolné báze \underline{u} ve V dostáváme tzv. *homogenní souřadnice* na $\mathcal{P}(V)$ tak, že pro $P \in \mathcal{P}(V)$ použijeme jeho libovolný nenulový vektor $u \in V$ a souřadnice tohoto vektoru v bázi \underline{u} . Afinní přímka má tedy ve svém projektivním rozšíření pouze jediný bod (oba konce se „potkají“ v nekonečnu a projektivní přímka vypadá jako kružnice), projektivní rovina má projektivní přímku nekonečných bodů atd.

Při zvolených homogenních souřadnicích je možné jednu z jejich hodnot zafixovat na jedničku (tj. vyloučíme všechny body projektivního prostoru s touto souřadnicí nulovou) a získáme tak vložení n -rozměrného afinního prostoru $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}(V)$. To je přesně konstrukce, kterou jsme použili v opačném směru v příkladu projektivní roviny.

Každé prosté lineární zobrazení $\tau : V_1 \rightarrow V_2$ mezi vektorovými prostory samozřejmě zobrazuje jednorozměrné podprostory na jednorozměrné podprostory. Tím

vzniká zobrazení na projektivizacích $T : \mathcal{P}(V_1) \rightarrow \mathcal{P}(V_2)$. Takovým zobrazením říkáme *projektivní zobrazení*. Jinak řečeno, projektivní zobrazení je takové zobrazení mezi projektivními prostory, že v každé soustavě homogenních souřadnic na definičním oboru i obrazu je toto zobrazení zadáno násobením vhodnou maticí. Obecněji, pokud naše pomocné lineární zobrazení není prosté, definuje projektivní zobrazení pouze mimo svoje jádro, tj. na bodech, jejichž homogenní souřadnice se nezobrazují na nulu.

4.37. Perspektivní projekce. Velmi dobře jsou výhody projektivní geometrie vidět na perspektivní projekci $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Bod (X, Y, Z) „reálného světa“ se promítá na bod (x, y) na průmětně takto:

$$x = -f \frac{X}{Z}, \quad y = -f \frac{Y}{Z}.$$

To je nejen nelineární formule, ale navíc při Z malém bude velice problematická přesnost výpočtů.

Při rozšíření této transformace na zobrazení $\mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2$ dostáváme zobrazení $(X : Y : Z : W) \mapsto (x : y : z) = (-fX : -fY : Z)$, tj. popsané prostou lineární formulí

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$$

Tento jednoduchý výraz zadává perspektivní projekci pro všechny konečné body v $\mathbb{R}^3 \subset \mathcal{P}_3$, které dosazujeme jako výrazy s $W = 1$. Navíc jsme odstranili problémy s body, jejichž obraz leží v nekonečnu. Skutečně, je-li Z -ová souřadnice skutečného bodu scény blízká nule, bude hodnota třetí homogenní souřadnice obrazu mít souřadnici blízkou nule, tj. bude představovat bod blízký nekonečnu.

4.38. Afinní a projektivní transformace. Invertibilní projektivní zobrazení projektivního prostoru \mathcal{P}_n na sebe odpovídají v homogenních souřadnicích invertibilním maticím dimenze $n + 1$. Dvě takové matice zadávají stejnou projektivní transformaci právě, když se liší o konstantní násobek.

Jestliže si zvolíme první souřadnici jako tu, jejíž nulovost určuje nekonečné body, budou transformace, které zachovávají konečné body, dány maticemi, jejichž první řádek musí být až na první člen nulový. Jestliže budeme chtít přejít do afinních souřadnic konečných bodů, tj. zafixujeme si hodnotu první souřadnice na jedničku, musí být první prvek na prvním řádku být také rovný jedné. Matice projektivních transformací zachovávajících konečné body tedy mají tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kde $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ a $A = (a_{ij})$ je invertibilní matice dimenze n . Působení takové matice na vektoru $(1, x_1, \dots, x_n)$ je právě obecná afinní transformace.

4.39. Projektivní klasifikace kvadrik. Závěrem ještě poznámka o složitějších objektech studovaných v afinní geometrii nejlépe prostřednictvím projektivních rozšíření. Jestliže popíšeme kvadriku v afinních souřadnicích pomocí obecné kvadratické rovnice, viz výše, jejím přepsáním v homogenních souřadnicích dostaneme vždy výlučně homogenní výraz, jehož všechny členy jsou druhého řádu. Důvod je ten, že pouze takové homogenní výrazy budou mít pro homogenní souřadnice smysl nezávisle na zvoleném konstantním násobku souřadnic (x_0, x_1, \dots, x_n) . Hledáme tedy takový, jehož zúžením na afinní souřadnice, tj. dosazením $x_0 = 1$, získáme původní výraz. To je ale mimořádně jednoduché, prostě dopíšeme dostatek x_0 ke všem výrazům – žádné ke kvadratickým členům, jedno k lineárním a x_0^2 ke konstantnímu členu.

Získáme tak dobře definovanou kvadratickou formu na našem pomocném vektorovém prostoru \mathbb{R}^{n+1} , ale jsme už vůči libovolné volbě báze klasifikovali. Zkuste si samostatně převést tuto klasifikaci do projektivní i afinní podoby. (Hezké a náročné cvičení na závěr semestru!)

4.40. Příklad. Nalezněte polární bázi kvadratické formy $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, která je ve standardní bázi dána předpisem

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3.$$

Řešení. Aplikací uvedeného Lagrangeova algoritmu dostáváme:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1x_2 + x_2x_3 \\ &\text{provedeme substituci podle bodu (4) algoritmu } y_2 = x_2 - x_1, y_1 = x_1, y_3 = x_3 \\ &= 2x_1(x_1 + y_2) + (x_1 + y_2)x_3 = 2x_1^2 + 2x_1y_2 + x_1x_3 + y_2x_3 = \\ &= \frac{1}{2}(2x_1 + y_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{8}x_3^2 + y_2x_3 = \\ &\text{substituce } y_1 = 2x_1 + y_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ &= \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{8}x_3^2 + y_2x_3 = \frac{1}{2}y_1^2 - 2\left(\frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{8}x_3^2 = \\ &\text{substituce } y_3 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ &= \frac{1}{2}y_1^2 - 2y_3^2 + \frac{3}{8}x_3^2. \end{aligned}$$

V souřadnicích y_1, y_3, x_3 má tedy daná kvadratická forma diagonální tvar, to znamená že báze příslušná těmto souřadnicím je polární bázi dané kvadratické formy. Pokud ji máme vyjádřit musíme získat matici přechodu od této polární báze ke standardní bázi. Z definice matice přechodu jsou pak její sloupce bázovými vektory polární bázi. Matici přechodu získáme tak, že buď vyjádříme staré proměnné (x_1, x_2, x_3) pomocí nových proměnných (y_1, y_3, x_3) , nebo ekvivalentně vyjádříme nové proměnné pomocí starých (což jde jednodušeji), pak ale musíme spočítat inverzní matici.

Máme $y_1 = 2x_1 + y_2 + \frac{1}{2}x_3 = 2x_1 + (x_2 - x_1) + \frac{1}{2}x_3$ a $y_3 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_3$. Matice přechodu od standardní báze ke zvolené polární je tedy

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro inverzní matici pak máme

$$T^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jedna z polárních bazí dané kvadratické formy je tedy například báze $\{(1/3, 1/3, 0), (-2/3, 4/3, 0), (-1/2, 1/2, 1)\}$. □

4.41. Příklad. *Určete typ kuželosečky dané rovnicí:*

$$3x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2 - 1 = 0.$$

Řešení. Pomocí algoritmu úpravy na čtverec postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} 3x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2 - 1 &= \frac{1}{3}(3x_1 - \frac{3}{2}x_2)^2 - \frac{3}{4}x_2^2 + x_2 - 1 = \\ &= \frac{1}{3}y_1^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} - 1 = \\ &= \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{4}{3}y_2^2 - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Podle uvedeného seznamu kuželoseček se tedy jedná o hyperbolu. □

Zřízení ZOO

*jaké funkce potřebujeme pro naše modely?
– pořádný zvěřinec...*

1. Interpolace polynomy

Touto kapitolou započneme budování nástrojů umožňujících modelování závislostí, které nejsou ani lineární ani diskrétní. S takovou potřebou se např. setkáme, kdykoliv popisujeme systém vyvíjející se v čase a to ne jen v několika vybraných okamžicích ale „souvisle“, tj. pro všechny možné okamžiky. Někdy je to přímo záměr či potřeba (třeba ve fyzikálních procesech), jindy je to vhodné přiblížení diskrétního modelu (třeba u ekonomických nebo populačních modelů).

V předchozích kapitolách jsme pracovali často s posloupnostmi hodnot reálných nebo komplexních čísel, tj. se skalárními funkcemi $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ nebo $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$, kde \mathbb{K} byl zvolený okruh skalárů, případně $\mathbb{N} \rightarrow V$, kde V je vektorový prostor nad \mathbb{K} . Připomeňme si diskusi z odstavce 1.3, kde jsme přemýšleli nad způsoby, jak pracovat se skalárními funkcemi. Na této diskusi se vůbec nic nemění a rádi bychom (pro začátek) uměli pracovat s funkcemi $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (*reálné funkce reálné proměnné*) nebo $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (*komplexní funkce reálné proměnné*), případně funkcemi $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ (funkce jedné racionální proměnné s racionálními hodnotami) apod. Většinou půjdou naše závěry snadno rozšířit na případ s vektorovými hodnotami nad stejnými skaláry, ve výkladu se ale zpravidla omezíme jen na případ reálných čísel, případně komplexních čísel.

Čím větší třídu funkcí připustíme, tím obtížnější bude vybudovat nástroje pro naši práci. Když ale bude různých typů funkcí málo, nebudeme patrně umět budovat dostatek modelů pro reálné situace. Cílem našich prvních dvou kapitol matematické analýzy bude proto explicitně zavést několik typů elementárních funkcí, implicitně popsat více funkcí a vybudovat standardní nástroje pro práci s nimi. Souhrnně se tomu říká diferenciální a integrační počet jedné proměnné.

5.1

5.1. Polynomy. Připomeňme si vlastnosti skalárů. Umíme je sčítat i násobit a tyto operace splňují řadu vlastností, které jsme vyjmenovali už v odstavcích 1.1 a 1.2. *Polynomem* nad okruhem skalárů \mathbb{K} rozumíme zobrazení $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ dané výrazem

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde a_i , $i = 0, \dots, n$, jsou pevně zadané skaláry, násobení je znázorněno prostým zřetězením symbolů a „+“ označuje sčítání. Pokud je $a_n \neq 0$, říkáme, že polynom f je *stupně n* . Stupně nulového polynomu není definován. Skaláry a_i označujeme jako *koeficienty polynomu f* . Polynomy stupně nula jsou právě konstantní nenulová zobrazení $x \mapsto a_0$. V algebře jsou častěji polynomy definovány jako formální výrazy $f(x)$, tj. jako posloupnosti koeficientů a_0, a_1, \dots s konečně mnoha nenulovými

prvky. Následující jednoduché lemma ukazuje, že v analýze budou oba přístupy ekvivalentní. Je snadné ověřit, že polynomy nad okruhem skalárů tvoří opět okruh, kde násobení a sčítání je dáno operacemi v původním okruhu \mathbb{K} pomocí hodnot polynomů. Připomeňte si při této příležitosti vlastnosti skalárů a ověřte!

Nad každým polem skalárů (viz axiom „P“ v odstavcích 1.1 a 1.2) funguje dělení polynomů se zbytkem, tj. pro polynomy f stupně n a g stupně m , existují jednoznačně určené polynomy q a r takové, že stupeň r je menší než m nebo je $r = 0$ a $f = q \cdot g + r$. Je-li pro nějaký prvek $b \in \mathbb{K}$ hodnota $f(b) = 0$, pak to znamená, že v podílu $f(x) = q(x)(x-b) + r$ musí být $r = 0$. Jinak by totiž nebylo možné dosáhnout $f(b) = q(b) \cdot 0 + r$, kde stupeň r je nulový. Říkáme, že b je *kořen polynomu f* . Stupeň q je pak právě $n - 1$. Pokud má q opět kořen, můžeme pokračovat a po nejvýše n krocích dojdeme ke konstantnímu polynomu. Dokázali jsme tedy, že každý nenulový polynom nad polem \mathbb{K} má nejvýše tolik kořenů, kolik je jeho stupeň. Odtud již snadno dovodíme i následující pozorování:

Lemma. *Je-li \mathbb{K} pole s nekonečně mnoha prvky, pak dva polynomy f a g jsou si rovny jako zobrazení, právě když mají shodné koeficienty.*

DŮKAZ. Předpokládejme $f = g$, tj. $f - g = 0$ jako zobrazení. Polynom $(f - g)(x)$ tedy má nekonečně mnoho kořenů, což je možné pouze tehdy, je-li nulovým polynomem. \square

Uvědomme si, že u konečných polí samozřejmě takové tvrzení neplatí. Uvažte např. polynom $x^2 + x$ nad \mathbb{Z}_2 .

5.2

5.2. Interpolační polynom. Častá praktická úloha vyžaduje stanovení počítatelné formule pro funkci, pro kterou máme zadány hodnoty v předem daných bodech x_0, \dots, x_n . Pokud by šlo o nulové hodnoty, umíme přímo zadat polynom

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

který bude mít nulové hodnoty právě v těchto bodech a nikde jinde. To ale není jediná odpověď, protože požadovanou vlastnost má i nulový polynom. Ten je přitom jediný s touto vlastností ve vektorovém prostoru polynomů stupně nejvýše n . Obdobně to dopadne i v obecném případě:

Věta. *Nechť \mathbb{K} je nekonečné pole skalárů, pak pro každou množinu po dvou různých bodů $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ a předepsaných hodnot $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ existuje právě jeden polynom f stupně nejvýše n (případně nulový polynom), pro který platí*

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

DŮKAZ. Označme si prozatím neznámé koeficienty polynomu f stupně n

$$f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

Dosazením požadovaných hodnot dostaneme systém $n + 1$ rovnic pro stejný počet neznámých koeficientů a_i

$$\begin{aligned} a_0 + x_0 a_1 + \dots + (x_0)^n a_n &= y_0 \\ &\vdots \\ a_0 + x_n a_1 + \dots + (x_n)^n a_n &= y_n. \end{aligned}$$

Jak je dobře známo z lineární algebry, tento systém lineárních rovnic má právě jedno řešení pokud je determinant jeho matice invertibilní skalár, tj. pokud je nenulový (viz 3.1 a 2.22). Musíme tedy vyšetřit tzv. *Vandermondův determinant*

$$V(x_0, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \dots & (x_0)^n \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^n \end{pmatrix}.$$

Tento determinant umíme nad libovolným nekonečným polem skalárů snadno spočítat:

Lemma. *Pro všechny hodnoty $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ platí*

$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{i>k=0}^n (x_i - x_k).$$

DŮKAZ. Vztah dokážeme indukcí přes počet bodů x_i . Evidentně je správný pro $n = 1$ (a pro $n = 0$ je úloha nezájímavá). Předpokládejme, že výsledek je správný pro $n - 1$, tj.

$$V(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{i>k=0}^{n-1} (x_i - x_k).$$

Nyní považujme hodnoty x_0, \dots, x_{n-1} za pevné a hodnotu x_n ponechme jako volnou proměnnou. Rozvojem determinantu podle posledního řádku (viz 2.19) obdržíme hledaný determinant jako polynom

$$\boxed{\text{e5.1}} \quad (5.1) \quad V(x_0, \dots, x_n) = (x_n)^n V(x_0, \dots, x_{n-1}) - (x_n)^{n-1} \dots$$

Toto je polynom stupně n , protože víme, že jeho koeficient u $(x_n)^n$ je nenulový dle indukčního předpokladu. Přitom bude zjevně nulový při dosazení kterékoliv hodnoty $x_n = x_i$ pro $i < n$, protože bude v takovém případě obsahovat původní determinant dva stejné řádky. Náš polynom tedy bude dělitelný výrazem

$$(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}),$$

který má sám již stupeň n . Odtud vyplývá, že celý Vandermondův determinant coby polynom v proměnné x_n musí být tomuto výrazu roven až na konstantní násobek, tj.

$$V(x_0, \dots, x_n) = c \cdot (x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}).$$

Porovnáním koeficientů u nejvyšší mocniny v (5.1) a tomto výrazu dostáváme

$$c = V(x_0, \dots, x_{n-1})$$

a tím je důkaz lemmatu ukončen. \square

Ukázali jsme, že je determinant naší soustavy rovnic vždy roven součinu rozdílů definičních bodů. Pro naše po dvou různé body x_i tedy musí být nenulový. Odtud ale vyplývá jednoznačná existence řešení. Protože polynomy jsou jako zobrazení stejné, právě když mají stejné koeficienty, věta je dokázána. \square

Jednoznačně určený polynom f z předchozí věty nazýváme *interpolační polynom* pro hodnoty y_i v bodech x_i .

5.3

5.3. Poznámky. Uvažujme nyní pro jednoduchost pouze reálné nebo případně racionální polynomy, tj. polynomiálně zadané funkce $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$. Na první pohled se může zdát, že polynomy tvoří hezkou velikou třídu funkcí jedné proměnné, kterou můžeme použít na proložení jakékoliv sady předem zadaných hodnot. Navíc se zdají být snadno vyjádřitelné, takže by s jejich pomocí mělo být dobře možné počítat i hodnoty těchto funkcí pro jakoukoliv hodnotu proměnné. Při pokusu o praktické využití v tomto směru ovšem narazíme hned na několik problémů.

Prvním z nich je potřeba rychle vyjádřit polynom, kterým zadaná data proložíme. Pro řešení výše diskutovaného systému rovnic totiž budeme obecně potřebovat čas úměrný třetí mocnině počtu bodů, což při hustějších datech je jistě těžko přijatelné. Podobným problémem je pomalé vyčíslení hodnoty polynomu vysokého stupně v zadaném bodě. Obojí lze částečně obejít tak, že zvolíme vhodné vyjádření interpolačního polynomu (tj. vybereme lepší bázi příslušného vektorového prostoru všech polynomů stupně nejvýše k , než je ta nejobvyklejší $1, x, x^2, \dots, x^n$).

Jednou z možností je tzv. *Lagrangeův interpolační polynom*, kterým rychle a snadno zapíšeme řešení. Sestrojíme si nejprve pomocné polynomy ℓ_i s vlastností

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Zřejmě musí být tyto polynomy až na konstantu rovny výrazům $(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$ a proto

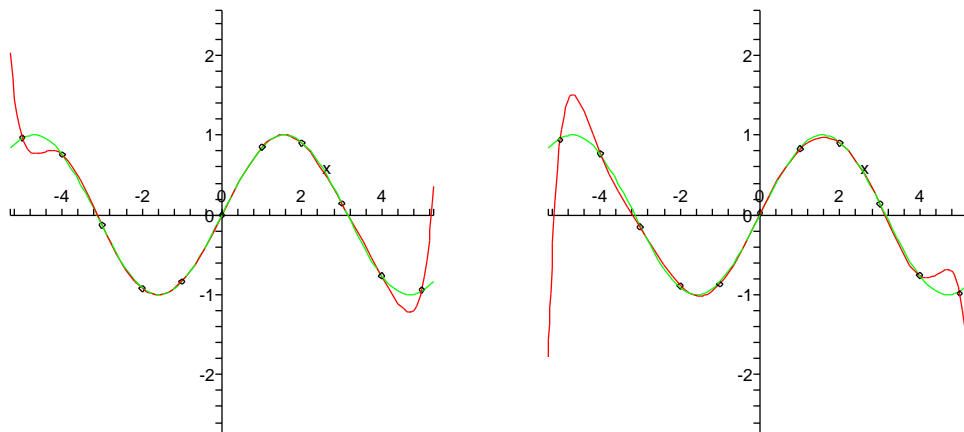
$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

Hledaný Lagrangeův interpolační polynom pak snadno zadáme formulí

$$f(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \dots + y_n \ell_n(x).$$

Toto vyjádření má nevýhodu ve velké citlivosti na nepřesnosti výpočtu při malých rozdílech zadaných hodnot x_i , protože se v ní těmito rozdíly dělí. Všimněme si ale, že přímá konstrukce Lagrangeova polynomu může nahradit existenční část důkazu v předchozí Větě 5.2. (Jednoznačnost pak je také jednoduchá i bez příslušné lineární algebry: dvě možná řešení f a g mají stejné hodnoty v $n + 1$ různých bodech, tj. polynom $f - g$ má $n + 1$ různých kořenů a stupeň nejvýše n a proto musí být nulovým polynomem.)

Ještě horším problémem je velice špatná stabilita hodnot reálných nebo racionálních polynomů při zvětšující se hodnotě proměnné. Brzy budeme mít nástroje na přesný popis kvalitativního chování funkcí, nicméně i bez nich je zřejmé, že podle znaménka koeficientu u nejvyšší mocniny polynomu se hodnoty velice rychle při rostoucím x vydaří buď do plus nebo minus nekonečna. Ani toto znaménko koeficientu u nejvyššího stupně se ale u interpolačního polynomu při malých změnách prokládaných hodnot nechová stabilně. Náhorně to vidíme na dvou obrázcích, kde je proloženo jedenáct hodnot funkce $\sin(x)$ s různými malými náhodnými změnami hodnot. Zelenou barvou je vynesena aproximovaná funkce, kolečka jsou malinko posunutě hodnoty a červeně je vynesena jednoznačně zadaný interpolační polynom. Zatímco uvnitř intervalu je aproximace vcelku dobrá, stabilita na okrajích je otřesná.



Kolem interpolačních polynomů existuje bohatá teorie. Částečně se budeme k některým jejich vlastnostem vracet, podrobnější rozbor lze najít např. v pěkných textech [4].

5.4. Určování interpolačních polynomů. Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:

$$P(2) = 1, P(3) = 0, P(4) = -1, P(5) = 6.$$

Řešení. Řešíme buď přímo, t.j. sestavením soustavy čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých. Předpokládáme polynom ve tvaru $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x_1 + a_0$. Víme, že polynom stupně nejvýše tři splňující podmínky v zadání je dán jednoznačně.

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 1 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 0 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 &= -1 \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 &= 6. \end{aligned}$$

Každá rovnice vznikla z jedné z podmínek v zadání.

Druhou možností je vytvořit hledaný polynom pomocí fundamentálních Lagran-geových polynomů:

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 \cdot \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)} + 0 \cdot (\dots) + \\ &= (-1) \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-2)(4-3)(4-5)} + 6 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)} = \\ &= \frac{4}{3}z^3 - 12z^2 + \frac{101}{3}z - 29. \end{aligned}$$

Koeficienty tohoto polynomu jsou samozřejmě jediným řešením výše sestavené soustavy lineárních rovnic. \square

Příklad. Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:

$$P(1+i) = i, P(2) = 1, P(3) = -i.$$

Řešení. $P(x) = (-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i)x^2 + (2 + 3i)x - \frac{3}{5} - \frac{14}{5}i.$ □

5.4

5.5. Derivace polynomů. Zjistili jsme, že hodnoty polynomů s rostoucí proměnnou rychle míří k nekonečným hodnotám (viz také obrázky). Proto je zřejmé, že polynomy nemohou nikdy vhodně popisovat jakékoliv periodicky se opakující děje (jako jsou např. hodnoty goniometrických funkcí). Mohlo by se ale zdát, že podstatně lepší výsledky budeme alespoň mezi body x_i dosahovat, když si budeme kromě hodnot funkce hlídat, jak rychle naše funkce v daných bodech roste.

Pro tento účel zavedeme (prozatím spíše intuitivně) pojem *derivace* pro polynomy. Můžeme přitom pracovat opět s reálnými, komplexními nebo racionálními polynomy. Rychlost růstu v bodě $x \in \mathbb{R}$ pro reálný polynom $f(x)$ dobře vyjadřují podíly

$$\text{e5.2} \quad (5.2) \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

a protože umíme spočítat (nad libovolným okruhem)

$$(x + \Delta x)^k = x^k + kx^{k-1}\Delta x + \dots + \binom{k}{l}x^l(\Delta x)^{k-l} + \dots + (\Delta x)^k,$$

dostaneme pro polynom $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ výše vedený podíl ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= a_n \frac{nx^{n-1}\Delta x + \dots + (\Delta x)^k}{\Delta x} + \dots + a_1 \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1 + \Delta x(\dots), \end{aligned}$$

kde výraz v závorce je polynomiálně závislý na Δx . Evidentně pro hodnoty Δx velice blízké nule dostaneme hodnotu libovolně blízkou výrazu

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1,$$

který nazýváme *derivace polynomu f* podle proměnné x . Z definice je jasné, že právě hodnota $f'(x_0)$ derivace polynomu nám dává dobré přiblížení jeho chování v okolí bodu x_0 . Přesněji řečeno, přímka

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

velice dobře aproximuje přímku procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)]$ pro malé hodnoty Δx . Hovoříme o *lineárním přiblížení* polynomu f jeho *tečnou*.

Derivace polynomů je lineární zobrazení, které přiřazuje polynomům stupně nejvýše n polynomy stupně nejvýše $n - 1$. Iterací této operace dostáváme druhé derivace f'' , třetí derivace $f^{(3)}$ a obecně po k -násobném opakování polynom $f^{(k)}$ stupně $n - k$. Po $n + 1$ derivacích je výsledkem nulový polynom. S tímto lineárním zobrazením jsme se již potkali v odstavci 2.43 o nilpotentních zobrazeních.

5.5

5.6. Hermiteův interpolační problém. Uvažme opět $m + 1$ po dvou různých reálných nebo racionálních hodnot x_0, \dots, x_m , tj. $x_i \neq x_j$ pro všechna $i \neq j$. Předepišme dále hodnoty $y_i^{(k)}$ aproximované funkce a jejich derivací pro $k = 0$ a $k = 1$. To znamená, že máme předepsány hodnoty a první derivace v zadaných bodech x_i . Hledáme polynom f , který bude nabývat těchto předepsaných hodnot a derivací.

Zcela analogicky jako u interpolace pouhých hodnot obdržíme pro neznámé koeficienty polynomu $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ systém rovnic

$$\begin{aligned} a_0 + x_0 a_1 + \dots + (x_0)^n a_n &= y_0^{(0)} \\ &\vdots \\ a_0 + x_m a_1 + \dots + (x_m)^n a_n &= y_m^{(0)} \\ a_1 + 2x_0 a_2 + \dots + n(x_0)^{n-1} a_n &= y_0^{(1)} \\ &\vdots \\ a_1 + 2x_m a_2 + \dots + n(x_m)^{n-1} a_n &= y_m^{(1)}. \end{aligned}$$

Opět bychom mohli ověřit, že při volbě $n = 2m+1$ bude determinant tohoto systému rovnic nenulový a tudíž bude existovat právě jedno řešení. Nicméně, stejně jako při konstrukci Lagrangeova polynomu lze zkonstruovat takový polynom f přímo. Nazýváme jej *Hermiteův interpolační polynom*.

Hermiteův polynom můžeme určit podobně pomocí fundamentálních Hermiteových polynomů:

$$\begin{aligned} h_i^1(x) &= \left[1 - \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)}(x - x_i) \right] (l_i(x))^2 \\ h_i^2(x) &= (x - x_i) (l_i(x))^2, \end{aligned}$$

kde $l(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$. Tyto polynomy splňují následující podmínky:

$$\begin{aligned} h_i^1(x_j) &= \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \\ (h_i^1)'(x_j) &= 0 \\ h_i^2(x_j) &= 0 \\ (h_i^2)'(x_j) &= \delta_i^j \end{aligned}$$

Máme-li dán systém podmínek $f(x_1) = y_1, f'(x_1) = y_1', \dots, f(x_k) = y_k, f'(x_k) = y_k'$, pak je odpovídající polynom dán předpisem

$$f(x) = \sum_{i=1}^k [y_i h_i^1(x) + y_i' h_i^2(x)].$$

Úplně nejjednodušší případ je zadání hodnoty a derivace v jediném bodě. Tím určíme beze zbytku polynom stupně 1

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

tj. právě rovnici přímky zadané hodnotou a směrnici v bodě x_0 . Když zadáme hodnotu a derivaci ve dvou bodech, tj. $y_0 = f(x_0), y_0' = f'(x_0), y_1 = f(x_1), y_1' = f'(x_1)$ pro dva různé body x_i , dostaneme ještě pořád snadno počítatelný problém. Ukažme si jej v zjednodušeném provedení, kdy $x_0 = 0, x_1 = 1$. Pak matice systému a její inverze budou

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Přímým vynásobením $A \cdot (y_0, y_1, y'_0, y'_1)^T$ pak vyjde vektor $(a_3, a_2, a_1, a_0)^T$ koeficientů polynomu f , tj.

$$f(x) = (2y_0 - 2y_1 + y'_0 + y'_1)x^3 + (-3y_0 + 3y_1 - 2y'_0 - y'_1)x^2 + y'_0x + y_0.$$

V případě, že máme zadány hodnoty a derivace v jiných bodech x_0 a x_1 , lze využít tohoto výsledku s pomocí vhodné afinní transformace $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (pozor ale na vliv transformace na velikosti derivací, podrobněji budeme podobné úkony diskutovat později).

Příklad. *Příklad Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:*

$$P(1) = 0, P'(1) = 1, P(2) = 3, P'(2) = 3.$$

Řešení. $P(x) = -2x^3 + 10x^2 - 13x + 5$. □ Obdobně lze předepisovat libovolný konečný počet derivací v jednotlivých bodech a vhodnou volbou stupně polynomu obdržíme vždy jednoznačné interpolace. Nebudeme zde uvádět podrobnosti, viz opět text [4].

Bohužel, u těchto interpolací pořád zůstávají problémy zmíněné už v případě jednoduchých interpolací hodnot – složitost výpočtů a nestabilita. Použití derivací však podbízí jednoduché vylepšení metodiky:

5.6

5.7. Interpolace splajny.¹ Jak jsme viděli na obrázcích demonstrujících nestabilitu interpolace jedním polynomem dostatečně vysokého stupně, malé lokální změny hodnot zapříčiňovaly dramatické celkové změny chování výsledného polynomu. Nabízí se tedy využití malých polynomiálních kousků, které ale musíme umět rozumně navazovat.

Nejjednodušší je propojení vždy dvou sousedních bodů lineárním polynomem. Tak se nejčastěji zobrazují data. Z pohledu derivací to znamená, že budou na jednotlivých úsecích konstantní a pak se skokem změni. O něco sofistikovanější možností je předepsat v každém bodě hodnotu a derivaci, tj. pro dva body budeme mít 4 hodnoty a jednoznačně tím určíme Hermiteův polynom 3. stupně, viz výše. Tento polynom pak můžeme použít pro všechny hodnoty nezávislé proměnné mezi krajními hodnotami $x_0 < x_1$. Hovoříme o *intervalu* $[x_0, x_1]$. Takové polynomiální přiblížení po kouskách už bude mít tu vlastnost, že derivace na sebe budou navazovat.

V praxi ale není pouhé navazování první derivace dostatečné a navíc při naměřených datech nemíváme hodnoty derivací k dispozici. Přímou se proto vnučuje pokus využívat pouze zadané hodnoty ve dvou sousedních bodech, ale požadovat zároveň rovnost prvních i druhých derivací u sousedních kousků polynomů třetího stupně:

Definice. Nechtě $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ jsou reálné (nebo racionální) hodnoty, ve kterých jsou zadány požadované hodnoty y_0, \dots, y_n . *Kubickým interpolačním splajnem* pro toto zadání je funkce $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (neboť $S : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$), která splňuje následující podmínky:

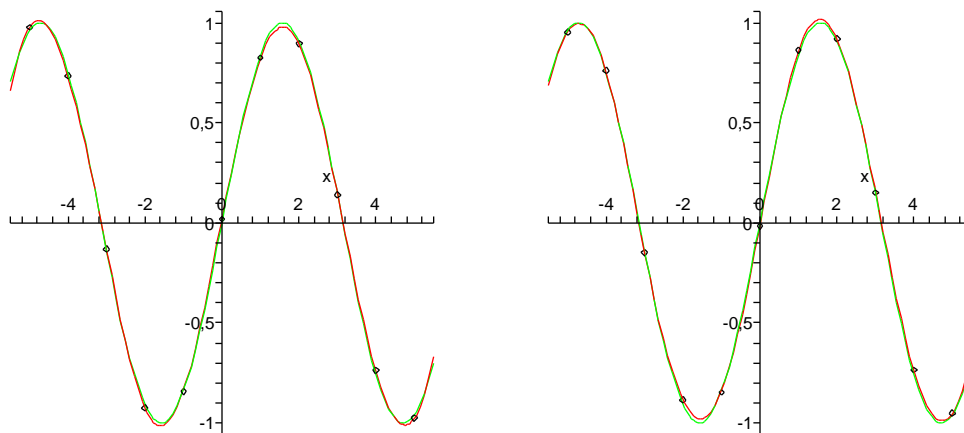
- zúžení S na interval $[x_{i-1}, x_i]$ je polynom S_i třetího stupně, $i = 1, \dots, n$
- $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$ a $S_i(x_i) = y_i$ pro všechny $i = 1, \dots, n$,
- $S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i)$ pro všechny $i = 1, \dots, n - 1$,

¹Ošklivé české slovo „splajn“ vzniklo fonetickým přepisem anglického ekvivalentu „spline“, který znamenal tvárné pravítko užívané inženýry pro kreslení křivek.

- $S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$ pro všechny $i = 1, \dots, n - 1$.

Kubický splajn pro $n + 1$ bodů sestává z n kubických polynomů, tj. máme k dispozici $4n$ volných parametrů (první definiční podmínka). Další podmínky přitom zadávají $2n + (n - 1) + (n - 1)$ rovností, tj. dva parametry zůstávají volné. Při praktickém použití se dodávají předpisy pro derivace v krajních bodech, tzv. *úplný splajn*, nebo jsou tyto zadány jako nula, tzv. *přirozený splajn*.

Výpočet celého splajnu už není bohužel tak jednoduchý jako u nezávislých výpočtů Hermiteových polynomů třetího stupně, protože data se prolínají vždy mezi sousedními intervaly. Při vhodném uspořádání se však dosáhne matice systému, která má nenulové prvky prakticky jen ve třech diagonálách, a pro takové existují vhodné numerické postupy, které umožní splajn počítat také v čase úměrném počtu bodů. Podrobnosti vynecháme, lze je dohledat např. v [4]. Pro srovnání se podívejme na interpolaci stejných dat jako v případě Lagrangeova polynomu, nyní pomocí splajnu:



2. Spojité funkce

Viděli jsme právě, že je důležité mít dostatečně velkou zásobu funkcí, se kterými bude možné možné vyjadřovat všechny běžné závislosti, zároveň ale musí být výběr šikovně omezen, abychom uměli vybudovat nějaké univerzální nástroje pro práci s nimi.

Polynomů je přitom zjevně příliš málo, i když jejich šikovně využití ve splajnech může ledacos vynahradit. Nejvýraznější vlastností polynomů je jejich „spojitá“ závislost hodnot na nezávislé proměnné. Intuitivně řečeno, když dostatečně málo změněme x , určitě se nám moc nezmění ani hodnota $f(x)$. Takové chování naopak nemáme u po částech konstantních funkcí $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v okolí „skoků“. Např. u tzv. Heavisideovy funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro všechny } x < 0 \\ 1/2 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro všechny } x > 0 \end{cases}$$

taková „nespojitosť“ nastane pro $x = 0$.

Začneme formalizací takovýchto intuitivních výroků. K tomu budeme potřebovat upřesnit vlastnosti našich skalárů a zjasnit pojem limity.

5.7

5.8. Reálná a komplexní čísla. Prozatím jsme docela dobře vystačili s algebraickými vlastnostmi reálných čísel, které říkaly, že \mathbb{R} je pole. Už jsme ale používali i relaci uspořádání reálných čísel, kterou značíme „ \leq “ (viz odstavec 1.59). Připomeňme si nyní vlastnosti (axiomy) reálných čísel včetně souvislostí uspořádání a ostatních relací. Dělicí čáry naznačují, jak axiomy postupně zaručují, že jsou reálná čísla komutativní grupou vůči sčítání, že $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je komutativní grupa vůči násobení, \mathbb{R} je pole, množina \mathbb{R} spolu s operacemi $+$, \cdot a s relací uspořádání je tzv. *uspořádané pole* a konečně poslednímu axiomu můžeme rozumět tak, že \mathbb{R} je „do-stálé husté“, tj. nechybí nám tam body, jako např. druhá odmocnina ze dvou v číslech racionálních. Formálně poslední axiom vysvětlíme níže.

(R1)	$(a + b) + c = a + (b + c)$, pro všechny $a, b, c \in \mathbb{R}$
(R2)	$a + b = b + a$, pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$
(R3)	existuje prvek $0 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechny $a \in \mathbb{R}$ platí $a + 0 = a$
(R4)	pro všechny $a \in \mathbb{R}$ existuje opačný prvek $(-a) \in \mathbb{R}$ takový, že platí $a + (-a) = 0$
(R5)	$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, pro všechny $a, b, c \in \mathbb{R}$
(R6)	$a \cdot b = b \cdot a$ pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$
(R7)	existuje prvek $1 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechny $a \in \mathbb{R}$ platí $1 \cdot a = a$
(R8)	pro každý $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ existuje inverzní prvek $a^{-1} \in \mathbb{R}$ takový, že platí $a \cdot a^{-1} = 1$
(R9)	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, pro všechny $a, b, c \in \mathbb{R}$
(R10)	relace \leq je úplné uspořádání, tj. reflexivní, antisymetrická, tranzitivní a úplná relace na \mathbb{R}
(R11)	pro všechny $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí, že z $a \leq b$ vyplývá také $a + c \leq b + c$
(R12)	pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, platí také $a \cdot b > 0$
(R13)	každá neprázdná ohraničená množina $A \subset \mathbb{R}$ má supremum.

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu. Uvažme podmnožinu $A \subset B$ v uspořádané množině B . *Horní závora* množiny A je každý prvek $b \in B$, pro který platí, že $b \geq a$ pro všechny $a \in A$. Obdobně definujeme *dolní závory* množiny A jako prvky $b \in A$ takové, že $b \leq a$ pro všechny $a \in A$.

Nejmenší horní závora podmnožiny A , pokud existuje, se nazývá *supremum* této podmnožiny a značíme ji $\sup A$. Přesněji:

$$\sup A = b, \text{ jestliže } z \geq a \text{ pro všechny } a \in A \text{ vyplývá také } z \geq b.$$

Obdobně, největší dolní závora se nazývá *infimum*, píšeme $\inf A$, tzn.

$$\inf A = b, \text{ jestliže } z \leq a \text{ pro všechny } a \in A \text{ vyplývá také } z \leq b.$$

Pro formální výstavbu další teorie potřebujeme vědět, zda námi požadované vlastnosti reálných čísel lze realizovat, tj. zda existuje taková množina \mathbb{R} s operacemi a relací uspořádání, které (R1)–(R13) splňují. Skutečně lze reálná čísla nejen konstruovat, ale také lze ukázat, že až na izomorfismus to jde jediným způsobem. Pro naši potřebu vystačíme s intuitivní představou reálné přímky, jednoznačnost nebudeme diskutovat vůbec a existenci jen naznačíme v dalším odstavci.

Pole komplexních čísel splňuje axiomy (R1)–(R9), není na nich ale žádným rozumným způsobem definováno uspořádání, které by naplnilo axiomy (R10)–(R13). Nicméně s nimi budeme také občas pracovat a již dříve jsme viděli, že rozšíření

skalárů na komplexní čísla je často pro výpočty mimořádně užitečné. Protože jsou komplexní čísla $z = \operatorname{re} z + i \operatorname{im} z$ dána jako dvojice reálných čísel, je dobrou představou rovina komplexních čísel.

Operací, která je u komplexních čísel navíc je tzv. *konjugace*. Je to zrcadlení podle přímky reálných čísel, tj. obrácení znaménka u imaginární složky. Značíme ji pruhem nad daným číslem, $\bar{z} = \operatorname{re} z - i \operatorname{im} z$. Protože je pro $z = x + iy$

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2,$$

zadáva nám tento výraz právě kvadrát vzdálenosti komplexního čísla od nuly. Odmocnině z tohoto reálného nezáporného čísla říkáme absolutní hodnota komplexního čísla z , píšeme

$$\boxed{\text{e5.3}} \quad (5.3) \quad |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

Příklad. *Načrtněte následující podmnožiny v \mathbb{C}*

- (1) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = |z + 1|\}$
- (2) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z - i| \leq 2\}$
- (3) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) = 1\}$
- (4) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2}\}$

Řešení.

- imaginární osa
- mezikruží okolo i
- hyperbola $a^2 - b^2 = 1$.
- vnější kruh jednotkového kruhu se středem v 1.

\square
 $\boxed{5.8}$

5.9. Hromadné body a konvergence. Uvažujme na chvíli nějaké pole skalárů \mathbb{K} , které splňuje axiomy (R1)–(R12). Takové určitě existuje, protože racionální čísla \mathbb{Q} jsou příkladem. Zkonstruovali jsme je v odstavci 1.61 a čtenář si snadno může ověřit platnost všech požadovaných axiomů. Pro každý prvek $a \in \mathbb{K}$ definujeme jeho *absolutní hodnotu* $|a|$ takto

$$|a| = \begin{cases} a & \text{je-li } a \geq 0 \\ -a & \text{je-li } a < 0. \end{cases}$$

Samozřejmě platí pro každá dvě čísla $a, b \in \mathbb{K}$

$$\boxed{\text{e5.4}} \quad (5.4) \quad |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Této vlastnosti říkáme trojúhelníková nerovnost a splňuje ji také absolutní hodnota komplexních čísel definovaná výše.

Uvažme nyní libovolnou posloupnost prvků a_0, a_1, \dots v našem uspořádaném poli \mathbb{K} takovou, že pro libovolně pevně zvolené kladné číslo $\epsilon > 0$ platí pro všechny prvky a_k až na konečně mnoho výjimek

$$|a_i - a_j| < \epsilon.$$

Jinak řečeno, pro každé pevné $\epsilon > 0$ existuje index N takový, že předcházející nerovnost platí pro všechna $i, j > N$. Takové posloupnosti prvků se říká *Cauchyovská posloupnost*. Intuitivně jistě cítíme, že buď jsou v takové posloupnosti všechny

prvky stejné až na konečně mnoho z nich (pak bude od určitého indexu N počínaje vždy $|a_i - a_j| = 0$) nebo se taková posloupnost „hromadí“ k nějaké hodnotě.

Pokud by taková hodnota $a \in \mathbb{K}$ existovala, očekávali bychom od ní patrně následující vlastnost: pro libovolné pevně zvolené číslo ϵ platí pro všechny i , až na konečně mnoho výjimek,

$$|a_i - a| < \epsilon.$$

Říkáme v takovém případě, že posloupnost a_i , $i = 1, 2, \dots$ *konverguje* k hodnotě $a \in \mathbb{K}$.

Uvažme nyní jakoukoliv množinu $A \subset \mathbb{K}$ a předpokládejme, že naše posloupnost je vybraná z prvků A . Pokud konverguje k $a \in \mathbb{K}$ a navíc je nekonečně mnoho bodů $a_i \in A$ různých od a , hovoříme o *hromadném bodu* množiny A .

Jestliže nějaká posloupnost $a_i \in \mathbb{K}$ konverguje k $a \in \mathbb{K}$, pak pro zvolené ϵ víme, že $|a_i - a| < \epsilon$ pro vhodné $N \in \mathbb{N}$ a všechny $i \geq N$. Pak pro $i, j \geq N$ dostaneme

$$|a_i - a_j| < |a_i - a_N| + |a_N - a_j| < 2\epsilon.$$

Vidíme tedy, že každá konvergující posloupnost je Cauchyovská.

V poli racionálních čísel se může snadno stát, že pro takovéto posloupnosti příslušná hodnota a neexistuje. Např. číslo $\sqrt{2}$ můžeme libovolně přesně přiblížit racionálními čísly a_i , ale samotná odmocnina racionální není. Uspořádaná pole skalárů, ve kterém všechny Cauchyovské posloupnosti konvergují, se nazývají *úplná*. Následující tvrzení říká, že axiom (R13) takové chování zaručuje:

Lemma. *Každá Cauchyovská posloupnost reálných čísel a_i konverguje k reálné hodnotě $a \in \mathbb{R}$.*

DŮKAZ. Každá Cauchyovská posloupnost je zjevně ohraničená množina (dokažte si podrobně – pro libovolné ϵ ohraničíte všechny členy až na konečně mnoho z nich!). Definujme si množinu

$$B = \{x \in \mathbb{R}, x < a_j \text{ pro všechny prvky } a_i, \text{ až na konečně mnoho z nich}\}.$$

Zřejmě má B horní závoru, tudíž podle axiomu (R13) má i supremum. Definujme $a = \sup B$. Nyní pro nějaké $\epsilon > 0$ zvolme N takové, aby $|a_i - a_j| < \epsilon$ pro všechny $i, j \geq N$. Zejména pak

$$a_j > a_N - \epsilon, \quad a_j < a_N + \epsilon$$

takže $a_N - \epsilon$ patří do B , zatímco $a_N + \epsilon$ už nikoliv. Souhrnně z toho dostáváme, že $|a - a_N| \leq \epsilon$, a proto také

$$|a - a_j| \leq |a - a_N| + |a_N - a_j| \leq 2\epsilon$$

pro všechny $j > N$. To ale značí právě, že a je hromadný bod posloupnosti. \square

Při jedné z možností, jak vybudovat reálná čísla, postupujeme podobně jako při zúplňování přirozených čísel na celá (abychom přidali opačné hodnoty) a celých na racionální (abychom přidali podíly nenulových čísel). Skutečně, vhodným formálním způsobem přidáme všechny chybějící hromadné body pro podmnožiny racionálních čísel (např. vhodným způsobem zavedeme ekvivalenci na množině všech Cauchyovských posloupností racionálních čísel). Pak se lze již snadno přesvědčit, že všechny požadované axiomy skutečně dojdou naplnění.

Další teoretické nuance tady není vhodné rozebírat. Zájemce může ale nahlédnout např. do [1] pro další informace i odkazy.

5.9

5.10. Otevřené a uzavřené množiny. *Uzavřená podmnožina v \mathbb{R} je taková, která obsahuje i všechny své hromadné body. Typickou uzavřenou množinou je tzv. uzavřený interval*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}.$$

Zde a je reálné číslo nebo hraniční hodnota chybí a píšeme $a = -\infty$ (mínus nekonečno) a podobně $b > a$ je reálné číslo nebo $+\infty$. Uzavřenou množinu bude tvořit i posloupnost reálných čísel bez hromadného bodu nebo posloupnost s konečným počtem hromadných bodů spolu s těmito body. Zjevně je konečné sjednocení uzavřených množin opět uzavřená množina.

Otevřená množina v \mathbb{R} je taková množina, jejíž doplněk je uzavřenou množinou. Typickou otevřenou množinou je otevřený interval

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\},$$

kde pro hraniční hodnoty máme stejné možnosti jako výše.

Okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme libovolný otevřený interval \mathcal{O} , který a obsahuje. Je-li okolí definované jako interval

$$\mathcal{O}_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$$

pro kladné číslo δ , hovoříme o δ -okolí bodu a .

Všimněme si, že pro libovolnou množinu A je $a \in \mathbb{R}$ hromadným bodem A , právě když v libovolném okolí a leží také alespoň jeden bod $b \in A$, $b \neq a$.

Lemma. *Množina reálných čísel A je otevřená, právě když každý její bod $a \in A$ do ní patří i s nějakým svým okolím.*

DŮKAZ. Nechť je A otevřená a $a \in A$. Kdyby neexistovalo žádné okolí bodu a uvnitř A , musela by existovat posloupnost $a_n \notin A$, $|a - a_n| \leq 1/n$. Pak je ovšem $a \in A$ hromadným bodem množiny $\mathbb{R} \setminus A$, což není možné, protože doplněk A je uzavřený.

Naopak předpokládejme, že každé $a \in A$ leží v A i s nějakým svým okolím. To přirozeně zabraňuje, aby nějaký hromadný bod b pro množinu $\mathbb{R} \setminus A$ ležel v A . Je proto $\mathbb{R} \setminus A$ uzavřená a tedy je A otevřená. \square

Zjevně je libovolné sjednocení otevřených množin opět otevřenou množinou a každý konečný průnik otevřených množin je opět otevřená množina.

Množina A reálných čísel se nazývá *ohraničená*, jestliže celá leží v nějakém konečném intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. V opačném případě je *neohraničená*. Ohraničená a uzavřená množina se nazývá *kompaktní*.

5.10

5.11. Několik topologických vlastností. Přidejme ještě několik pojmů, které nám umožní účinné vyjadřování. *Vnitřním bodem množiny A reálných čísel nazveme takový bod, který do A patří i s nějakým svým okolím. Hraniční bod $a \in A$ je naopak takový, jehož každé okolí má neprázdný průnik jak s A tak s doplňkem $\mathbb{R} \setminus A$. Otevřené pokrytí množiny A je takový systém otevřených intervalů U_i , $i \in I$, že jejich sjednocení obsahuje celé A . Izolovaným bodem množiny A rozumíme bod $a \in A$, který má okolí, jehož průnik s A je právě jednobodová množina $\{a\}$.*

Věta. *Pro podmnožiny A reálných čísel platí:*

- (1) *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému otevřených intervalů,*

- (2) *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
 (3) *každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A ,*
 (4) *A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A ,*
 (5) *A je kompaktní, právě když každé její otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.*

DŮKAZ. (1) Zjevně je každá otevřená množina sjednocením nějakých okolí svých bodů, tj. otevřených intervalů. Jde tedy pouze o to, jestli nám jich vždy stačí spočetně mnoho. Zkusme tedy najít „co největší“ intervaly. Řekneme, že body $a, b \in A$ jsou v relaci, jestliže celý otevřený interval (a, b) je v A . To je zjevně relace ekvivalence a její třídy budou zjevně intervaly, které budou navíc po dvou disjunktní. Každý z těchto intervalů jistě musí obsahovat nějaké racionální číslo a tyto musí být různé. Všech racionálních čísel je ale spočetně mnoho, proto máme tvrzení dokázané.

(2) Přímo z definic vyplývá, že bod nemůže být vnitřní a hraniční zároveň. Nechtě tedy $a \in A$ není vnitřní. Pak ovšem existuje posloupnost bodů $a_i \notin A$ s hromadným bodem a . Zároveň a patří do každého svého okolí. Proto je a hraniční.

(3) Předpokládejme, že $a \in A$ je hraniční a není izolovaný. Pak stejně jako v poslední argumentaci existují body a_i , tentokrát uvnitř A , jejichž hromadným bodem je a .

(4) Předpokládejme, že je A kompaktní, tj. uzavřená a ohraničená, a uvažme nějakou nekonečnou posloupnost bodů $a_i \in A$. Tato podmnožina má jistě supremum b i infimum a (nebo můžeme zvolit libovolnou horní a dolní zavoru množiny A). Rozdělme nyní interval $[a, b]$ přesně na dvě poloviny $[a, \frac{1}{2}(b-a)]$ a $[\frac{1}{2}(b-a), b]$. V alespoň jedné z nich musí být nekonečně mnoho prvků a_i . Vyberme takovou polovinu, jeden z prvků v ní obsažených a následně tento interval opět rozdělme uvažovaný interval na poloviny. Znovu vybereme tu polovinu, kde je nekonečně mnoho prvků posloupnosti a vybereme si jeden z nich. Tímto způsobem dostaneme posloupnost, která bude Cauchyovská (dokažte si detailně – vyžaduje si jen pozornost hraní s odhady, podobně jako výše). O Cauchyovských posloupnostech ovšem už víme, že mají vždy hromadné body nebo jsou konstantní až na konečně mnoho výjimek. Existuje tedy podposloupnost s námi hledanou limitou. Z uzavřenosti A zase vyplývá, že námi nalezený bod musí opět ležet v A .

Opačně, jestliže každá v A obsažená nekonečná podmnožina má hromadný bod v A , znamená to, že všechny hromadné body jsou v A a tedy je A uzavřená. Pokud by nebyla množina A zároveň ohraničená, uměli bychom najít posloupnost stále rostoucí nebo klesající s rozdíly dvou po sobě jdoucích čísel třeba alespoň 1. Taková posloupnost bodů z A ale nemůže mít hromadný bod vůbec.

(5) Nejprve se věnujme snadnější implikaci, tj. předpokládejme, že z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné. Jistě lze A pokrýt spočtým systémem intervalů $I_n = (n-2, n+2)$, $n \in \mathbb{Z}$, a jakýkoliv výběr konečně mnoha z nich říká, že je množina A ohraničená. Předpokládejme nyní, že $a \in \mathbb{R} \setminus A$ je hromadným bodem posloupnosti $a_i \in A$ a předpokládejme rovnou, že $|a - a_n| < \frac{1}{n}$. Množiny

$$J_n = \mathbb{R} \setminus [a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}]$$

pro všechny $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, jsou sjednocení dvou otevřených intervalů a jistě také pokrývají naši množinu A . Protože je možné vybrat konečné pokrytí A , bod a je uvnitř doplňku $\mathbb{R} \setminus A$ včetně nějakého svého okolí a není tedy hromadným bodem. Proto musí být všechny hromadné body A opět v A a tato množina je i uzavřená.

Opačný směr je opět založený na existenci a vlastnostech suprem. Předpokládejme, že je A kompaktní a že je dáno nějaké její otevřené pokrytí \mathcal{C} . Z předchozího je zjevné, že v A existují největší a nejmenší prvek, které jsou zároveň rovny $b = \sup A$ a $a = \inf A$. Označme si teď „nejzašší mez“, pro kterou ještě půjde konečné pokrytí vybrat:

$$B = \{x \in [a, b], \text{ a existuje výběr konečného pokrytí } [a, x] \cap A \text{ z } \mathcal{C}\}.$$

Evidentně $a \in B$, jde tedy o neprázdnou zhora ohraničenou množinu a existuje proto $c = \sup B$. Jde nám o to dokázat, že ve skutečnosti musí být $c = b$. Argumentace je trochu nepřehledná, dokud si ji nenačtneme na obrázku, podstata je ale snadná: Víme, že $a < c \leq b$, předpokládejme tedy chvíli, že $c < b$. Protože je $\mathbb{R} \setminus A$ otevřená, pro $c \notin A$ existuje okolí bodu c obsažené v $[a, b]$ a zároveň disjunkt s A . To by ale vylučovalo možnost $c = \sup B$. Zbývá tedy v takovém případě $c \in A$ a tedy je i nějaké okolí \mathcal{O} bodu c v otevřeném pokrytí \mathcal{C} . Zvolme si body $p < c < q$ v \mathcal{O} . Opět nyní bude existovat konečné pokrytí pro $[a, q] \cap A$. To ale značí, že $q > c$ leží v B , což není možné. Původní volba $c < b$ tedy vedla ke sporu, což dokazuje požadovanou rovnost $b = c$. Nyní ale s pomocí okolí b , které patří do \mathcal{C} umíme najít konečné pokrytí v \mathcal{C} pro celé A . \square

Příklad. Určete hromadné, izolované, hraniční a vnitřní body následujících podmnožin v \mathbb{R} :

- (1) \mathbb{N}
- (2) \mathbb{Q}
- (3) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

Řešení.

- (1) $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{N}, \emptyset$
- (2) $\mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{Q}, \emptyset$
- (3) $\langle 0, 1 \rangle, \emptyset, 0, (0, 1)$

5.11

5.12. Limity funkcí a posloupností. Pro diskusi limit je vhodné rozšířit množinu reálných čísel \mathbb{R} o dvě nekonečné hodnoty $\pm\infty$. Pro tyto účely si zavádíme i pravidla pro počítání s těmito formálně přidanými hodnotami pro libovolná „konečná“ čísla $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty \\ a - \infty &= -\infty \\ a \cdot \infty &= \infty, \text{ je-li } a > 0 \\ a \cdot \infty &= -\infty, \text{ je-li } a < 0 \end{aligned}$$

Okolím nekonečna rozumíme interval (a, ∞) , resp. $(-\infty, a)$ je okolí $-\infty$. Pojem hromadného bodu množin rozšiřujeme tak, že ∞ je hromadným bodem množiny $A \subset \mathbb{R}$ jestliže každé okolí ∞ s ní má neprázdný průnik, tj. jestliže je A zprava neohraničená. Obdobně pro $-\infty$.

Protože je užitečné od začátku sledovat i možné komplexní hodnoty funkcí, rozšíříme také pojem okolí do komplexní roviny. Pro kladné reálné číslo δ rozumíme δ -okolím komplexního čísla $z \in \mathbb{C}$ množinu

$$\mathcal{O}_\delta(z) = \{w \in \mathbb{C}, |w - z| < \delta\}.$$

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je libovolná podmnožina a $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je reálná funkce (nebo $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ je komplexní funkce) definovaná na A a nechť x_0 je hromadný bod množiny A . Říkáme, že f má v x_0 limitu $a \in \mathbb{R}$ (nebo $a \in \mathbb{C}$) a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a,$$

jestliže pro každé okolí bodu $\mathcal{O}(a)$ bodu a lze najít okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechny $x \in A \cap (\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\})$ je $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.

Limita reálné funkce se nazývá *nevlastní*, jestliže je $a = \pm\infty$, V opačném případě se nazává *vlastní*.

Je důležité si všimnout, že hodnota f v bodě x_0 v definici nevystupuje a f v tomto hromadném bodě vůbec nemusí být definována! Také je zřejmé, že nevlastní limity komplexních funkcí nejsou definovány.

5.12

5.13. Příklady. (1) Jestliže je $A = \mathbb{N}$, tj. funkce f je definována pouze pro přirozená čísla, hovoříme o limitech posloupností reálných nebo komplexních hodnot. Jediným hromadným bodem A je pak ∞ a píšeme pro $f(n) = a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Podle definice to pak znamená, že pro každé okolí $\mathcal{O}(a)$ limitní hodnoty a existuje index $N \in \mathbb{N}$ takový, že $a_n \in \mathcal{O}(a)$ pro všechny $n \geq N$. Ve skutečnosti jsme tedy v tomto speciálním případě přeformulovali definici konvergence posloupnosti (viz 5.9). Říkáme také, že posloupnost a_n konverguje k a .

Přímo z naší definice pro komplexní hodnoty je také vidět, že komplexní posloupnost má limitu a , právě když reálné části a_i konvergují k $\operatorname{re} a$ a zároveň imaginární části konvergují k $\operatorname{im} a$.

(2) Jestliže je f definována na intervalu $A = [a, b]$ a x_0 je vnitřním bodem intervalu, hovoříme o limitě funkce ve vnitřním bodě jejího definičního oboru. Podívejme se, proč je důležité v definici požadovat $f(x) \in \mathcal{O}(a)$ pouze pro body $x \neq x_0$ i v tomto případě. Vezměme jako příklad funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x \neq 0 \\ 1 & \text{je-li } x = 0. \end{cases}$$

Pak zjevně limita v nule je dobře definována a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, přestože $f(0) = 1$ do malých okolí limitní hodnoty 0 nepatří.

(3) Je-li $A = [a, b]$ ohraničený interval a $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$, hovoříme o limitě v hraničním bodě definičního oboru funkce f . Jestliže je ale bod x_0 vnitřním bodem, můžeme pro účely výpočtu limity definiční obor zúžit na $[x_0, b]$ nebo $[a, x_0]$. Výsledným limitám pak říkáme *limita zprava*, resp. *limita zleva* pro funkci f v bodě x_0 . Označujeme ji výrazem $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. Jako příklad nám může sloužit limita zprava a zleva v $x_0 = 0$ pro Heavisideovu funkci h z úvodu této části. Evidentně je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0.$$

Limita $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ přitom neexistuje. Je snadné dokázat, že limita ve vnitřním bodu definičního oboru libovolné reálné funkce f existuje, právě když existují limity zprava i zleva a jsou si rovny.

(4) Limita komplexní funkce $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ existuje tehdy a jen tehdy, jestliže existují limity její reálné a imaginární části. V takovém případě je pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\operatorname{re} f(x)) + i \lim_{x \rightarrow x_0} (\operatorname{im} f(x)).$$

(5) Nechť f je reálný nebo komplexní polynom. Pak pro každý bod $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Skutečně, je-li $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, pak roznásobením $(x_0 + \delta)^k = x_0^k + k\delta x_0^{k-1} + \dots + \delta^k$ a dosazením pro $k = 0, \dots, n$ vidíme, že volbou dostatečně malého δ se hodnotou libovolně blízko přiblížíme $f(x_0)$.

(6) Uvažme nyní obzvlášť ošklivou funkci definovanou na celém \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jestliže } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Jistě snadno ověříte, že tato funkce nemá limitu v žádném bodě (dokonce ani zleva nebo zprava).

(7) Ale definice spojitosti je ještě záludnější, než jsme viděli v předchozím případě. Definujme následující funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{jestliže } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ } p \text{ a } q \text{ nesoudělná} \\ 0 & \text{jestliže } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tato funkce je spojitá ve všech iracionálních bodech a nespojitá ve všech racionálních reálných bodech. Důkaz přenecháváme jako cvičení.

5.14. Věta. Věta o třech limitách. *Bud' f, g, h reálné funkce takové, že existuje okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, kde platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Pak pokud existují limity $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f_0$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = h_0$ a navíc $f_0 = h_0$, pak také existuje limita $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g_0$ a platí $g_0 = f_0 = h_0$.*

DŮKAZ. Z definice limity, pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje okolí U bodu x_0 , ve kterém je $f(x), h(x) \in (g_0 - \varepsilon, g_0 + \varepsilon)$. z podmínky $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ vyplývá, že i $g(x) \in (g_0 - \varepsilon, g_0 + \varepsilon)$, tedy $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g_0$. \square

5.13 **5.15. Věta.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je definiční obor reálných nebo komplexních funkcí f a g , x_0 nechť je hromadný bod A a existují limity*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}.$$

Potom:

- (1) *limita a je určena jednoznačně,*
- (2) *limita součtu $f + g$ existuje a platí*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b,$$

- (3) *limita součinu $f \cdot g$ existuje a platí*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b,$$

- (4) *pokud navíc $b \neq 0$, pak limita podílu f/g existuje a platí*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

DŮKAZ. (1) Předpokládejme, že a a a' jsou dvě hodnoty limity $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Pokud je $a \neq a'$, pak existují disjunktní okolí $\mathcal{O}(a)$ a $\mathcal{O}(a')$. Pro dostatečně malá okolí x_0 ale mají hodnoty f ležet v obou naráz, což je spor. Proto je $a = a'$.

(2) Zvolme si nějaké okolí $a + b$, třeba $\mathcal{O}_{2\varepsilon}(a + b)$. Pro dostatečně malá okolí x_0 a $x \neq x_0$ bude jak $f(x)$, tak $g(x)$ v ε -okolích bodů a a b . Proto jejich součet bude v 2ε -okolí kýžené hodnoty $a + b$. Tím je důkaz ukončen.

(3) Obdobně postupujeme u součinu s $\mathcal{O}_{\varepsilon^2}(ab)$. Pro malá okolí x_0 se nám hodnoty f i g treťi do ε -okolí hodnot a a b . Proto jejich součin bude v požadovaném ε^2 -okolí.

- (4) Podobný postup ponechán jako cvičení. \square

Poznámka. Podrobnějším sledováním důkazů jednotlivých bodů věty můžeme její tvrzení rozšířit i na některé nekonečné hodnoty limit: V prvním případě je zapotřebí, aby buď alespoň jedna z limit byla konečná nebo aby obě měly stejné znaménko. Pak opět platí že limita součtu je součet limit s konvencemi z 5.12. Příklad „ $\infty - \infty$ “ ale není zahrnut.

V druhém případě může být jedna z limit nekonečná a druhá nenulová. Pak opět platí, že limita součinu je součin limit. Příklad „ $0 \cdot (\pm\infty)$ “ není ale zahrnut.

V případě podílu může být $a \in \mathbb{R}$ a $b = \pm\infty$, kdy výsledek limity bude nula, nebo $a = \pm\infty$ a $b \in \mathbb{R}$, kde výsledek bude $\pm\infty$ podle znamének čitatele a jmenovatele. Příklad „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ není zahrnut.

Zdůrazníme, že naše věta jako speciální případ pokrývá také odpovídající tvrzení o konvergenci posloupností.

Příklad. Spočítejte následující limity posloupností:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n + 1},$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 + n + 1},$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{2n^2 + 3n + 1},$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n}}{n},$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 + n} - 2n.$$

Řešení.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \infty.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{2n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2n + 3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$(4) \text{ Podle věty o třech limitách: } \forall n \in \mathbb{N} : \frac{\sqrt{4n^2}}{n} < \frac{\sqrt{4n^2 + n}}{n} < \frac{\sqrt{4n^2 + n + \frac{1}{16}}}{n}.$$

Dále pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} = 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n + \frac{1}{16}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \frac{1}{4}}{n} = 2.$$

Tedy i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n}}{n} = 2$$

(5)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 + n} - 2n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2 + n} - 2n)(\sqrt{4n^2 + n} + 2n)}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{4n^2 + n}}{n} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

□

5.14

5.16. Spojité funkce. Necht f je reálná nebo komplexní funkce definovaná na intervalu $A \subset \mathbb{R}$. Říkáme, že f je *spojitá v bodě* $x_0 \in A$, jestliže je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funkce f je *spojitá na* A , jestliže je *spojitá* ve všech bodech $x_0 \in A$.

Všiměme si, že pro hraniční body intervalu A říká naše definice, že f v nich má být *spojitá zprava*, resp. *zleva*. Již jsme také viděli, že každý polynom je spojitou funkcí na celém \mathbb{R} , viz 5.13(5).

Z předchozí věty okamžitě vyplývá většina následujících tvrzení

Věta. Necht f a g jsou spojité funkce na intervalu A . Pak

- (1) součet $f + g$ je spojité funkce
- (2) součin $f \cdot g$ je spojité funkce
- (3) pokud navíc $g(x_0) \neq 0$, pak podíl f/g je dobře definován v nějakém okolí x_0 a je spojité v x_0 .
- (4) pokud spojité funkce h je definována na okolí hodnoty $f(x_0)$, pak složená funkce $h \circ f$ je definována na okolí bodu x_0 a je v x_0 spojité.

DŮKAZ. Tvrzení (1) a (2) jsou zřejmá, doplnit důkaz potřebujeme u tvrzení (3). Jestliže je $g(x_0) \neq 0$, pak také celé ϵ -okolí čísla $g(x_0)$ neobsahuje nulu pro dostatečně malé $\epsilon > 0$. Ze spojitosti g pak vyplývá, že na dostatečně malém δ -okolí x_0 bude g neulové a podíl f/g tam bude tedy dobře definován. Pak bude ovšem i spojité v x_0 podle předchozí věty.

(4) Zvolme nějaké okolí \mathcal{O} hodnoty $h(f(x_0))$. Ze spojitosti h k němu existuje okolí \mathcal{O}' bodu $f(x_0)$, které je celé zobrazeno funkcí h do \mathcal{O} . Do tohoto okolí \mathcal{O}' spojité zobrazení f zobrazí dostatečně malé okolí bodu x_0 . To je ale právě definiční vlastnost spojitosti a důkaz je ukončen. \square

Nyní si vcelku snadno můžeme odvodit zásadní souvislosti spojitých zobrazení a topologie reálných čísel:

5.15

5.17. Věta. Necht $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojité funkce. Pak

- (1) vzor $f^{-1}(U)$ každé otevřené množiny je otevřená množina,
- (2) vzor $f^{-1}(W)$ každé uzavřené množiny je uzavřená množina,
- (3) obraz $f(K)$ každé kompaktní množiny je kompaktní množina,
- (4) na libovolné kompaktní množině K dosahuje spojité zobrazení maxima a minima.

DŮKAZ. (1) Uvažme nějaký bod $x_0 \in f^{-1}(U)$. Někaké okolí \mathcal{O} hodnoty $f(x_0)$ je celé v U , protože je U otevřená. Pak ovšem existuje okolí \mathcal{O}' bodu x_0 , které se celé zobrazí do \mathcal{O} , patří tedy do vzoru. Každý bod vzoru je tedy vnitřní a tím je důkaz ukončený.

(2) Uvažme nějaký hromadný bod x_0 vzoru $f^{-1}(W)$ a nějakou posloupnost x_i , $f(x_i) \in W$, která k němu konverguje. Ze spojitosti f nyní zjevně vyplývá, že $f(x_i)$ konverguje k $f(x_0)$, a protože je W uzavřená, musí i $f(x_0) \in W$. Zřejmě jsou tedy všechny hromadné body vzoru W ve W také obsaženy.

(3) Zvolme libovolné otevřené pokrytí $f(K)$. Vzory jednotlivých intervalů budou sjednocenými otevřených intervalů a tedy také vytvoří pokrytí množiny K . Z

něho lze vybrat konečné pokrytí a proto nám stačilo konečně mnoho odpovídajících obrazů k pokrytí původní množiny $f(K)$.

(4) Protože je obrazem kompaktní množiny opět kompaktní množina, musí být obraz ohraničený a zároveň musí obsahovat svoje supremum i infimum. Odtud ale vyplývá, že tyto musí být zároveň maximem a minimem hodnot. \square

5.16 **5.18. Důsledek.** *Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Potom*

- (1) *obraz každého intervalu je opět interval*
- (2) *f na uzavřeném intervalu $[a, b]$ nabývá všech hodnot mezi svou maximální a minimální hodnotou.*

DŮKAZ. (1) Uvažme nějaký interval A (a ponechme stranou, jestli je A uzavřený nebo otevřený, ať už zleva nebo zprava) a předpokládejme, že existuje bod $y \in \mathbb{R}$ takový, že $f(A)$ obsahuje body menší i větší než y , ale $y \notin f(A)$. Znamená to tedy, že pro otevřené množiny $B_1 = (-\infty, y)$ a $B_2 = (y, \infty)$ jejich vzory $A_1 = f^{-1}(B_1)$ a $A_2 = f^{-1}(B_2)$ pokrývají A . Tyto množiny jsou přitom opět otevřené, jsou disjunktní a obě mají neprázdný průnik s A . Nutně tedy musí existovat bod $x \in A$, který neleží v B_1 , je ale jejím hromadným bodem. Musí však ležet v B_2 a to u disjunktních otevřených množin není možné. Dokázali jsme tedy, že pokud nějaký bod y nepatří do obrazu intervalu, musí být všechny hodnoty buď zároveň větší nebo zároveň menší. Odtud vyplývá, že obrazem bude opět interval. Všimněme si, že jeho krajní body mohou a nemusí do obrazu patřit.

(2) Toto tvrzení je přímým důsledkem předchozího. \square

5.17

5.19. Přírůstky do ZOO. Zatím jsme v podstatě pracovali pouze s polynomy a s funkcemi, které se z nich dají vyrobit „po částech“. Zároveň jsme dovedli spoustu vlastností pro obrovskou třídu spojitých funkcí, nemáme ale zatím moc prakticky zvladatelných příkladů. Naše úvahy nám teď umožňují alespoň trochu rozšířit naši zásobárnu funkcí.

(1) Nechť f a g jsou dva polynomy, které mohou mít i komplexní hodnoty (tj. připouštíme výrazy $a_n x^n + \dots + a_0$ s komplexními $a_i \in \mathbb{C}$, ale dosazujeme jen reálné hodnoty za x). Pak funkce

$$h : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

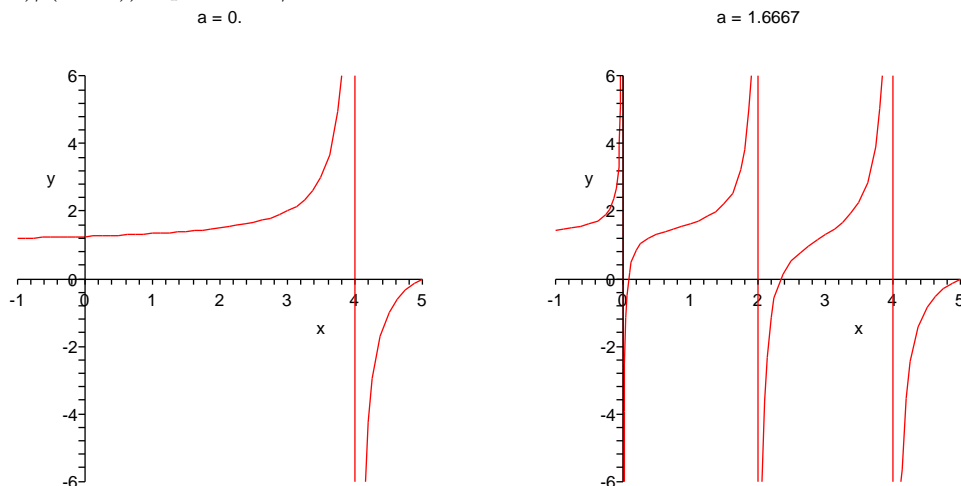
je dobře definována ve všech reálných bodech kromě kořenů polynomu g . Takové funkce nazýváme *racionální funkce*. Z věty 5.16 vyplývá, že racionální funkce jsou spojitě ve všech bodech svého definičního oboru. V bodech, kde definovány nejsou mohou mít

- konečnou limitu, když jde o společný kořen polynomů f i g (a v tomto případě rozšířením jejich definice o limitní hodnotu v tomto bodě dostaneme funkci i v tomto bodě spojitou)
- nekonečnou limitu, když limity zprava a zleva v tomto bodě jsou stejné
- různé nekonečné limity zprava a zleva.

Názorně je možné tuto situaci vidět na obrázku, který ukazuje hodnoty funkce

$$h(x) = \frac{(x - 0.05a)(x - 2 - 0.2a)(x - 5)}{x(x - 2)(x - 4)}$$

pro hodnoty $a = 0$ (obrázek vlevo tedy vlastně zobrazuje racionální funkci $(x - 5)/(x - 4)$) a pro $a = 5/3$.



(2) Polynomy jsou pomocí sčítání a násobení skaláry seskládány z jednoduchých mocninných funkcí $x \mapsto x^n$ s přirozených číslem $n = 0, 1, 2, \dots$. Samozřejmý smysl má také funkce $x \mapsto x^{-1}$ pro všechny $x \neq 0$. Tuto definici teď rozšíříme na obecnou *mocninnou funkci* s $n \in \mathbb{R}$.

Pro $n = -a$ s $a \in \mathbb{N}$ definujeme

$$x^{-a} = (x^a)^{-1} = (x^{-1})^a.$$

Dále jistě chceme, aby ze vztahu $b^n = x$ pro $n \in \mathbb{N}$ vyplývalo $b = x^{\frac{1}{n}}$. Je třeba ale ověřit, že taková b skutečně existují. Předpokládejme $x > 0$ a označme B množinu $B = \{y \in \mathbb{R}, y > 0, y^n \leq x\}$. To je zřejmě zhora ohraničená množina a lze ověřit, že pro $b = \sup B$ skutečně platí požadovaná rovnost.

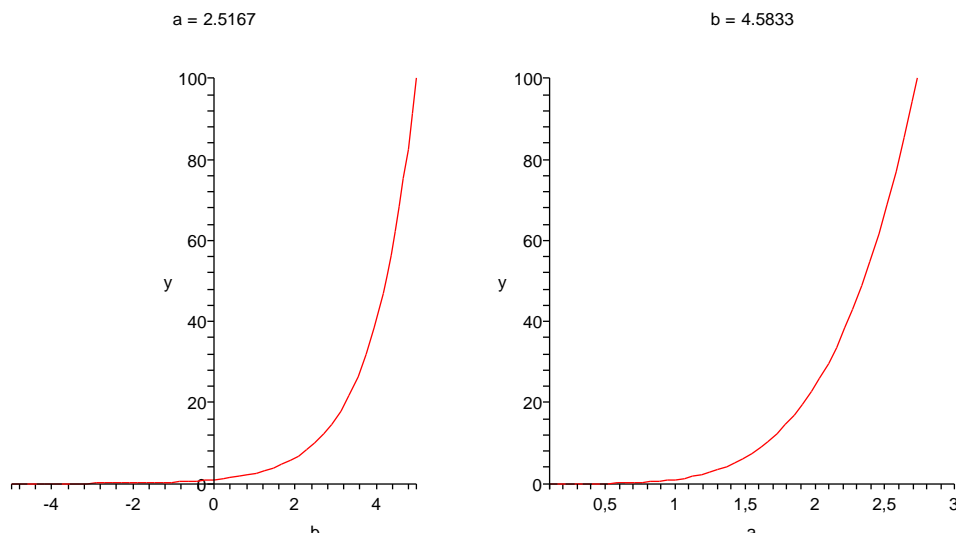
Zdůvodnili jsme tedy existenci x^a pro všechny $x > 0$ a $a \in \mathbb{Q}$. Konečně, pro $a \in \mathbb{R}$, $x > 1$ klademe

$$x^a = \sup\{x^y, y \in \mathbb{Q}, y \leq a\}.$$

Pro $0 < x < 1$ buď definujeme analogicky (je třeba si jen pohrát s nerovnicí) nebo klademe přímo $x^a = (\frac{1}{x})^{-a}$. Pro $x = 1$ je pak $1^a = 1$ pro libovolné a .

Obecnou mocninnou funkci $x \mapsto x^a$ máme tedy dobře definovanou pro všechny $x \in [0, \infty)$ a $a \in \mathbb{R}$. Naši konstrukci ale můžeme také číst následujícím způsobem: Pro každé pevné reálné $c > 0$ existuje dobře definovaná funkce na celém \mathbb{R} , $y \mapsto c^y$. Této funkci říkáme *exponenciální funkce* o základu c .

Na obrázcích vidíme funkce $x \mapsto a^x$ a $x \mapsto x^b$ pro jednu konkrétní hodnotu $a = 2.5167$ a $b = 4.5833$.



Z našich definic je vcelku zřejmé, že mocninné i exponenciální funkce jsou spojité na celých svých definičních oborech. Zároveň se ze spojitosti definice pomocí suprem množin hodnot zjevně přenáší základní vlastnosti platné pro racionální čísla, a , x , y :

e5.3a

$$(5.5) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}.$$

Příklad. Buď $c \in \mathbb{R}^+$ (kladné reálné číslo). Ukážeme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

Řešení. Uvažme nejprve $c > 1$. Vzhledem k tomu, že funkce $\sqrt[n]{c}$ je vzhledem k n klesající a její hodnoty jsou stále větší než 1, tak musí mít posloupnost $\sqrt[n]{c}$ limitu a tou je infimum jejich členů. Předpokládejme, že by tato limita byla větší než 1, řekněme $1 + \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$. Pak by podle definice limity byly všechny hodnoty dané posloupnosti od jistého m menší než $1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}$, t.j. zejména $\sqrt[m]{c} < 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}$. Potom by však

$$\sqrt[2m]{c} = \sqrt{\sqrt[m]{c}} < \sqrt{1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon,$$

což je spor s tím, že $1 + \varepsilon$ je infimum dané posloupnosti. \square

3. Derivace

U polynomů jsme již v odstavci 5.5 diskutovali, jak popisovat jednoduše velikost růstu hodnot polynomu kolem daného bodu jeho definičního oboru. Tehdy jsme pozorovali podíl (5.2), který vyjadřoval směrnici sečny mezi body $[x, f(x)] \in \mathbb{R}^2$ a $[x + \Delta x, f(x + \Delta x)] \in \mathbb{R}^2$ pro (malý) přírůstek Δx nezávisle proměnné. Tehdejší úvaha funguje zrovna stejně pro libovolnou reálnou nebo komplexní funkci f , jen musíme místo intuitivního „zmenšování“ přírůstku Δx pracovat s pojmem limity.

5.18

5.20. Definice. Nechť f je reálná nebo komplexní funkce s definičním oborem $A \subset \mathbb{R}$ a $x_0 \in A$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

pak říkáme, že f má v bodě x_0 *derivaci* a . Píšeme často $a = f'(x_0)$ nebo $a = \frac{df}{dx}(x_0)$ případně $a = \frac{d}{dx}f(x_0)$.

Derivace funkce je *vlastní*, resp. *nevlastní*, když je takovou příslušná limita.

Jednostranné derivace (tj. derivaci zprava a zleva) definujeme zcela stejně pomocí limity zprava a zleva.

Z formulace definice lze očekávat, že $f'(x_0)$ bude opět umožňovat dobře aproximovat danou funkci pomocí přímky

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Takto lze snad vnímat následující lemma, které říká, že nahrazením konstantního koeficientu $f'(x_0)$ spojitou funkcí dostaneme přímo hodnoty f .

Lemma. *Reálná nebo komplexní funkce má v bodě x_0 vlastní derivaci, právě když existuje na nějakém okolí $\mathcal{O}(x_0)$ funkce ψ spojitá v x_0 a taková, že pro všechny $x \in \mathcal{O}(x_0)$ platí*

$$f(x) = f(x_0) + \psi(x)(x - x_0).$$

Navíc pak vždy $\psi(x_0) = f'(x_0)$.

DŮKAZ. Nejprve předpokládejme, že $f'(x_0)$ je vlastní derivace. Pokud má ψ existovat, má jistě tvar $\psi(x) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ pro všechny $x \in \mathcal{O} \setminus \{x_0\}$. V bodě x_0 naopak definujme hodnotu derivací. Pak jistě

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = f'(x_0) = \psi(x_0)$$

jak je požadováno.

Naopak, jestliže taková funkce ψ existuje, tentýž postup vypočte její limitu v x_0 . Proto existuje i $f'(x_0)$ a je $\psi(x_0)$ rovna. \square

5.18a

5.21. Geometrický význam derivace. Předchozí lemma lze názorně vysvětlit geometricky a tím popsat smysl derivace. Říká totiž, že na grafu funkce $y = f(x)$, tj. na příslušné křivce v rovině se souřadnicemi x a y , poznáme, zda existuje derivace podle toho, jestli se spojitě mění hodnota směrnice sečny procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x, f(x)]$. Pokud ano, pak limitní hodnota této směrnice je hodnotou derivace.

Důsledek. *Má-li reálná funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(x_0) > 0$, pak pro nějaké okolí $\mathcal{O}(x_0)$ platí $f(b) > f(a)$ pro všechny body $a, b \in \mathcal{O}(x_0)$, $b > a$.*

Je-li derivace $f'(x_0) < 0$, pak naopak pro nějaké okolí $\mathcal{O}(x_0)$ platí $f(b) < f(a)$ pro všechny body $a, b \in \mathcal{O}(x_0)$, $b > a$.

DŮKAZ. Uvažme prvý případ. Pak podle předchozího lematu platí $f(x) = f(x_0) + \psi(x)(x - x_0)$ a $\psi(x_0) > 0$. Protože je ale ψ v x_0 spojitá, musí existovat okolí $\mathcal{O}(x_0)$, na kterém bude $\psi(x) > 0$. Pak ale s rostoucím x nutně poroste i hodnota $f(x)$.

Stejná argumentace ověří i tvrzení se zápornou derivací. \square

Funkce, které mají vlastnost $f(b) > f(a)$ kdykoliv $b > a$ pro nějaké okolí bodu x_0 se nazývají *rostoucí v bodě x_0* . Funkce rostoucí ve všech bodech nějakého intervalu se nazývá *rostoucí na intervalu*. Podobně je funkce *klesající v bodu*, resp. *klesající na intervalu*, jestliže $f(b) < f(a)$ kdykoliv je $a < b$. Náš důsledek tedy říká, že funkce která má v bodě nenulovou konečnou derivaci je v tomto bodě buď rostoucí nebo klesající podle znaménka této derivace.

5.19

5.22. Pravidla pro počítání. Uvedme si nyní několik základních tvrzení o výpočtech derivací. Říkají nám, jak dobře se snáší operace derivování s algebraickou strukturou sčítání a násobení na reálných nebo komplexních funkcích. Poslední z pravidel pak umožňuje efektivní výpočet derivace složených funkcí a říkává se mu „chain rule“. Intuitivně jim můžeme všem velice snadno rozumět, když si derivaci funkce $y = f(x)$ představíme jako podíl přírůstků závislé proměnné y a nezávislé proměnné x :

$$f' = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Samozřejmě pak při $y = h(x) = f(x) + g(x)$ je přírůstek y dán součtem přírůstků f a g a přírůstek závislé proměnné zůstává stejný. Je tedy derivace součtu součtem derivací.

U součinu musíme být malinko pozornější. Pro $y = h(x) = f(x)g(x)$ je přírůstek

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= f(x + \Delta x)(g(x + \Delta x) - g(x)) + (f(x + \Delta x) - f(x))g(x) \end{aligned}$$

Nyní ale když budeme zmenšovat přírůstek Δx , jde vlastně o výpočet limity součtu součinů a o tom už víme, že jej lze počítat jako součet součinů limit. Proto z naší formulky lze očekávat pro derivaci součinu fg výraz $f'g + f'g$.

Ještě zajímavější je to pro derivaci složené funkce $g = h \circ f$, kde definiční obor funkce $z = h(y)$ obsahuje obor hodnot funkce $y = f(x)$. Opět vypsáním přírůstků dostáváme

$$g' = \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Můžeme tedy očekávat, že pravidlo pro výpočet bude $(h \circ f)'(x) = h'(f(x))f'(x)$.

Podáme nyní korektní formulace a důkaz:

Věta. *Nechť f a g jsou reálné nebo komplexní funkce definované na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a mající v tomto bodě vlastní derivaci. Potom*

- (1) *funkce f je v bodě x_0 spojitá,*
- (2) *pro každé reálné nebo komplexní číslo c má funkce $x \mapsto c \cdot f(x)$ derivaci v x_0 a platí*

$$(cf)'(x_0) = c(f'(x_0)),$$

- (3) *funkce $f + g$ má v x_0 derivaci a platí*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

- (4) *funkce $f \cdot g$ má v x_0 derivaci a platí*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

- (5) *Je-li dále h funkce definovaná na okolí obrazu $y_0 = f(x_0)$, která má derivaci v bodě y_0 , má také složená funkce $h \circ f$ derivaci v bodě x_0 a platí*

$$(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

DŮKAZ. (1) Předpokládejme, že $f'(x_0)$ existuje a je vlastní (tj. není nekonečná). Pak můžeme vyjádřit pro každé $x \neq x_0$

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Protože je ale limita součtu a součinu funkcí dána jako součet a součin limit (viz Věta 5.15), dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f'(x_0) \cdot 0 + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = f(x_0),$$

což ověřuje spojitost f v x_0 .

(2) a (3) Opět přímé použití věty o součtech a součinech limit funkcí dává výsledek.

(4) Přepíšeme vztah pro podíl přírůstků, který jsme zmínili před formulací věty, takto

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0).$$

Limita tohoto výrazu pro $x \rightarrow x_0$ dá právě požadovaný výsledek, protože je funkce f spojitá v x_0 .

(5) Podle předchozího lematu existují funkce ψ a φ spojitě v bodech x_0 a $y_0 = f(x_0)$ takové, že

$$h(y) = h(y_0) + \varphi(y)(y - y_0), \quad f(x) = f(x_0) + \psi(x)(x - x_0)$$

na nějakých okolích x_0 a y_0 . Navíc pro ně platí $\psi(x_0) = f'(x_0)$ a $\varphi(y_0) = h'(y_0)$. Pak ovšem také platí

$$h(f(x)) - h(f(x_0)) = \varphi(f(x))(f(x) - f(x_0)) = \varphi(f(x))\psi(x)(x - x_0)$$

pro x z okolí bodu x_0 . Součin $\varphi(f(x))\psi(x)$ je ovšem spojitá funkce v x_0 a její hodnota v bodě x_0 je právě požadovaná derivace složené funkce. \square

Důsledek. *Nechť f a g jsou reálné funkce, která mají v bodě x_0 vlastní derivace a $g(x_0) \neq 0$. Pak pro funkci $h(x) = f(x)(g(x))^{-1}$ platí*

$$h'(x_0) = \left(\frac{f}{g} \right)' (x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

DŮKAZ. Dokážeme si speciální případ formulky pro $h(x) = x^{-1}$. Přímou z definice derivace dostáváme

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x - x - \Delta x}{\Delta x(x^2 + x\Delta x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + x\Delta x}.$$

Z pravidel pro počítání limit okamžitě dostáváme

$$h'(x_0) = -x^{-2}.$$

Nyní pravidlo pro derivaci složené funkce říká, že $(g^{-1})' = -g^{-2} \cdot g'$ a konečně pravidlo pro derivaci součinu nám dává právě kýžený vzorec:

$$(f/g)' = (f \cdot g^{-1})' = f'g^{-1} - fg^{-2}g' = \frac{f'g - gf'}{g^2}.$$

\square

5.20

5.23. Derivace inverzních funkcí. V odstavci 1.57 jsme při obecné diskusi relací a zobrazení formulovali pojem *inverzní funkce*. Pokud k dané funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ inverzní funkce f^{-1} existuje (nezaměňujeme značení s funkcí $x \mapsto (f(x))^{-1}$), pak je dána jednoznačně kterýmkoliv ze vztahů

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}},$$

a druhý již pak platí také. Pokud je f definováno na podmnožině $A \subset \mathbb{R}$ a $f(A) = B$, je existence f^{-1} podmíněna stejnými vztahy s identickými zobrazeními id_A resp. id_B na pravých stranách.

Pokud bychom věděli, že pro diferencovatelnou funkci f je i f^{-1} diferencovatelná, pravidlo pro derivaci složené funkce nám říká

$$1 = (\text{id})'(x) = (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)$$

a tedy přímo víme formuli (zjevně $f'(x)$ v takovém případě nemůže být nulové)

$$(5.6) \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

To dobře odpovídá intuitivní představě, že pro $y = f(x)$ je $f' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ zatímco pro $x = f^{-1}(y)$ je $(f^{-1})'(y) = \frac{\Delta x}{\Delta y}$. Takto skutečně můžeme derivace inverzních funkcí počítat:

Věta. *Je-li f diferencovatelná funkce na okolí bodu x_0 a $f'(x_0) \neq 0$, pak existuje na nějakém okolí bodu $y_0 = f(x_0)$ funkce f^{-1} inverzní k f a platí vztah (5.6).*

Pokud je $f'(x_0) = 0$ izolovaným nulovým bodem derivace $f'(x)$ a inverzní funkce k f na okolí $f(x_0)$ existuje, pak limity zprava i zleva funkce f' jsou v bodě x_0 nevlastní.

DŮKAZ. Nejprve si povšimněme, že nenulovost derivace znamená, že na nějakém okolí je naše funkce f buď ostře rostoucí nebo klesající, viz důsledek 5.21. Proto na nějakém okolí nutně existuje inverzní funkce. Přímou z definice spojitosti pomocí okolí je pak tato inverzní funkce také spojitá.

Pro odvození našeho tvrzení nyní postačí pozorně znovu pročíst důkaz pátého tvrzení věty 5.22. Jen volíme f místo funkce h a f^{-1} místo f a místo předpokladu existence derivací pro obě funkce víme, že funkce složená je diferencovatelná (a víme, že její derivace je identita): Skutečně, podle lematu 5.20 existuje funkce ψ spojitá v bodě y_0 taková, že

$$f(y) - f(y_0) = \varphi(y)(y - y_0),$$

na nějakém okolí y_0 . Navíc pro ni platí $\varphi(y_0) = f'(y_0)$. Pak ovšem po dosazení $y = f^{-1}(x)$ také platí

$$x - x_0 = \varphi(f^{-1}(x))(f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)),$$

pro x z nějakého okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 . Dále platí $f^{-1}(x_0) = y_0$ a protože je f buď ostře rostoucí nebo klesající, je $\varphi(f^{-1}(x)) \neq 0$ pro všechny $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Můžeme tedy psát

$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(x))} \neq 0,$$

pro všechny $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Pravá strana tohoto výrazu je spojitá v bodě x_0 a limita je rovna $\varphi(y_0) = (f'(y_0))^{-1}$, proto i limita levé strany existuje a je rovna témuž výrazu.

Předpokládejme, že je x_0 izolovaný nulový bod derivace f' a že inverzní funkce na nějakém okolí $f(x_0)$ existuje. Pak je f' na okolí bodu x_0 nenulová, její hodnota se ale blíží nule. Proto má nalevo i napravo derivaci i inverzní funkce a na nějakém levém, resp. pravém, okolí bodu x_0 tato nemění znaménko. Odtud již vyplývá, že existují limity zprava i zleva pro f' v bodě x_0 a jsou nevlastní. \square

5.22

5.24. Derivace vyšších řádů. Říkáme, že reálná nebo komplexní funkce f má v bodě x_0 derivaci druhého řádu v bodě x_0 , jestliže derivace f' existuje na nějakém okolí bodu x_0 a existuje její derivace v bodě x_0 . Píšeme

$$f''(x_0) = (f')'(x_0)$$

nebo také $f^{(2)}(x_0)$. Funkce f je *dvakrát diferencovatelná* na nějakém intervalu A , jestliže má druhou derivaci v každém jeho bodě.

Derivace vyšších řádů definujeme induktivně. Známe již pojem první a druhá derivace a říkáme, že reálná nebo komplexní funkce f je *k-krát diferencovatelná* pro nějaké přirozené číslo k v bodě x_0 , jestliže je $(k-1)$ -krát diferencovatelná na nějakém okolí bodu x_0 a její $(k-1)$ -ní derivace má v bodě x_0 derivaci.

Pro k -tou derivaci funkce $f(x)$ užíváme značení $f^{(k)}(x)$.

Jestliže existují derivace všech řádů na intervalu, říkáme, že je tam funkce *hladká*. Většinou se také užívá konvence, že 0-krát diferencovatelná funkce znamená spojitá funkce. Používáme pro takové funkce označení *třída funkcí* $C^k(A)$ na intervalu A , kde k může nabývat hodnot $0, 1, \dots, \infty$. Často píšeme pouze C^k , je-li definiční obor znám z kontextu.

Ilustrovat můžeme rychle pojem derivace vyššího řádu na polynomech. Protože výsledkem derivování polynomu je opět polynom, ale derivací se vždy o jedničku snižuje jeho stupeň, dostaneme po konečném počtu derivací nulový polynom. Přesněji řečeno, právě po $k+1$ derivacích, kde k je stupeň polynomu, dostaneme nulu. Samozřejmě pak existují derivace všech řádů, tj. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Při konstrukci splajnů, viz 5.7, jsme pohlídali, aby výsledné funkce byly třídy $C^2(\mathbb{R})$. Jejich třetí derivace budou po částech konstantní funkce. Proto nebudou splajny patřit do $C^3(\mathbb{R})$, přestože jejich všechny derivace vyšších řádů budou nulové ve všech vnitřních bodech jednotlivých intervalů v interpolaci. Promyslete si podrobně tento příklad!

5.25. Zvěřinec. Zatím máme shromážděny čtyři typy funkcí:

- polynomy f definované na celém \mathbb{R} s hodnotami v \mathbb{R} nebo v \mathbb{C} ,
- racionální funkce f/g definované na celém \mathbb{R} kromě nejvýše konečné množiny kořenů polynomu g ve jmenovateli zlomku, s hodnotami v \mathbb{R} nebo \mathbb{C} ,
- mocninné funkce x^b s obecným $b \in \mathbb{R}$, definované pro $x > 0$ a hodnotami v \mathbb{R} ,
- exponenciální funkce a^x o libovolném základu $a > 0$ definované pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a s hodnotami v \mathbb{R} .

Polynomy. Derivace polynomů jsme spočítali již v odstavci 5.5. Ilustrujme naše nástroje pro výpočet derivací při diskusi kořenů polynomů. Předně platí tzv. *základní věta algebry*, kterou však nebudeme dokazovat:

Věta. Každý nenulový komplexní polynom $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stupně alespoň jedna má kořen.

Nutně tedy polynom stupně $k > 0$ má právě k kořenů včetně násobností a můžeme jej vždy psát jednoznačně ve tvaru

$$f(x) = (x - a_1)^{c_1} \cdot (x - a_q)^{c_q}$$

kde a_1, \dots, a_q jsou všechny kořeny polynomu f a $1 \leq c_1, \dots, c_q \leq k$ jsou jejich násobnosti. Derivací dostaneme

$$f'(x) = c_1(x - a_1)^{c_1-1} \dots (x - a_q)^{c_q} + \dots + c_q(x - a_1)^{c_1} \dots (x - a_q)^{c_q-1}.$$

Jestliže je $c_1 = 1$, bude hodnota derivace f' v bodě a_1 nenulová, protože první člen výrazu je nenulový, zatímco všechny zbývající po dosazení hodnoty $x = a_1$ zmizí. Oddobně to bude i s ostatními kořeny. Ověřili jsme tedy užitečnou vlastnost, že kořen a polynomu f je vícenásobný tehdy a jen tehdy, když je zároveň kořenem derivace f' .

Protože polynomy jen zřídka jsou výhradně rostoucí nebo klesající funkce, nemůžeme očekávat, že by existovaly globálně definované inverzní funkce k nim. Naopak ovšem inverzní funkce k polynomu f existují na každém intervalu mezi kořeny derivace f' , tj. tam kde derivace polynomu je nenulová a nemění znaménko. Tyto inverzní funkce nebudou nikdy polynomy, až na případ polynomů stupně jedna, kdy z rovnice

$$y = ax + b$$

spočteme přímo

$$x = \frac{1}{a}(y - b).$$

U polynomu druhého řádu obdobně

$$y = ax^2 + bx + c$$

vede k formuli

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a},$$

a inverze tedy existuje (a je dána touto formulí) jen pro x na intervalech $(-\infty, -\frac{b}{2a})$, $(-\frac{b}{2a}, \infty)$.

Pro práci s inverzními funkcemi k polynomům nevystačíme s našimi funkcemi a dostáváme v našem zvířetníku nové přírůstky.

Racionální funkce. Všechny racionální funkce jsou také třídy C^∞ ve všech bodech svého definičního oboru. Jejich derivace se snadno počítá pomocí formule pro derivaci podílu. Samozřejmě bude také racionální funkcí.

Inverze také budou jako u polynomů existovat obecně jen lokálně a jsou novými přírůstky do našeho společenstva funkcí.

Mocninné funkce. Obecnou mocninou funkci není tak snadné zderivovat, i když bychom mohli věřit, že formulka

e5.6

 (5.7)
$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

známá pro přirozená a bude platit i pro obecné a . K tomu totiž máme dobrý důvod, protože ji umíme přímo ověřit pro racionální $a = p/q$. Je-li a celé a záporné, pak tvrzení přímo vidíme z věty o složené funkci:

$$(x^{-n})' = ((x^n)^{-1})' = -(x^n)^{-2}nx^{n-1} = -nx^{-2n+n-1} = -nx^{-n-1}.$$

Pokračujme dále s odmocninami, tj. $a = 1/q$. Pišme $x = h(y) = y^{1/q}$, $y = x^q$ a počítejme podle věty o derivaci inverzní funkce

$$h'(y) = \frac{1}{q} \frac{1}{x^{q-1}} = \frac{1}{q} y^{-(q-1)/q} = \frac{1}{q} y^{1/q-1}.$$

Pro obecné racionální $a = p/q$ máme

$$(x^{p/q})' = ((x^{1/q})^p)' = p(x^{1/q})^{p-1} \frac{1}{q} x^{1/q-1} = \frac{p}{q} x^{p/q-1}.$$

Nyní bychom mohli zvládnout důkaz platnosti formule (5.7) pomocí spojitosti definice mocninné funkce x^a v parametru a . Vrátime se raději k důkazu z jiného pohledu za malou chvíli.

Funkce $f(x) = x^0 = 1$ má samozřejmě derivaci nulovou, pro všechny jiné hodnoty $a \neq 0$ je derivace nenulová. Je záporná pro $a \in (0, 1)$, kladná pro $a \in (1, \infty)$. Proto je mocninná funkce na celém definičním oboru $(0, \infty)$ klesající v prvním případě a rostoucí v druhém. Její inverzní funkce je opět mocninnou funkcí.

Exponenciální funkce. Zbývají nám funkce $f(x) = a^x$. Zde se také budeme s derivací poněkud potýkat. Pokud budeme umět derivovat a^x ve všech bodech x , bude jistě platit

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = f'(0)a^x.$$

Naopak, pokud existuje derivace v nule, pak tento výpočet ověřuje existenci derivace v kterémkoliv bodě a dává její hodnotu. Zároveň jsme ověřili platnost téhož vztahu pro derivace zprava a zleva.

Exponenciální funkce jsou tedy zvláštními případy funkcí, kdy jejich derivace jsou úměrné hodnotám s konstantním koeficientem úměrnosti.

Spočtěme derivaci $f'(0)$, tj. výraz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

a předpokládejme, že naše $a > 1$. Z definice hodnot exponenciální funkce pomocí suprem množin hodnot s racionálními x je zřejmé, že exponenciální funkce a^x je na celém svém definičním oboru rostoucí. Stačí nám proto při výpočtu derivace zprava dosazovat za x postupně hodnoty $x_n = 1/n$ a dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{1/n} - 1}{1/n}.$$

Zkusíme najít takové a , aby limita existovala a byla rovna jedné. Toho dosáhneme, pokud budeme umět s rostoucím n libovolně dobře přibližovat hodnotu $a^{1/n}$ k hodnotě $1 + 1/n$, tj. ekvivalentně (dle pravidel pro počítání limit) a je s rostoucím n libovolně přesně aproximováno hodnotou

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Z binomického rozvoje je zřejmé, že pro každé kladné číslo b a přirozené n platí $(1+b)^n > 1+nb$, dostáváme proto pro dva po sobě jdoucí členy naší posloupnosti podíl

$$\frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n^2 - 1)^n n}{n^{2n} (n-1)} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} > \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n-1} = 1.$$

Je tedy naše posloupnost rostoucí. Zároveň stejným výpočtem ověříme, že posloupnost čísel

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

je klesající a jistě je $b_n > a_n$. Ověřili jsme tedy existenci limity poslounosti a_n (a zároveň vidíme, že je rovna limitě klesající poslounosti b_n).

Tato limita je jedním z nejdůležitějších čísel v matematice (vedle nuly, jedničky a Ludolfova čísla π), nazýváme jej *Eulerovým číslem* e . Je tedy

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Náš postup zároveň ověřil, že existuje derivace v nule zprava exponenciální funkce e^x a je rovna jedné. Proto existuje ve všech bodech x také derivace zprava a je rovna e^x . Nyní můžeme spočítat derivaci zleva pomocí derivací složených funkcí. Skutečně,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = (e^0)^{-2} e^0 = 1.$$

Derivace zleva i zprava tedy pro funkci $f(x) = e^x$ existují ve všech bodech a jsou si rovny.

Přirozený logaritmus. Protože je exponenciální funkce e^x všude dobře definována a kladná, existuje všude i její funkce inverzní. Označujeme ji $\ln x$ a říkáme jí *přirozený logaritmus* nebo logaritmus se základem e . Je definována vztahem

$$e^{\ln x} = x.$$

Z vlastností mocninných funkcí, viz vztahy (5.5), okamžitě dostáváme

$$\boxed{5.6a} \quad (5.8) \quad \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \quad \ln x^y = y \cdot \ln x.$$

Derivaci přirozeného logaritmu spočteme podle pravidla pro derivaci složené funkce (užíváme již, že e^x je rovno své derivaci, a také definiční vztah pro logaritmus):

$$\boxed{e5.7} \quad (5.9) \quad (\ln)'(y) = (\ln)'(e^x) = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Derivaci obecné exponenciální funkce $f(x) = a^x$ můžeme nyní spočítat takto:

$$\boxed{e5.8} \quad (5.10) \quad (a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \ln a.$$

Podobně také můžeme konečně ověřit i formuli pro derivaci obecné mocninné funkce pro všechny $x > 0$:

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} (a \ln x)' = ax^{a-1}.$$

Pro obecnou exponenciální funkci a^x se základem $a \neq 1$, $a > 0$ také existuje všude inverzní funkce. Říkáme jí *logaritmus při základu a* , píšeme $\log_a x$.

Vlastnosti dosavadního osazenstva našeho zvířetníku funkcí zpřehledňuje následující tabulka, kde jsou shrnuty vlastnosti jednotlivých obyvatelů a jejich vztahy:

funkce	definiční obor	třída	derivace	inverze
polynomy f	celé \mathbb{R}	C^∞	f' opět polynom	f^{-1} existuje jen lokálně a neumíme obecnou formuli
kubické splajny h	celé \mathbb{R}	C^2	h' je opět splajn	formule s odmocninami a jen lokálně
racionální funkce f/g	celé \mathbb{R} kromě kořenů jmenovatele g	C^∞	opět racionální funkce: $\frac{f'g - fg'}{g^2}$	existuje jen lokálně a neumíme obecnou formuli
mocninné funkce x^a	interval $(0, \infty)$	C^∞	funkce ax^{a-1}	existuje všude a je opět mocninnou funkcí $y^{1/a}$
exponenciální funkce a^x s $a > 0, a \neq 1$	celé \mathbb{R}	C^∞	existuje všude a je $\ln a \cdot a^x$	logaritmická funkce \log_a

4. Mocninné řady

5.24

5.26. Vraťme se k exponenciální funkci e^x . Jestliže v posloupnosti $a_m = (1 + \frac{1}{m})^m$ dosadíme za m hodnoty $m = n/x$ pro nějaké pevné $x \in \mathbb{R}$, dostaneme

$$b_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}, \quad b'_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Přitom, je limita b_n pro n jdoucí do nekonečna opět e . Odvodili jsme tedy důležitý vztah platný pro všechna $x \in \mathbb{R}$

e5.11

$$(5.11) \quad e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Označme si n -tý člen této posloupnosti $u_n(x)$ a vyjádřeme si jej pomocí binomické věty:

e5.11a

$$(5.12) \quad \begin{aligned} u_n(x) &= 1 + n \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)x^2}{2!n^2} + \dots + \frac{n!x^n}{n!n^n} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{x^3}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Protože jsou všechny závorky v součinech menší než jedna, dostáváme také

$$u_n(x) < v_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} x^j.$$

Podívejme se nyní na formální nekonečný součet

e5.12

$$(5.13) \quad \sum_{j=0}^{\infty} c_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j$$

tj. $v_n(x)$ je právě částečný součet prvních n členů. Podíl dvou po sobě jdoucích členů v řadě je $c_{j+1}/c_j = x/(n+1)$. Pro každé pevné x tedy existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $c_{j+1}/c_j < 1/2$ pro

všechny $j > N$. Pro takto velké j je ovšem $c_{j+1} < \frac{1}{2}c_j < 2^{-(j-N+1)}c_N$. To ale znamená, že částečné součty prvních n členů v našem formálním součtu jsou shora ohraničeny součty

$$v_n < \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} x^j + \frac{1}{j!} x^j \sum_{j=0}^{n-N} \frac{1}{2^j}.$$

Poslední sumu ovšem umíme snadno spočítat. Jde o zvláštní případ součtu geometrické řady $\sum_{j=0}^k q^j$. Protože platí pro každé q

$$(1-q)(1+q+\dots+q^k) = 1-q^{k+1},$$

existuje limita částečných součtů v *geometrické řadě* $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ právě když $|q| < 1$ a v takovém případě platí

e5.13 (5.14)
$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k q^j = \frac{1}{1-q}.$$

Protože čísla v_n tvoří rostoucí posloupnost, jistě také tato posloupnost konverguje. Říkáme, že řada (5.13) konverguje.

Nyní si prohlédneme pozorněji posloupnost čísel u_n , jejíž limitou je e^x . Budeme uvažovat $n > N$ pro nějaké pevné N (hodně velké) a zvolíme si $k < N$ pevné (docela malé). Pak pro dostatečně velká N umíme součet prvních k členů ve vyjádření u_N v (5.12) aproximovat libovolně přesně výrazem v_k . Protože je tato část součtu u_N ostře menší než u_N samotné, musí posloupnost u_n konvergovat k téže limitě jako posloupnost v_n . Dokázali jsme tedy:

Věta. *Exponenciální funkce je pro každé $x \in \mathbb{R}$ vyjádřena jako limita částečných součtů ve výrazu*

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n.$$

Při dovození tohoto mimořádně důležitého tvrzení jsme mimoděk pracovali s několika užitečnými pojmy a nástroji. Sformulujeme si je nyní obecněji:

5.25 **5.27. Definice.** *Nekonečná řada je výraz*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots,$$

kde a_n jsou reálná nebo komplexní čísla. Posloupnost *částečných součtů* je dána svými členy $s_k = \sum_{n=0}^k a_n$ a říkáme, že řada konverguje a je rovna s , jestliže existuje konečná limita částečných součtů

$$s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_n.$$

K tomu, aby posloupnost s_n konvergovala, je nutné a stačí, aby byla Cauchyovská. Tzn. že

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \dots + a_m|$$

musí být libovolně malé pro dostatečně velká $m > n$. Protože je

$$|a_{n+1}| + \dots + |a_m| > |a_{n+1} + \dots + a_m|,$$

vyplývá z konvergence řady $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|$ i konvergence řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$. Říkáme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Jestliže posloupnost částečných součtů řady má nevlastní limitu, říkáme že řada *diverguje* k ∞ nebo $-\infty$.

Jednoduché algebraické operace s absolutně konvergentními řadami se chovají všechny dobře:

Věta. *Nechť $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $T = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou dvě absolutně konvergentní řady. Pak*

(1) *jejich součet absolutně konverguje k součtu*

$$S + T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n),$$

(2) *jejich rozdíl absolutně konverguje k rozdílu*

$$S - T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n),$$

(3) *jejich součin absolutně konverguje k součinu*

$$S \cdot T = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right).$$

DŮKAZ. První i druhé tvrzení jsou bezprostředním důsledkem obdobných vlastností limit. Třetí tvrzení vyžaduje větší pozornost. Označme si

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k.$$

Z předpokladů a podle pravidel pro limitu součinu posloupností dostáváme

$$\left(\sum_{n=0}^k a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^k b_n \right) \rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Máme tedy dokázat, že

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{n=0}^k a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^k b_n \right) - \sum_{n=0}^k c_k \right).$$

Porovnejme si nyní výrazy

$$\left(\sum_{n=0}^k a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^k b_n \right) = \sum_{0 \leq i, j \leq k} a_i b_j, \quad c_n = \sum_{\substack{i+j=n \\ 0 \leq i, j \leq k}} a_i b_j, \quad \sum_{n=0}^k c_n = \sum_{\substack{i+j \leq k \\ 0 \leq i, j \leq k}} a_i b_j.$$

Dostáváme tedy odhad

$$\left| \left(\sum_{n=0}^k a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^k b_n \right) - \sum_{n=0}^k c_k \right| = \left| \sum_{\substack{i+j > k \\ 0 \leq i, j \leq k}} a_i b_j \right| \leq \sum_{\substack{i+j > k \\ 0 \leq i, j \leq k}} |a_i b_j|.$$

K odhadu posledního výrazu nám poslouží jednoduchý trik: aby mohl být součet indexů větší než k , musí být alespoň jeden z nich větší než $k/2$. Jistě tedy výraz nezmenšíme, když do něj přidáme více členů, tj. vezmeme všechny jako v součinu a odebereme pouze ty, u kterých jsou oba nejvýše $k/2$.

$$\sum_{\substack{i+j > k \\ 0 \leq i, j \leq k}} |a_i b_j| \leq \sum_{0 \leq i, j \leq k} |a_i b_j| - \sum_{0 \leq i, j \leq k/2} |a_i b_j|.$$

Oba výrazy v rozdílu jsou ale částečné součty pro součin $S \cdot T$, mají tedy také stejnou limitu a proto jejich rozdíl jde k nule. \square

Jako obvykle si hned shrneme několik dalších jednoduchých tvrzení o řadách:

5.26 **5.28. Věta.** *Nechť $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada reálných nebo komplexních čísel.*

- (1) *Jestliže S konverguje, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.*
 (2) *Předpokládejme, že existuje limita podílů po sobě jdoucích členů řady a platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q.$$

Pak řada S konverguje absolutně při $|q| < 1$ a nekonverguje při $|q| > 1$. Při $|q| = 1$ může řada konvergovat ale nemusí.

- (3) *Jestliže existuje limita*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q,$$

pak při $q < 1$ řada konverguje, zatímco při $q > 1$ diverguje. Je-li $q = 1$, může konvergovat i divergovat.

DŮKAZ. (1) Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ neexistuje nebo je nenulová, existuje pro dostatečně malé číslo $\epsilon > 0$ nekonečně mnoho členů a_k s $|a_k| > \epsilon$. Zároveň tedy musí mezi nimi existovat nekonečně mnoho kladných nebo nekonečně mnoho záporných. Pak ovšem při přidání kteréhokoliv z nich do částečného součtu dostáváme rozdíl dvou po sobě jdoucích s_n a s_{n+1} o velikosti alespoň ϵ . Posloupnost částečných součtů proto nemůže být Cauchyovská a tedy ani konvergentní.

(2) Protože chceme dokazovat absolutní konvergenci, můžeme rovnou předpokládat $a_i > 0$. Důkaz jsme pro speciální hodnotu $q = 1/2$ provedli při dovození hodnoty e^x pomocí řady. Stejnou úvahou z existence limity podílů dovodíme pro dostatečně veliké N

$$a_{j+1} < q \cdot a_j < q^{-(j-N+1)} c_N.$$

To ale znamená, že částečné součty prvních s_n jsou shora ohraničeny součty

$$s_n < \sum_{j=0}^N a_j + c_N \sum_{j=0}^{n-N} \frac{1}{q^j}.$$

Je-li $0 < q < 1$, je množina všech částečných součtů shora ohraničená a proto je limitou naší řady její supremum.

Při hodnotě $q > 1$ použijeme obdobný postup, ale z existence limity q na začátku odvodíme

$$a_{j+1} < q \cdot a_j < q^{-(j-N+1)} c_N.$$

To ale znamená, že částečné součty prvních s_n jsou zdola ohraničeny součty

$$s_n > \sum_{j=0}^N a_j + c_N \sum_{j=0}^{n-N} \frac{1}{q^j}.$$

Při $q > 0$ tento výraz poroste nad všechny meze

(3) Důkaz je zde velmi podobný předchozímu případu. Z existence limity $q < 1$ vyplývá, že pro každé $q < r < 1$ existuje N takové, že pro všechny $n > N$ platí $\sqrt[n]{|a_n|} < r$. Umocněním pak

$$|a_n| < r^n$$

takže jsme opět v situaci, kdy srovnáváme s geometrickou řadou. Důkaz se proto dokončí stejně jako v případě podílového testu. \square

V důkazu druhého i třetího tvrzení jsme využívali slabšího tvrzení, než je existence limity. Potřebovali jsme pro studované posloupnosti nezáporných výrazů pouze tvrzení, že od určitého indexu už budou větší nebo menší než dané číslo.

K takovému odhadu nám ale postačí pro danou posloupnost b_n uvažovat s každým indexem n supremum hodnot členů s indexy vyššími. Tato suprema vždy existují a budou tvořit nerostoucí posloupnost. Její infimum pak označujeme jako *limes superior* dané posloupnosti a značíme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Výhodou je, že limes superior vždy existuje, můžeme proto předchozí výsledek (včetně důkazu) přeformulovat v silnější podobě:

Důsledek. *Nechť $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada reálných nebo komplexních čísel.*

(1) *Je-li*

$$q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

pak řada S konverguje absolutně při $q < 1$ a nekonverguje při $q > 1$. Při $q = 1$ může řada konvergovat ale nemusí.

(2) *Je-li*

$$q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

pak při $q < 1$ řada konverguje, zatímco při $q > 1$ diverguje. Je-li $q = 1$, může konvergovat i divergovat.

Příklad. *Ukažte, že tzv. harmonická řada*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

diverguje.

Řešení. Pro libovolné přirozené k je součet prvních 2^k členů řady větší než $k/2$:

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots,$$

součet členů od $2^l + 1$ do 2^{l+1} je totiž vždy větší než 2^l -krát (jejich počet) číslo $1/2^l$ (nejmenší z nich), což je dohromady $1/2$. \square

Příklad. *Rozhodněte o následujících řadách, jestli konvergují či divergují:*

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{100000}}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}$

Řešení.

(1) Budeme zkoumat konvergenci podílovým kritériem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2 > 1,$$

řada tedy diverguje.

(2) Odhadneme řadu ze spodu: víme, že pro libovolné přirozené n platí $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Pro posloupnost částečných součtů s_n zkoumané řady a posloupnost částečných součtů harmonické řady s'_n tedy platí:

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = s'_n.$$

A protože harmonická řada diverguje (viz předchozí příklad), diverguje i její posloupnost částečných součtů $\{s'_n\}_{n=1}^{\infty}$, tedy diverguje i posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, tedy diverguje i zadaná posloupnost.

(3) Diverguje, jedná se o násobek harmonické řady.

(4) Jedná se o geometrickou řadu s koeficientem $\frac{1}{1+i}$, ta bude konvergovat, bude-li absolutní hodnota koeficientu menší než 1. Víme, že

$$\left| \frac{1}{1+i} \right| = \left| \frac{1-i}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

řada tedy konverguje a umíme ji dokonce sečíst:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{1+i}{i} = 1-i.$$

5.27

□

5.29. Mocnné řady. Jestliže máme místo posloupnosti čísel a_n k dispozici posloupnost funkcí $f_n(x)$ se stejným definičním oborem A , můžeme bod po bodu použít definici řady a dostáváme pojem součtu *řady funkcí*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Mocnná řada je dána výrazem

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Řekneme, že $S(x)$ má *poloměr konvergence* $\rho \geq 0$, jestliže $S(x)$ konverguje pro každé x splňující $|x| < \rho$ a diverguje při $|x| > \rho$.

Věta. Necht $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocnná řada a existuje limita

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Pak je poloměr konvergence řady S roven $r = \rho^{-1}$.

Mocnná řada $S(x)$ je spojitá na celém svém intervalu konvergence (včetně krajních bodů, pokud v nich konverguje) a existuje také její derivace $S'(x)$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

DŮKAZ. Pro ověření konvergence řady můžeme pro každou pevnou hodnotu x použít odmocninový test z věty 5.28(3). Počítáme přitom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n x^n} = \rho x$$

a řada konverguje, resp. diverguje, jestliže je tato limita různá od 1.

Tvrzení o spojitosti a derivaci dokážeme později v obecnějším kontextu, viz 6.25–6.27. \square

Všimněme si také, že můžeme při důkazu konvergence použít silnější variantu odmocninového testu a tedy lze poloměr konvergence r pro každou mocninnou řadu přímo zadat formulí

$$r^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

5.28 **5.30. Příklad.** Prodíváme se na mocninné řady

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

První příklad je *geometrická řada*, kterou jsme se zabývali již dříve, a její součet je pro všechny x s $|x| < 1$

$$S(x) = \frac{1}{1-x},$$

zatímco $|x| > 1$ zaručuje divergenci. Pro $x = 1$ dostáváme také zjevně divergentní řadu $1 + 1 + 1 + \dots$ s nekonečným součtem, při $x = -1$ jde o řadu $1 - 1 + 1 - \dots$, jejíž částečné součty nemají limitu vůbec.

Věta 5.28(3) ukazuje, že poloměr konvergence druhého příkladu je také jedna, protože existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = x \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = x$$

Pro $x = -1$ tu dostaneme divergentní řadu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ (dokažte si jako cvičení!). Naopak, řada $T(-1) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$ konverguje. Vyplývá to z obecnějšího platného tvrzení:

O řadě $T = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ s reálnými členy řekneme, že je *alternující*, jestliže je znaménko dvou po sobě jdoucích členů vždy opačné. Pokud je navíc $|b_n|$ klesající posloupnost a pro řadu T platí nutná podmínka konvergence z 5.28, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, pak řada konverguje. Důkaz teď nebudeme provádět, vyplyne z obecnějších výsledků později, viz ??.

Příklad.7. Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} x^n$

Řešení.

(1)

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{2},$$

viz úloha ??). Daná mocniná řada tedy konverguje pro reálná $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, případně pro komplexní $|x| < \frac{1}{2}$. Všimněme si, že řada je divergentní pro $x = \frac{1}{2}$ (jde o harmonickou řadu) a naopak konverguje pro $x = -\frac{1}{2}$ (alternující harmonická řada). Rozhodnout o konvergenci pro libovoně x ležící v komplexní rovině na kružnici o poloměru $\frac{1}{2}$ je těžší otázka a přesahuje rámec našeho kurzu.

(2) Opět díky přechozímu příkladu víme, že

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[n]{\frac{1}{(1+i)^n}} \right| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1+i} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

je tedy poloměr konvergence dané mocninné řady $r = \sqrt{2}$.

□

5.29

5.31. Zvěřinec. S mocninnými řadami nám do našeho společenství přibyla spousta nových příkladů hladkých funkcí, tj. funkcí libovolněkrát diferencovatelných na celém svém definičním oboru. Pohrejme si chvíli s nejvýznamnějším a prvním naším příkladem, exponenciálou

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

Tato mocninná řada má poloměr konvergence nekonečný a dobře proto definuje hladkou funkci pro všechna komplexní čísla x . Její hodnoty jsou limitami hodnot (komplexních) polynomů s reálnými koeficienty a ze spojitosti tedy musí pro ni platit i obvyklé vztahy, které jsme pro reálné hodnoty proměnné x již odvodili. Zejména tedy platí

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y,$$

viz (5.5) a věta 5.27(3). Dosaďme si hodnoty $x = i \cdot t$, kde $i \in \mathbb{C}$ je imaginární jednotka, $t \in \mathbb{R}$ libovolné.

$$e^{it} = 1 + it - \frac{1}{2}t^2 - i\frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + i\frac{1}{5!}t^5 - \dots$$

a zjevně tedy je komplexně konjugované číslo $z = e^{it}$ číslo $\bar{z} = e^{-it}$. Proto

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^0 = 1$$

a všechny hodnoty $z = e^{it}$ proto leží na jednotkové kružnici v komplexní rovině.

Reálné a imaginární složky bodů na jednotkové kružnici přitom bývají popisovány pomocí *goniometrických funkcí* $\cos \theta$ a $\sin \theta$, kde θ je patřičný úhel. Derivací parametrického popisu bodů kružnice,

$$t \mapsto e^{it}$$

dostáváme vektory „rychlostí“, které budou dány výrazem (lze např. zderivovat skutečně zvláště reálnou a imaginární složku a sečíst výsledky)

$$t \mapsto (e^{it})' = i \cdot e^{it}$$

a jejich velikost proto také bude pořád jednotková. Odtud lze tušit, že celou kružnici oběhneme po dosažení hodnoty parametru rovného délce oblouku, tj. 2π (i když ke skutečnému ověření této skutečnosti budeme potřebovat integrální počet). Takto bývá *Ludolfovo číslo* π také definováno. Můžeme se ale nyní aspoň částečně ujistit pohledem na nejmenší kladné kořeny reálné části částečných součtů naší řady, tj.

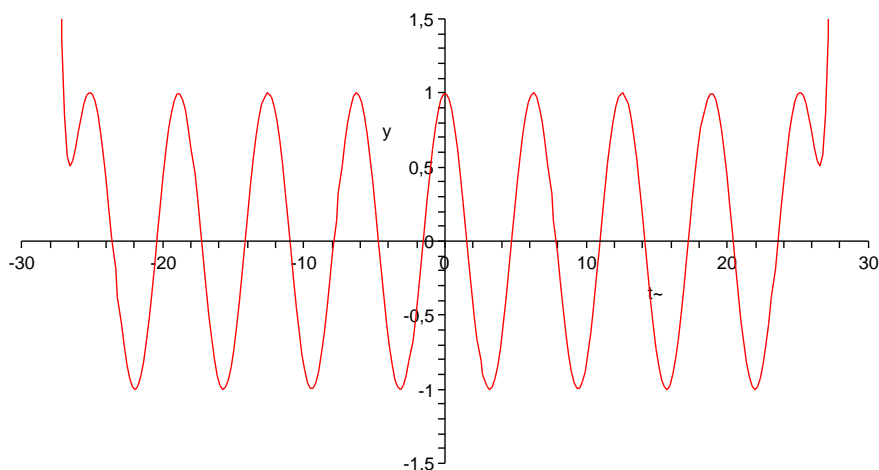
příslušných polynomů. Již při řádu deset nám vyjde číslo π přesně na 5 desetinných míst.

Dostali jsem tedy přímou definici goniometrických funkcí pomocí mocninných řad:

$$\boxed{\text{e5.15}} \quad (5.15) \quad \cos t = \operatorname{re} e^{it} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}t^{2k} + \dots$$

$$\boxed{\text{e5.16}} \quad (5.16) \quad \sin t = \operatorname{im} e^{it} = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}t^{2k+1} + \dots$$

Ilustraci konvergence řady pro funkci \cos je vidět na obrázku. Jde o graf příslušného polynomu stupně 68. Při postupném vykreslení částečných součtů je vidět, že aproximace v okolí nuly je velice dobrá a prakticky beze změn. S rostoucím řádem se pak zlepšuje i dále od počátku.



Přímo z definice vyplývá známý vztah

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

a také z derivace $(e^{it})' = i e^{it}$ vidíme, že

$$(\sin t)' = \cos t, \quad (\cos t)' = -\sin t.$$

Tentýž výsledek lze samozřejmě ověřit přímo derivací našich řad člen po členu.

Předpokládejme, že t_0 je nejmenší kladné číslo, pro které je $e^{-it_0} = -e^{it_0}$, tj. první kladný nulový bod funkce $\cos t$. Podle naší definice Ludolfova čísla je $t_0 = \frac{1}{2}\pi$. Pak $e^{-i2t_0} = (e^{-it_0})^2 = e^{i2t_0}$ a jde proto o nulový bod funkce $\sin t$. Samozřejmě pak platí pro libovolné t

$$e^{i(4kt_0+t)} = (e^{it_0})^{4k} \cdot e^{it} = 1 \cdot e^{it}.$$

Jsou tedy obě funkce goniometrické funkce *periodické* s periodou 2π . Z našich definic je přitom vidět, že je to nejmenší jejich perioda.

Nyní můžeme snadno odvodit všechny obvyklé vztahy mezi goniometrickými funkcemi. Uvedeme na ukázkou několik z nich. Nejprve si všimněme, že definice

vlastně říká

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).$$

Součin těchto funkcí jde tedy vyjádřit jako

$$\sin t \cos t = \frac{1}{4i}(e^{it} - e^{-it})(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{4i}(e^{i2t} - e^{-i2t}) = \frac{1}{2} \sin 2t.$$

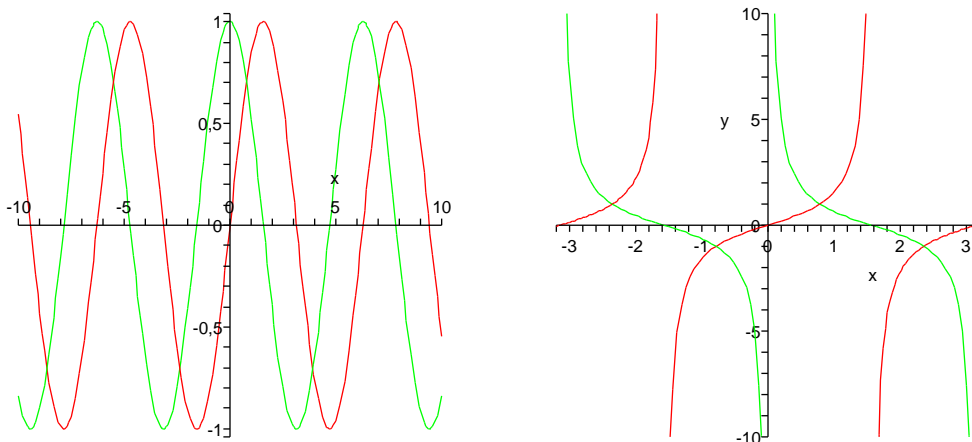
Dále můžeme využít naši znalost derivací:

$$\cos 2t = \left(\frac{1}{2} \sin 2t\right)' = (\sin t \cos t)' = \cos^2 t - \sin^2 t.$$

Vlastnosti dalších goniometrických funkcí

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \operatorname{cotg} t = (\operatorname{tg} t)^{-1}$$

se snadno odvodí z jejich definice a pravidel pro derivování. Grafy funkcí sinus, cosinus, tangens a cotangens jsou na obrázcích (postupně červený a zelený vlevo, červený a zelený vpravo):



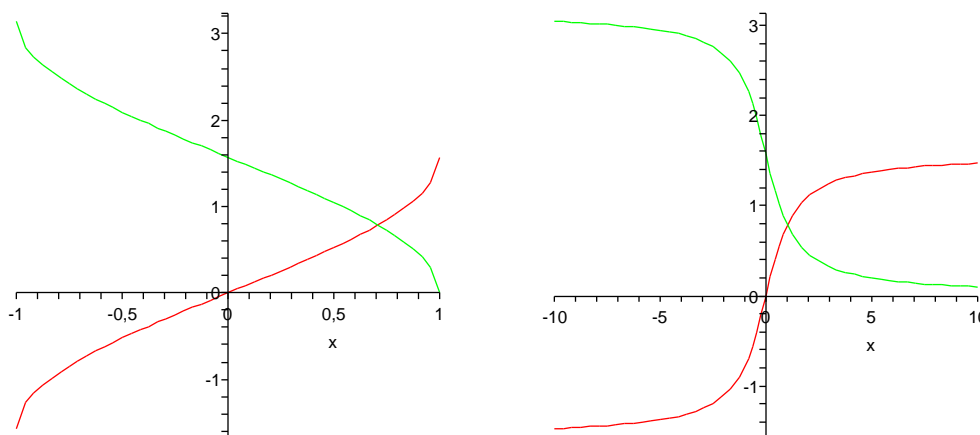
Cyklometrické funkce jsou inverzní ke goniometrickým. Protože jsou goniometrické funkce všechny periodické s periodou 2π , jsou jejich inverze definované vždy jen v rámci jedné periody a to ještě jen na části, kdy je daná funkce buď rostoucí nebo klesající. Jsou to funkce

$$\arcsin = \sin^{-1}$$

s definičním oborem $[-1, 1]$ a oborem hodnot $[-\pi/2, \pi/2]$. Dále

$$\arccos = \cos^{-1}$$

s definičním oborem $[-1, 1]$ a oborem hodnot $[0, \pi]$, viz obrázek vlevo.



Zbývají ještě funkce (zobrazené na obrázku vpravo)

$$\operatorname{arctg} = \operatorname{tg}^{-1}$$

s definičním oborem $[-\infty, \infty]$ a oborem hodnot $[-\pi/2, \pi/2]$ a konečně

$$\operatorname{arccotg} = \operatorname{cotg}^{-1}$$

s definičním oborem $[-\infty, \infty]$ a oborem hodnot $[0, \pi]$.

Velice často se také využívají tzv. *hyperbolické funkce*

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Název naznačuje, že by funkce mohly mít něco společného s hyperbolou. Přímý výpočet dává (druhé mocniny se v roznásobených dvojčlenech všechny odečtou a zůstanou smíšené členy)

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 2 \frac{1}{2}(e^x e^{-x}) = 1.$$

Body $[\cosh t, \sinh t]$ tedy skutečně parametricky popisují hyperbolu v rovině. Pro hyperbolické funkce lze snadno odvodit podobné identity jako pro funkce goniometrické. Mimo jiné je přímo z definice snadno vidět

$$\cosh x = \cos(ix), \quad i \sinh x = \sin(ix)$$

(ověřte si jako cvičení).

Příklad. Sečtěte:

$$2 + 1 + \frac{2}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{2}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{2}{6!} + \dots$$

Řešení. Porovnáme tvar součtu s mocninným rozvojem funkcí \sinh a \cosh a dostáváme výsledek

$$\sinh(1) + 2 \cosh(1)$$

□

5.30

5.32. Poznámky. Mocninné řady můžeme zcela stejně definovat takto:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

kde x_0 je libovolné pevně zvolené reálné číslo. Všechny naše předchozí úvahy jsou pořád platné, jen je třeba mít na paměti, že se vztahují k bodu x_0 . Zejména tedy taková řada konverguje na intervalu $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, kde ρ je její poloměr konvergence. Říkáme, že S je *mocninná řada se středem v x_0* .

Dále platí, že má-li mocninná řada $y = T(x)$ hodnoty v intervalu, kde je dobře definována řada $S(y)$, potom i hodnoty funkce $S \circ T$ jsou vyjádřeny mocninnou řadou, kterou dostaneme formálním dosazením $y = T(x)$ za y do $S(y)$.

Zejména lze takto počítat členy mocninných řad zadávajících inverzní funkce. Nebudeme zde uvádět seznam formulí, snadno se k nim dostaneme například v Maplu procedurou „series“.

Diferenciální a integrální počet

*zvěřinec teď máme, ale co s ním?
– naučíme se s ním zacházet...*

V minulé kapitole jsme si postupně hráli buď s mimořádně velikými třídami funkcí — všechny spojité, všechny diferencovatelné apod. — nebo jen s konkrétními funkcemi — např. exponenciální, goniometrické, polynomy atd. Měli jsme ale přitom jen minimum nástrojů a vše jsme počítali tak říkajíc na koleně. Teď dáme dohromady několik výsledků, které umožní snáze pracovat s funkcemi při modelování reálných problémů.

1. Derivování

Začneme několika jednoduchými výsledky o derivování funkcí.

6.1 **6.1. Věta.** *Nechť funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu $[a, b]$ a diferencovatelná uvnitř tohoto intervalu. Jestliže platí $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.*

DŮKAZ. Protože je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu (tj. kompaktní množině), má na něm maximum a minimum. Pokud by maximum i minimum mělo stejnou hodnotu $f(a) = f(b)$, pak by funkce f byla konstantní a tedy i její derivace by byla nulová ve všech bodech intervalu (a, b) . Předpokládejme tedy, že buď maximum nebo minimum je jiné a nechť nastává jedno z nich ve vnitřním bodě c . Pak ovšem není možné, aby v c bylo $f'(c) \neq 0$, protože to by v tomto bodě byla funkce f buď rostoucí nebo klesající (viz 5.21) a jistě by tedy v okolí bodu c nabývala větších i menších hodnot, než je $f(c)$. \square

Právě dokázanému tvrzení se říká *Rolleova věta*. Z ní snadno vyplývá následující důsledek, známý jako *věta o střední hodnotě*.

6.2 **6.2. Věta.** *Nechť funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu $[a, b]$ a diferencovatelná uvnitř tohoto intervalu. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

DŮKAZ. Důkaz je prostým zápisem geometrického významu tvrzení: k sečně mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ existuje tečna, která je s ní rovnoběžná (namalujte si obrázek). Rovnice naší sečny je

$$y = g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Rozdíl $h(x) = f(x) - g(x)$ udává vzdálenost grafu od sečny (v hodnotách y). Jistě platí $h(a) = h(b)$ a

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Podle předchozí věty existuje bod c , ve kterém je $h'(c) = 0$. \square

Větu o střední hodnotě můžeme také přepsat ve tvaru:

e6.1 (6.1)
$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a).$$

V případě parametricky zadané křivky v rovině, tj. dvojice funkcí $y = f(t)$, $x = g(t)$, je stejný výsledek o existenci rovnoběžné tečny k sečně krajními body popsán takto:

Důsledek. *Nechť funkce $y = f(t)$ a $x = g(t)$ jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a diferencovatelné uvnitř tohoto intervalu a $g'(t) \neq 0$ pro všechny $t \in (a, b)$. Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že platí*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

DŮKAZ. Opět spoléháme na použití Rolleovy věty. Položíme proto

$$h(t) = (f(b) - f(a))g(t) - (g(b) - g(a))f(t).$$

Nyní $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$, $h(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$, takže existuje $c \in (a, b)$ takový, že $h'(c) = 0$. Protože je $g'(c) \neq 0$, dostáváme právě požadovaný vztah. \square

Podobná úvaha jako v posledním tvrzení vede k mimořádně užitečnému nástroji pro počítání limit funkcí. Je znám jako *L'Hospitalovo pravidlo*:

6.3 **6.3. Věta.** *Předpokládejme, že f a g jsou funkce diferencovatelné v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, ne však nutně v bodě x_0 samotném, a necht existují limity*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pak existuje i limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a jsou si rovny.

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že v x_0 mají funkce f a g nulovou hodnotu.

Výsledek je opět jednoduše představitelný pomocí obrázku. Uvažujme body $[g(x), f(x)] \in \mathbb{R}^2$ parametrizované proměnnou x . Podíl hodnot pak odpovídá směrnici sečny mezi body $[0, 0]$ a $[f(x), g(x)]$. Zároveň víme, že podíl derivací odpovídá směrnici tečny v příslušném bodě. Z existence limity směrnic tečen tedy chceme dovodit existenci limity směrnic sečen.

Technicky lze využít věty o střední hodnotě v parametrickém tvaru. Předně si uvědomme, že v tvrzení věty implicitně předpokládáme existenci výrazu $f'(x)/g'(x)$ na nějakém okolí x_0 , zejména tedy pro dostatečně blízké body c k x_0 bude $g'(c) \neq 0$.¹

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

kde c_x je číslo mezi x_0 a x . Nyní si všimněme, že z existence limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

vyplývá, že stejnou hodnotu bude mít i limita libovolné posloupnosti vzniklé dosažením hodnot $x = x_n$ jdoucích k x_0 do $f'(x)/g'(x)$. Zejména tedy můžeme dosadit jakoukoliv posloupnost c_{x_n} pro $x_n \rightarrow x_0$ a proto bude existovat i limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

a poslední dvě limity zjevně budou mít stejnou hodnotu. Dokázali jsme tedy, že naše hledaná limita existuje a má také stejnou hodnotu. \square

6.4

6.4. Důsledky. Jednoduše lze rozšířit L'Hospitalovo pravidlo i pro limity v nevlastních bodech $\pm\infty$ a v případě nevlastních hodnot limit. Je-li, např.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0,$$

potom je $\lim_{x \rightarrow 0+} f(1/x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow 0+} g(1/x) = 0$. Zároveň z existence limity podílu derivací v nekonečnu dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(f(1/x))'}{(g(1/x))'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(1/x)(-1/x^2)}{g'(1/x)(-1/x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Použitím předchozí věty tedy dostáváme, že v tomto případě bude existovat i limita podílu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ještě jednodušší je postup při výpočtu limity v případě, kdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Stačí totiž psát

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1/g(x)}{1/f(x)},$$

což je již případ pro použití L'Hospitalova pravidla z předchozí věty. Lze ale i dokázat, že L'Hospitalovo pravidlo platí ve stejné formě pro nevlastní limity:

Věta. *Nechť f a g jsou funkce diferencovatelné v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, ne však nutně v bodě x_0 samotném, a necht' existují limity $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$. Jestliže existuje limita*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

¹Pro samu existenci limity v obecném smyslu to vždy nutné není, nicméně pro tvrzení L'Hospitalovy věty je to potřebné. Podrobnou diskusi je možné najít (vygooglovat) v populárním článku "R. P. Boas, Counterexamples to L'Hôpital's Rule, The American Mathematical Monthly, October 1986, Volume 93, Number 8, pp. 644–645."

pak existuje i limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a jsou si rovny.

DŮKAZ. Opět lze vyjít z věty o střední hodnotě. Základem je vyjádření podílu tak, abychom dostali do hry derivaci:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{f(x) - f(y)} \cdot \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{g(x) - g(y)}{g(x)}$$

kde y volíme nějaký pevný ze zvoleného okolí x_0 a x necháme blížit k x_0 . Protože jsou limity f i g v x_0 nekonečné, můžeme jistě předpokládat, že rozdíly hodnot v x a y jsou u obou funkcí při pevném y nenulové.

Pomocí věty o střední hodnotě můžeme nyní nahradit prostřední zlomek podílem derivací ve vhodném bodě c mezi x a y a výraz ve zkoumané limitě dostává tvar

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

kde c závisí na x i y . Při pevném y a x jdoucím k x_0 jde první zlomek zjevně k jedničce. Když zároveň budeme y přibližovat k x_0 , bude se nám druhý zlomek libovolně přesně blížit k limitní hodnotě podílu derivací. \square

6.4a

6.5. Příklady užití. Vhodnými úpravami sledovaných výrazů lze využít L'Hospitalova pravidla také na výrazy typu $\infty - \infty$, 1^∞ , $0 \cdot \infty$ apod. Zpravidla jde o prosté přepsání výrazů nebo o využití nějaké hladké funkce, např. exponenciální. Uvedme alespoň dva příklady hned:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{2x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{2x \sin 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{2 \sin 2x + 4x \cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 2x}{4 \cos 2x + 4 \cos 2x - 8x \sin 2x} = 0, \end{aligned}$$

přičemž získané tvrzení je třeba číst od konce. Tj. z existence poslední limity (podíl druhých derivací) vyplývá existence limity podílů prvních derivací a z toho plyne existence i hodnota původní limity.

Druhý příklad nám ukáže souvislost aritmetického a geometrického průměru z n hodnot. *Aritmetický průměr*

$$M^1(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

je speciálním případem tzv. *mocninného průměru stupně r* :

$$M^r(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1^r + \dots + x_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Speciální hodnota M^{-1} se nazývá *harmonický průměr*. Spočteme si nyní limitní hodnotu M^r pro r jdoucí k nule. Za tímto účelem spočteme limitu pomocí L'Hospitalova

pravidla (jde o výraz $0/0$):

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \ln(M^r(x_1, \dots, x_n)) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{n}(x_1^r + \dots + x_n^r)\right)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{x_1^r \ln x_1 + \dots + x_n^r \ln x_n}{n}}{\frac{x_1^r + \dots + x_n^r}{n}} \\ &= \frac{\ln x_1 + \dots + \ln x_n}{n} = \ln \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}. \end{aligned}$$

Odtud tedy je přímo vidět, že

$$\lim_{r \rightarrow 0} M^r(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n},$$

což je hodnota známá pod názvem *geometrický průměr*.

6.5

6.6. Význam druhé derivace. Již jsme viděli, že první derivace funkce je jejím lineárním přiblížením v okolí daného bodu a že ze znaménka nenulové derivace vyplývá, že funkce je v bodě x_0 rostoucí nebo klesající. Body, ve kterých je první derivace nulová se nazývají *kritické body* dané funkce.

Je-li x_0 kritický bod funkce f , může být chování funkce f v okolí bodu x_0 jakékoliv. Vidíme to již z chování funkce $f(x) = x^n$ v okolí nuly pro libovolné n . Pro lichá $n > 0$ bude $f(x)$ rostoucí, pro sudá n naopak bude nalevo klesající a napravo rostoucí, dosáhne tedy v bodě x_0 své minimální hodnoty mezi body z (dostatečně malého) okolí bodu $x_0 = 0$.

Tentýž pohled můžeme aplikovat na funkci f' . Jestliže totiž je druhá derivace nenulová, určuje její znaménko chování derivace první. Proto v kritickém bodě x_0 bude derivace $f'(x)$ rostoucí při kladné druhé derivaci a klesající při záporné. Jestliže je ale rostoucí, znamená to, že nutně bude záporná nalevo od kritického bodu a kladná napravo od něj. Funkce f v takovém případě je klesající nalevo od kritického bodu a rostoucí napravo od něj. To znamená, že má funkce f v bodě x_0 minimum ze všech hodnot z nějakého malého okolí bodu x_0 .

Naopak, je-li druhá derivace záporná v x_0 , je první derivace klesající, tedy záporná vlevo od x_0 a kladná vpravo. Funkce f bude tedy mít v bodě x_0 maximální hodnotu ze všech hodnot na nějakém okolí.

Funkce diferencovatelná na (a, b) a spojitá na $[a, b]$ má jistě na tomto intervalu absolutní maximum a minimum. Může ho dosáhnout pouze buď na hranici nebo v bodě s nulovou derivací, tj. v kritickém bodě. Pro diskusi extrémů nám tedy mohou stačit kritické body a druhé derivace pomůžou určit typy extrémů, pokud jsou nenulové. Pro přesnější diskusi ale potřebujeme lepší než lineární aproximace zkoumaných funkcí. Proto se nejprve budeme věnovat úvahám v tomto směru a teprve poté se vrátíme k diskusi průběhu funkcí.

6.6

6.7. Taylorův rozvoj. Jako překvapivě jednoduché využití Rolleovy věty teď odvodíme mimořádně důležitý výsledek. Říkává se mu *Taylorův rozvoj se zbytkem*.

Intuitivně se k němu můžeme dostat obrácením našich úvah kolem mocninných řad. Máme-li totiž mocninnou řadu

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

a derivujeme-li ji opakovaně, dostáváme mocninné řady (víme, že je možné takový výraz derivovat člen po členu, i když jsme to ještě nedokázali)

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}.$$

V bodě $x = a$ je tedy $S^{(k)}(a) = k!a_k$. Můžeme tedy naopak číst poslední tvrzení jako rovnici pro a_k a původní řadu přepsat jako

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S^{(k)}(a)(x-a)^n.$$

Jestliže místo mocninné řady máme nějakou dostatečně hladkou funkci $f(x)$, je tedy na místě se ptát, zda ji můžeme vyjádřit jako mocninnou řadu a jak rychle budou konvergovat částečné součty (tj. přiblížení funkce f polynomy). Naše úvaha právě naznačila, že můžeme očekávat v okolí bodu a dobrou aproximaci polynomy, tzv. *Taylorovými polynomy k -tého řádu*:

$$P_k f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k.$$

Přesná odpověď vypadá podobně jako věta o střední hodnotě, jen pracujeme s vyššími stupni polynomů (tzv. *Taylorův rozvoj se zbytkem*):

Věta. *Nechť je $f(x)$ funkce k -krát diferencovatelná na intervalu (a, b) a spojitá na $[a, b]$. Pak pro každé $x \in (a, b)$ existuje číslo $c \in (a, x)$ takové, že*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(a)(x-a)^{k-1} + \frac{1}{k!}f^{(k)}(c)(x-a)^k \\ &= P_{k-1}f(x) + \frac{1}{k!}f^{(k)}(c)(x-a)^k. \end{aligned}$$

DŮKAZ. Definujme zbytek R (tj. chybu při aproximaci pro pevně zvolené x) takto

$$f(x) = P_{k-1}f(x) + R$$

tj. $R = \frac{1}{k!}r(x-a)^k$ pro vhodné číslo r (závislé na x). Nyní uvažujme funkci $F(\xi)$ definovanou

$$F(\xi) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}f^{(j)}(\xi)(x-\xi)^j + \frac{1}{k!}r(x-\xi)^k$$

Její derivace je

$$\begin{aligned} F'(\xi) &= f'(\xi) + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{j!}f^{(j+1)}(\xi)(x-\xi)^j - \frac{1}{(j-1)!}f^{(j)}(\xi)(x-\xi)^{j-1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{(k-1)!}r(x-\xi)^{k-1} \\ &= \frac{1}{(k-1)!}f^{(k)}(\xi)(x-\xi)^{k-1} - \frac{1}{(k-1)!}r(x-\xi)^{k-1} \\ &= \frac{1}{(k-1)!}(x-\xi)^{k-1}(f^{(k)}(\xi) - r), \end{aligned}$$

protože výrazy v sumě se postupně vzájemně ruší. Nyní si stačí všimnout, že $F(a) = F(x) = f(x)$ (připomeňme, že x je pevně zvolená ale pevná hodnota). Proto podle Rolleovy věty existuje číslo c , $a < c < x$, takové, že $F'(c) = 0$. To ale je právě požadovaný vztah. \square

Pokud tedy umíme odhadnout velikost k -té derivace na celém intervalu, dostaneme přímo odhady chyb. Speciálním případem je samozřejmě věta o střední hodnotě coby aproximace řádu nula, viz (6.1). Dobrým příkladem jsou tady třeba goniometrické funkce. Iterováním derivace funkce $\sin x$ dostaneme vždy buď sinus nebo cosinus s nějakým znaménkem, ale v absolutní hodnotě budou hodnoty vždy nejvýše jedna. Dostáváme tedy přímý odhad rychlosti konvergence mocninné řady

$$|\sin x - (P_k \sin)(x)| \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Vidíme tedy, že pro x výrazně menší než k bude chyba malá, pro x srovnatelné s k nebo větší ale bude obrovská.

Příklad. Určete Taylorovy rozvoje T_x^k (k -tého řádu v bodě x) z následujících funkcí:

- (1) T_0^3 z funkce $\sin x$,
- (2) T_1^3 z funkce $\frac{e^x}{x}$.

Řešení.

- (1) Spočítáme hodnoty první až třetí derivace funkce $f = \sin$ v bodě 0: $f'(0) = \cos(0) = 1$, $f^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$, dále $f(0) = 0$. Taylorův rozvoj 3-tího řádu funkce $\sin(x)$ v bodě 0 je tedy

$$T_0^3(\sin(x)) = x - \frac{1}{6}x^3.$$

- (2) Opět $f(1) = e$,

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} (1) = 0 \\ f^{(2)} &= \frac{e^x}{x} - 2\frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} (1) = e \\ f^{(3)} &= \frac{e^x}{x} - 3\frac{e^x}{x^2} + \frac{6e^x}{x^3} - \frac{6e^x}{x^4} (1) = -2e \end{aligned}$$

Dostáváme tedy Taylorův rozvoj třetího řádu funkce $\frac{e^x}{x}$ v bodě 1:

$$T_1^3\left(\frac{e^x}{x}\right) = e + \frac{e}{2}(x-1)^2 - \frac{e}{3}(x-1)^3 = e\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{5}{6}\right).$$

□

Příklad. Určete Taylorův polynom T_0^6 funkce \sin a pomocí věty 6.6 odhadněte chybu polynomu v bodě $\pi/4$.

Řešení. Podobně jako v předchozím příkladu určíme

$$T_0^6(\sin(x)) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

Dle věty 6.7 pak odhadneme velikost zbytku (chyby) R . Podle věty existuje $c \in (0, \frac{\pi}{4})$ takové, že

$$R(\pi/4) = \left| \frac{-\cos(c)\pi^7}{7!4^7} \right| < \frac{1}{7!} \doteq 0,0002.$$

□

6.7

6.8. Analytické a hladké funkce. Je-li f v bodě a hladká, pak můžeme napsat formálně mocninnou řadu

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n.$$

Taylorova věta nám říká, že pokud tato mocninná řada má nenulový poloměr konvergence, pak je $S(x) = f(x)$ na příslušném intervalu. Takovým funkcím říkáme *analytické funkce* v bodě a . Funkce je analytická na intervalu, je-li analytická v každém jeho bodě.

Ne všechny hladké funkce jsou ale analytické. Ve skutečnosti lze dokázat, že pro každou posloupnost čísel a_n umíme najít hladkou funkci, jejíž derivace řádů k budou tato čísla a_k .

Abychom si alespoň představili podstatu problému, ukážeme si funkci, která má v nule všechny derivace nulové, je však všude kromě tohoto bodu nenulová:

$$f(x) = e^{-1/x^2}.$$

Je dobře definovaná hladká funkce pro všechny body $x \neq 0$. Derivací dostaneme $f'(x) = f(x) \cdot 2x^{-3}$ a iterovanou derivací dostaneme součet konečně mnoha členů tvaru $C \cdot f(x) \cdot x^{-k}$, kde C je nějaké celé číslo a k je přirozené číslo. Pro každý výraz $P(x)e^{-1/x^2}$, kde P je nějaký polynom, lze opakovanou aplikací L'Hospitalova pravidla snadno zjistit, že jde limitně k nule, při x jdoucím k nule. Dodefinujeme-li tedy hodnoty všech derivací naší funkce v nule rovnicí

$$f^{(k)} = 0,$$

získáme hladkou funkci na celém \mathbb{R} . Je vidět, že skutečně jde o nenulovou funkci všude mimo $x = 0$, všechny její derivace v tomto bodě jsou ale nulové. Samozřejmě to tedy není analytická funkce v bodě $x_0 = 0$.

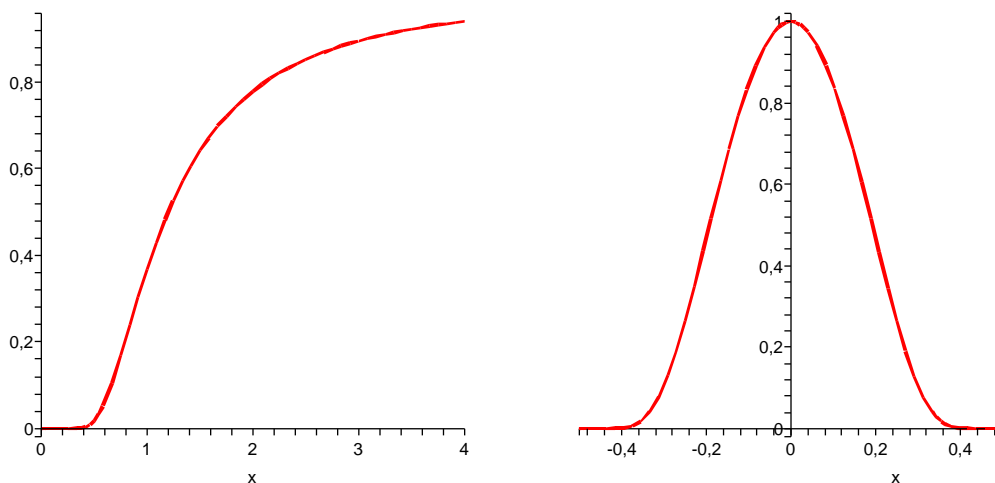
Snadno můžeme naši funkci modifikovat takto:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{je-li } x > 0 \end{cases}.$$

Opět jde o hladkou funkci na celém \mathbb{R} . Další úpravou můžeme získat funkci nenulovou ve všech vnitřních bodech intervalu $[-a, a]$, $a > 0$ a nulovou jinde:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } |x| \geq a \\ e^{\frac{1}{x^2-a^2} + \frac{1}{a^2}} & \text{je-li } |x| < a. \end{cases}$$

Tato funkce je opět hladká na celém \mathbb{R} . Poslední dvě funkce jsou na obrázcích, vpravo je použit parametr $a = 1$.



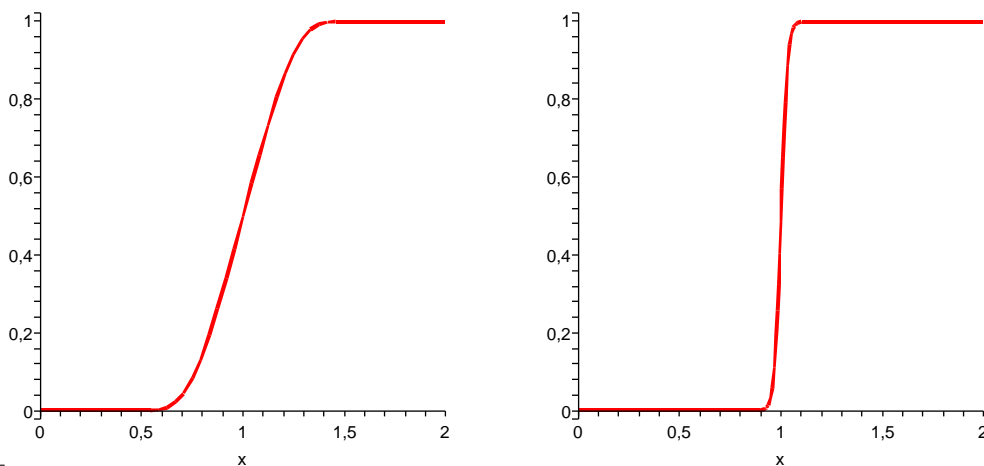
Nakonec ještě ukážeme, jak lze dostat hladké analogie Heavisideových funkcí. Pro dvě pevně zvolená reálná čísla $a < b$ definujeme funkci $f(x)$ s použitím výše definované funkce g takto:

$$f(x) = \frac{g(x-a)}{g(x-a) + g(b-x)}.$$

Zjevně je pro každé $x \in \mathbb{R}$ jmenovatel zlomku kladný (pro každý z intervalů určených čísly a a b je totiž alespoň jeden ze sčítanců jmenovatele nenulový a tedy je celý jmenovatel kladný). Dostáváme z našeho definičního vztahu proto hladkou funkci $f(x)$ na celém \mathbb{R} . Při $x \leq a$ je přitom jmenovatel zlomku přímo dle definice funkce g nulový, při $x \geq b$ je čítec i jmenovatel stejný. Na dalších dvou obrázcích jsou právě funkce $f(x)$ a to s parametry $a = 1 - \alpha$, $b = 1 + \alpha$, kde nalevo je $\alpha = 0.8$ a napravo $\alpha = 0.4$.

alpha = .8

alpha = .40000



6.8

6.9. Popis lokálního chování funkcí. Už jsme se setkali s významem druhé derivace při popisu kritických bodů. Teď zobecníme diskusi kritických bodů pro

všechny řády. Budeme v dalším uvažovat funkce s dostatečným počtem spojitých derivací, aniž bychom tento předpoklad přímo uváděli.

Řekneme, že bod a v definičním oboru funkce f je *kritický bod řádu k* , jestliže platí

$$f'(a) = \dots = f^{(k)}(a) = 0, \quad f^{(k+1)}(a) \neq 0.$$

Předpokládejme, že $f^{(k+1)}(a) > 0$. Pak je tato spojitá derivace kladná i na jistém okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a . Taylorův rozvoj se zbytkem nám v takovém případě dává pro všechna x z $\mathcal{O}(a)$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c)(x-a)^{k+1}.$$

Je proto změna hodnot $f(x)$ v okolí bodu a dána chováním funkce $(x-a)^{k+1}$. Je-li přitom $k+1$ sudé číslo, jsou nutně hodnoty $f(x)$ v takovém okolí větší než hodnota $f(a)$ a zjevně je proto bod a bodem lokálního minima. Pokud je ale k sudé číslo, pak jsou hodnoty vlevo menší a vpravo větší než $f(a)$, extrém tedy ani lokálně nenastává. Zato si můžeme všimnout, že graf funkce $f(x)$ protíná svoji tečnu $y = f(a)$ bodem $[a, f(a)]$.

Naopak, je-li $f^{(k+1)}(a) < 0$, pak ze stejného důvodu jde o lokální maximum při lichém k a extrém opět nenastává pro k sudé.

Říkáme, že funkce f je v bodě a *konkávní* v bodě a , jestliže se její graf nachází v jistém okolí celý pod tečnou v bodě $[a, f(a)]$, tj.

$$f(x) < f(a) + f'(a)(x-a).$$

Říkáme, že funkce f je *konvexní* v bodě a , jestliže naopak je její graf nad tečnou v bodě a , tj.

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Funkce je konvexní nebo konkávní na intervalu, jestliže má tuto vlastnost v každém jeho bodě.

Z Taylorova rozvoje druhého řádu se zbytkem dostáváme

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(c)(x-a)^2.$$

Proto je zjevně funkce konvexní, kdykoliv je $f''(a) > 0$, a je konkávní, kdykoliv $f''(a) < 0$. Pokud je druhá derivace nulová, můžeme použít derivace vyšších řádů.

Bod a nazýváme *inflexní bod* funkce f , jestliže graf funkce f přechází z jedné strany tečny na druhou. Napišme si Taylorův rozvoj třetího řádu se zbytkem:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6} f'''(c)(x-a)^3.$$

Je-li a nulový bod druhé derivace takový, že $f'''(a) \neq 0$, pak je třetí derivace nenulová i na nějakém okolí a jde proto zjevně o inflexní bod. Znaménko třetí derivace nám v takovém případě určuje, zda graf funkce přechází tečnu zdola nahoru nebo naopak.

Poslední dobrou pomůckou pro náčrtek grafu funkce je zjištění *asymptot*, tj. přímek, ke kterým se blíží hodnoty funkce f . Asymptotou v nevlastním bodě ∞ je proto taková přímka $y = ax + b$, pro kterou je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Pokud asymptota existuje, platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$$

a tedy existuje i limita

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a.$$

Pokud ovšem existují poslední dvě limity, existuje i limita z definice asymptoty, jde proto i o podmínky dostatečné. Obdobně se definuje a počítá asymptota i v nevlastním bodě $-\infty$.

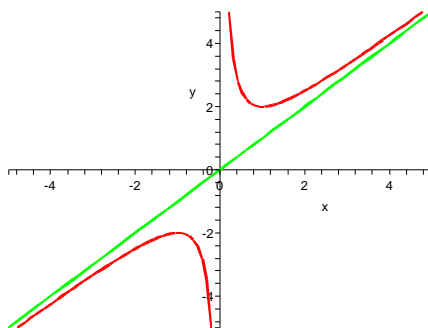
Tímto způsobem dohledáme všechny potenciální přímky splňující vlastnosti asymptot s konečnou reálnou směrnicí. Zbývají nám případné přímky kolmé na osu x : Asymptoty v bodech $a \in \mathbb{R}$ jsou přímky $x = a$ takové, že funkce f má v bodě a alespoň jednu nekonečnou jednostrannou limitu.

Např. racionální funkce lomené mají v nulových bodech jmenovatele, které nejsou nulovými body čitatele, asymptotu.

Spočtěme aspoň jeden jednoduchý příklad: Funkce $f(x) = x + \frac{1}{x}$ má za asymptoty přímky $y = x$ a $x = 0$ (ověřte podrobně!). Derivaci obdržíme

$$f'(x) = 1 - x^{-2}, \quad f''(x) = 2x^{-3}.$$

Funkce $f'(x)$ má dva nulové body ± 1 . V bodě $x = 1$ má funkce lokální minimum, v bodě $x = -1$ lokální maximum. Druhá derivace nemá nulové body v celém definičním oboru $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, f tedy nemá žádný inflexní bod.



Příklad.1. Do rovnostranného trojúhelníka o straně a je vepsán pravoúhelník (jedna jeho strana leží na straně trojúhelníka, zbylé dva vrcholy leží na zbylých stranách trojúhelníka). Jaký může mít maximálně obsah?

Řešení. Vepsaný pravoúhelník má strany x , $\sqrt{3}/2(a-x)$, tedy obsah $\sqrt{3}/2(a-x)x$. Maximum pro $x = a/2$, tedy maximální obsah je $(\sqrt{3}/8)a^2$. \square

Příklad. V devět hodin ráno vylezl starý vlk z nory N a v rámci ranní rozcvičky začal běhat proti směru hodinových ručiček po kružnici o poloměru 1 km, kolem svého oblíbeného pařezu P a to rovnoměrnou rychlostí 4 km/h. Ve stejnou dobu vyrazila Karkulka z domu D k babičce sídlící v chaloupce C rychlostí 4 km/h (po přímce). Kdy si budou nejbliž a jaká tato vzdálenost bude? Souřadnice (v kilometrech): $N = [2, 3]$, $P = [3, 3]$, $D = [0, 0]$, $C = [5, 5]$.

Řešení. Vlk se pohybuje po jednotkové kružnici, jeho úhlová rychlost je tedy stejná jako jeho absolutní rychlost a jeho dráhu můžeme v závislosti na čase popsat následujícími parametrickými rovnicemi:

$$x(t) = 2 - \cos(4t), \quad y(t) = 2 - \sin(4t),$$

Karkulka se pak pohybuje po dráze

$$x(t) = 2\sqrt{2}t, \quad y(t) = 2\sqrt{2}t.$$

Nalezneme extrémy (čtverce) vzdálenosti ρ jejich drah v čase:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= (2 - \cos(4t) - 2\sqrt{2}t)^2 + (2 - \sin(4t) - 2\sqrt{2}t)^2 \\ \rho'(t) &= 16(\cos(4t) - \sin(4t))(\sqrt{2}t - 1) + 32t + 4\sqrt{2}(\cos(4t) + \sin(4t)) - 16\sqrt{2} \end{aligned}$$

Řešit algebraicky rovnici $\rho'(t) = 0$ se nám nepodaří (ani to nelze), zbývá pouze najít řešení numericky (pomocí výpočetního softwaru). Zjistíme, že lokální minima nastávají pro $t \doteq 0,31$ a poté pro $t \doteq 0,97$, kdy bude vzdálenost vlka a Karkulky asi 5 metrů. Je zřejmé, že půjde i o globální minimum. \square

Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$\frac{x}{\ln(x)},$$

a načrtněte její graf.

Řešení.

- (1) Nejprve určíme definiční obor funkce: $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.
- (2) Nalezneme intervaly monotónnosti funkce: nejprve nalezneme nulové body derivace:

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} = 0$$

Tato rovnice má kořen e . Dále vidíme, že $f'(x)$ je na intervalu $(0, 1)$ i $(1, e)$ záporná, tedy je $f(x)$ na intervalu $(0, 1)$ i na $(1, e)$ klesající, dále je $f'(x)$ na intervalu (e, ∞) kladná a tedy $f(x)$ rostoucí. Má tedy funkce f jediný extrém v bodě e a to minimum. (také bychom o tom mohli rozhodnout pomocí znaménka druhé derivace funkce f v bodě e , je totiž $f^{(2)}(e) > 0$)

- (3) Určíme inflexní body:

$$f^{(2)}(x) = \frac{\ln(x) - 2}{x \ln^3(x)} = 0$$

Tato rovnice má kořen e^2 , který musí být inflexním bodem (extrém to již být nemůže vzhledem k předchozímu bodu).

- (4) Asymptoty. Funkce má asymptotu přímku $x = 1$. Dále hledíme asymptoty s konečnou směrnicí k :

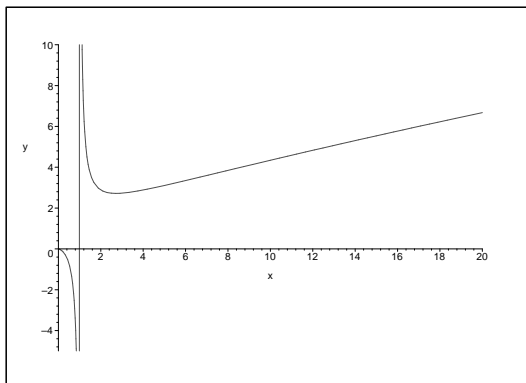
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{\ln(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0.$$

Pokud asymptota existuje, má tedy směrnicí 0. Pokračujme tedy ve výpočtu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(x)} - 0 \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty,$$

a protože limita není konečná, asymptota s konečnou směrnicí neexistuje.

Průběh funkce:



□

2. Integrovaní

6.9

6.10. Newtonův integrál. Předpokládejme, že známe na intervalu $[a, b]$ reálnou nebo komplexní funkci $F(x)$ reálné proměnné x a její derivaci

$$F'(x) = f(x).$$

Jestliže rozdělíme interval $[a, b]$ na n částí volbou bodů

e6.2

$$(6.2) \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

a přiblížíme hodnoty derivací v bodech x_i výrazy

$$f(x) \simeq \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

dostáváme součtem

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{i+1} - x_i) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Funkci F nazýváme *antiderivace* nebo *neurčitý integrál* k funkci f a poslední výraz pro reálnou funkci $f(x)$ zjevně přibližně vyjadřuje plochu vytyčenou grafem funkce f , souřadnou osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ (včetně znaménka zohledňujícího pozici plochy nad nebo pod osou x — namalujte si obrázek!). Dá se tedy očekávat, že takovou plochu skutečně spočteme jako rozdíl hodnot antiderivace v krajních bodech intervalu. Tomuto postupu se také říká *Newtonův integrál*. Píšeme

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

V případě komplexní funkce f je i reálná a imaginární část jejího integrálu jednoznačně dána reálnou a imaginární částí f , budeme proto v dalším pracovat výhradně s reálnými funkcemi.

V dalším skutečně ukážeme, že lze rozumně definovat pojem plocha v rovině tak, aby ji bylo možné počítat právě uvedeným způsobem. Newtonův integrál má ale jednu podstatnou vadu — jeho vyčíslení vyžaduje znalost antiderivace. Tu obecně není snadné spočítat i když ukážeme, že ke všem spojitým funkcím f existuje. Proto budeme napřed diskutovat i jinou definici integrálu.

Všimněme si ještě, že antiderivace je na každém souvislém intervalu $[a, b]$ určena jednoznačně až na konstantu. Skutečně, pokud je $F'(x) = G'(x) = f(x)$, pak Taylorův rozvoj prvního řádu se zbytkem v bodě a dává

$$F(x) - G(x) = F(a) - G(a) + (f(c) - f(c))(x - a) = F(a) - G(a)$$

na nějakém okolí bodu a . Pokud by ale $x_0 < b$ bylo supremem hodnot, pro které tento vztah ještě platí, opětovnou volbou tohoto bodu za a dosáhneme rozšíření tohoto vztahu i napravo od něj. Musí tedy platit na celém intervalu. S poukazem na toto pozorování budeme neurčitý integrál také zapisovat ve tvaru

$$F(t) = \int f(x)dx + C.$$

6.11

6.11. Riemannův integrál. Pro definici integrálu využijeme přímo intuitivní úvahy, kterou jsme v minulém odstavci odůvodňovali souvislost Newtonova integrálu s velikostí plochy.

Uvažme reálnou funkci f definovanou na intervalu $[a, b]$ a zvolme dělení (6.2) tohoto intervalu, spolu s výběrem reprezentantů ξ_i jednotlivých částí, tj. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ a zároveň $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Normou takového dělení nazýváme číslo $\min\{x_i - x_{i-1}\}$. *Riemannův součet* odpovídající zvolenému dělení $\Xi = (x_0, \dots, x_n)$ a reprezentantům ξ je dán výrazem

$$S_{\Xi, \xi} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Řekneme, že *Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[a, b]$ existuje, jestliže pro každou posloupnost dělení s reprezentanty (Ξ_k, ξ_k) s normou dělení jdoucí k nule existuje limita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{\Xi_k, \xi_k} = S,$$

jejíž hodnota navíc nezávisí na volbě posloupnosti dělení a reprezentantů. Píšeme v takovém případě opět

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Tato definice nevypadá příliš prakticky, nicméně nám dovolí sformulovat a dokázat některé jednoduché vlastnosti Riemannova integrálu.

Věta. (1) *Je-li f omezená reálná funkce definovaná na reálném intervalu $[a, b]$ a $c \in [a, b]$ nějaký vnitřní bod, potom integrál $\int_a^b f(x)dx$ existuje tehdy a jen tehdy když existují oba integrály $\int_a^c f(x)dx$ a $\int_c^b f(x)dx$. V takovém případě pak také platí*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(2) *Jsou-li f a g dvě reálné funkce definované na intervalu $[a, b]$, a existují-li integrály $\int_a^b f(x)dx$ a $\int_a^b g(x)dx$, pak existuje také integrál jejich součtu a platí*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(3) Je-li f reálná funkce definovaná na intervalu $[a, b]$, $C \in \mathbb{R}$ konstanta a existuje-li integrál $\int_a^b f(x)dx$, pak existuje také integrál $\int_a^b C \cdot f(x)dx$ a platí

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

DŮKAZ. (1) Předpokládejme nejprve, že existuje integrál přes celý interval. Jistě se lze při jeho výpočtu omezit na limity Riemannových součtů, jejichž dělení mají bod c mezi svými dělicími body. Každý takový součet dostaneme jako součet dvou dílčích Riemannových součtů. Pokud by tyto dílčí součty v limitě závisely na zvolených rozděleních a reprezentantech, pak by celkové součty nemohly být v limitě na volbách nezávislé (stačí ponechat jednu posloupnost dělení podintervalu stejnou a druhou měnit tak, aby se limita změnila).

Naopak, jestliže existují Riemannovy integrály na obou podintervalech, jsou libovolně přesně aproximovatelné Riemannovými součty a to navíc nezávisle na jejich volbě. Pokud do libovolné posloupnosti Riemannových součtů přes celý interval $[a, b]$ přidáme jeden dělicí bod c navíc, změníme hodnotu celého součtu i částečných součtů přes intervaly patřící do $[a, c]$ a $[c, b]$ nejvýše o násobek normy dělení a možných rozdílů omezené funkce f na celém $[a, b]$. To je číslo jdoucí libovolně blízko k nule při zmenšující se normě dělení. Proto nutně i částečné Riemannovy součty nutně konvergují k limitám, jejichž součtem je Riemannův integrál přes $[a, b]$.

(2) V každém Riemannově součtu se součet funkcí projeví jako součet hodnot ve vybraných reprezentantech. Protože je násobení reálných čísel distributivní, vyplývá odtud právě dokazované tvrzení.

(3) Stejná úvaha jako v předchozím případě. \square

6.12 **6.12. Věta.** Pro každou spojitou funkci f na konečném intervalu $[a, b]$ existuje její Riemannův integrál $\int_a^b f(x)dx$. Navíc, je funkce $F(t)$ zadaná na intervalu $[a, b]$ pomocí Riemannova integrálu

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

antiderivací funkce f na tomto intervalu.

DŮKAZ. Pro důkaz existence použijeme alternativní definici, která nahrazuje výběr reprezentatů a příslušné hodnoty $f(\xi_i)$ pomocí suprem hodnot $f(x)$ v příslušném podintervalu, resp. pomocí infim $f(x)$ tamtéž. Hovoříme o *horních Riemannových součtech*, resp. *dolních Riemannových součtech* (někdy také o tzv. *Darbouxově integrálu*). Protože je naše funkce spojitá, je jistě i omezená na uzavřeném intervalu a proto jsou všechna výše uvažovaná suprema i infima konečná. Je tedy horní součet příslušný dělení Ξ zadán výrazem

$$S_{\Xi, \text{sup}} = \sum_{i=1}^n \sup_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} f(\xi) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Zatímco dolní Riemannův součet je

$$S_{\Xi, \text{inf}} = \sum_{i=1}^n \inf_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} f(\xi) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Protože zjevně pro každé dělení s reprezentanty (Ξ, ξ) platí

$$S_{\Xi, \text{inf}} \leq S_{\Xi, \xi} \leq S_{\Xi, \text{sup}}$$

a infima i suprema lze libovolně přesně aproximovat skutečnými hodnotami, bude Riemannův integrál existovat právě když bude existovat pro libovolné posloupnosti dělení s normou jdoucí k nule limita horních i dolních součtů a tyto si budou rovny. Dokážeme, že tomu tak skutečně musí být.

Tvrzení. *Nechť je funkce f omezená na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Pak*

$$S_{\text{sup}} = \inf_{\Xi} S_{\Xi, \text{sup}}, \quad S_{\text{inf}} = \sup_{\Xi} S_{\Xi, \text{inf}}$$

jsou limity všech posloupností horních, resp. dolních, součtů s normou jdoucí k nule.

DŮKAZ. Pokud zjemníme nějaké rozdělení Ξ_1 na Ξ_2 přidáním dalších bodů, zřejmě bude

$$S_{\Xi_1, \text{sup}} \geq S_{\Xi_2, \text{sup}}, \quad S_{\Xi_1, \text{inf}} \leq S_{\Xi_2, \text{inf}}.$$

Každá dvě dělení mají společné zjemnění, jsou tedy hodnoty

$$S_{\text{sup}} = \inf_{\Xi} S_{\Xi, \text{sup}}, \quad S_{\text{inf}} = \sup_{\Xi} S_{\Xi, \text{inf}}$$

dobrymi kandidáty na limity horních a dolních součtů. Skutečně, pokud existuje společná limita horních součtů S nezávislá na zvolené posloupnosti dělení, musí to být právě S_{sup} , a podobně pro dolní součty.

Naopak, uvažme nějaké pevně zvolené dělení Ξ s n vnitřními dělicími body intervalu $[a, b]$, a jiné dělení Ξ_1 , jehož norma je hodně malé číslo δ . Ve společném zjemnění Ξ_2 bude jen n intervalů, které budou do součtu S_{sup} přispívat případně menším příspěvkem než je tomu v Ξ_1 . Protože je f omezená funkce na $[a, b]$, bude každý z těchto příspěvků ohraničený univerzální konstantou krát velikost intervalu. Při zvolení dostatečně malého δ tedy nebude vzdálenost $S_{\Xi_1, \text{sup}}$ od S_{sup} více než dvakrát vzdálenost $S_{\Xi, \text{sup}}$ od S_{sup} . Právě jsme ukázali, že pro libovolné číslo $\epsilon > 0$ umíme najít takové $\delta > 0$, že pro všechna dělení s normou nejvýše δ bude $|S_{\Xi, \text{sup}} - S_{\Xi}| < \epsilon$. To je přesné tvrzení, že číslo S_{sup} je limitou všech posloupností horních součtů s normami dělení jdoucími k nule. Úplně stejně se dokáže i tvrzení pro součty dolní. \square

Prozatím jsme ze spojitosti naší funkce f využili pouze to, že každá taková funkce je na konečném uzavřeném intervalu omezená. Zbývá nám ale ukázat, že pro spojitou funkci je $S_{\text{sup}} = S_{\text{inf}}$. Ze definice spojitosti víme, že pro každý pevně zvolený bod $x \in [a, b]$ a každé okolí $\mathcal{O}_\epsilon(f(x))$ existuje okolí $\mathcal{O}_\delta(x)$ takové, že $f(\mathcal{O}_\delta(x)) \subset \mathcal{O}_\epsilon(f(x))$. Toto tvrzení lze přepsat takto: jsou-li $y, z \in \mathcal{O}_\delta(x)$, tzn. mimo jiné platí

$$|y - z| < 2\delta,$$

je také $f(y), f(z) \in \mathcal{O}_\epsilon(f(x))$, tzn. mimo jiné platí

$$|f(y) - f(z)| < 2\epsilon.$$

Budeme potřebovat globální variantu takového tvrzení:

Tvrzení. *Nechť je f spojitá funkce na uzavřeném konečném intervalu $[a, b]$. Pak pro každé číslo $\epsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechny $z, y \in [a, b]$ splňující $|y - z| < \delta$ platí $|f(y) - f(z)| < \epsilon$.*

DŮKAZ. Protože je každý konečný uzavřený interval kompaktní, umíme jej celý pokrýt konečně mnoha okolími $\mathcal{O}_{\delta(x)}(x)$ zmiňovanými v souvislosti se spojitostí výše, přičemž jejich poloměr $\delta(x)$ závisí na středu x zatímco čísla ϵ budeme uvažovat pořád stejná. Zvolíme konečně za δ minimum ze všech (konečně mnoha) $\delta(x)$. Naše spojitá funkce f tedy má požadovanou vlastnost (pouze zaměňujeme čísla ϵ a δ za jejich dvojnásobky). \square

Nyní již snadno dokončíme celý důkaz existence Riemannova integrálu. Zvolme si ϵ a δ jako v posledním tvrzení a uvažujme jakékoliv dělení Ξ s n intervaly a normou nejvyšší δ . Pak

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \sup_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} f(\xi) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} f(\xi) \cdot (x_i - x_{i-1}) \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left| \sup_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} f(\xi) - \inf_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} f(\xi) \right| \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ & \leq \epsilon \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že se zmenšující se normou dělení jsou k sobě horní a dolní součty libovolně blízké. Proto infima a suprema splývají. To jsme potřebovali ukázat.

Víme již, že pro spojitou funkci f na intervalu $[a, b]$ existuje pro každé $t \in [a, b]$ integrál $\int_a^t f(x) dx$. Zvolme jako výše k pevnému malému $\epsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ tak, aby $|f(x + \Delta x) - f(x)| < \epsilon$ pro všechna $0 \leq \Delta x < \delta$. Potom ovšem při použití dostatečně jemného dělení intervalu $[a, t + \Delta t]$ dostaneme

$$\left| \frac{1}{\Delta t} \left(\int_a^{t+\Delta t} f(x) dx - \int_a^t f(t) dt \right) - f(t) \right| < \epsilon.$$

Skutečně, přiblížením integrálů kterýmkoliv Riemannovým součtem s dělením Ξ , v němž je t jedním z vnitřních bodů, dostaneme sčítance $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ s $\xi_i \in [t, t + \Delta t]$ (ostatní se vyruší v rozdílu). Všechny hodnoty $f(\xi_i)$ jsou ale k $f(t)$ blíže než o ϵ .

To ovšem znamená, že existuje v bodě t derivace funkce $F(t)$ zprava a je rovna $f(t)$. Stejně dokážeme výsledek pro derivaci zleva a celá věta je dokázána. \square

Důležité poznámky. (1) Předchozí dvě věty nám říkají, že integrál je lineární zobrazení

$$\int : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

vektorového prostoru spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ do reálných čísel (tj. lineární forma).

(2) Dokázali jsme, že každá spojitá funkce je derivací nějaké funkce. Newtonův a Riemannův integrál tedy jako koncepty pro spojitou funkci splývají. Riemannův integrál spojitých funkcí lze proto spočítat pomocí rozdílu hodnot $F(b) - F(a)$ antiderivace F .

(3) V prvním pomocném tvrzení v důkazu předchozí věty jsme dokázali důležité tvrzení, že pro omezenou funkci f na intervalu $[a, b]$ vždy existují limity horních součtů i dolních součtů. Říká se jim také *horní Riemannův integrál* a *dolní Riemannův integrál*. Takto lze pro omezené funkce ekvivalentně definovat i Riemannův integrál (jak jsme konečně v důkazu i činili).

(4) V dalším tvrzení v důkazu jsme odvodili důležitou vlastnost spojitých funkcí, které se říká *stejněměrná spojitost* na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Zjevně

je každá stejnoměrně spojitá funkce také spojitá, naopak to ale na otevřených intervalech platit nemusí.

(5) Uvažme funkci f na intervalu $[a, b]$, která je pouze *po částech spojitá*. To znamená, že je spojitá ve všech bodech $c \in [a, b]$ kromě konečně mnoha *bodů nespojitosti* c_i , $a < c_i < b$. Vzhledem k aditivnosti integrálu vůči intervalu přes který se integruje, viz 6.11(1), existuje podle poslední věty v takovém případě integrál

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

pro všechna $t \in [a, b]$ a derivace funkce $F(t)$ existuje ve všech bodech t , ve kterých je f spojitá. Navíc se snadno ověří, že ve zbývajících bodech je funkce $F(t)$ spojitá, je to tedy spojitá funkce na celém intervalu $[a, b]$. Při výpočtu integrálu pomocí antiderivací je zapotřebí volit její jednotlivé části tak, aby na sebe navazovaly. Pak bude i celý integrál vyčíslen jako rozdíl v krajních hodnotách.

6.13

6.13. Integrace „po paměti“. Neurčitý integrál nám formálně dovoluje spočítat Riemannův integrál pro každou spojitou funkci. Nicméně prakticky bývá zejména použitelný tam, kde v integrované funkci umíme derivaci přímo uvidět. K tomu v jednoduchých případech stačí číst tabulky pro derivace funkcí v našem zvěřinci naopak. Dostáváme tak např. následující tvrzení pro všechna $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$:

$$\begin{aligned} \int a \, dx &= ax + C \\ \int ax^n \, dx &= \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C \\ \int e^{ax} \, dx &= \frac{1}{a} e^{ax} + C \\ \int \frac{a}{x} \, dx &= a \ln x + C \\ \int a \cos bx \, dx &= \frac{a}{b} \sin bx + C \\ \int a \sin bx \, dx &= -\frac{a}{b} \cos bx + C \\ \int a \cos bx \sin^n bx \, dx &= \frac{a}{b(n+1)} \sin^{n+1} bx + C \\ \int a \sin bx \cos^n bx \, dx &= -\frac{a}{b(n+1)} \cos^{n+1} bx + C \\ \int a \operatorname{tg} bx \, dx &= -\frac{a}{b} \ln(\cos bx) + C \\ \int \frac{a}{a^2 + x^2} \, dx &= \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C \\ \int \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx &= \operatorname{arccos} \left(\frac{x}{a} \right) + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx &= \operatorname{arcsin} \left(\frac{x}{a} \right) + C \end{aligned}$$

kde ve všech případech je zapotřebí zvážit definiční obor, na kterém je neurčitý integrál dobře definován.

K takovýmto tabulkovým hodnotám lze relativně snadno dodávat další jednoduchými pozorováními vhodné struktury integrovaných funkcí. Např.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C.$$

6.13

6.14. Integrace per partes a substitucí. Výpočet integrálu pomocí antiderivace (neurčitého integrálu), spolu s pravidlem

$$(F \cdot G)'(t) = F'(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot G'(t)$$

pro derivaci součinu funkcí, dává následující formuli pro neurčitý integrál

$$F(x) \cdot G(x) + C = \int F'(x)G(x) dx + \int F(x)G'(x) dx.$$

Tato formule se většinou používá v případě, že jeden z integrálů napravo máme počítat, zatímco druhý umíme počítat lépe.

Uveďme si nějaké příklady. Nejprve spočteme

$$I = \int x \sin x dx.$$

V tomto případě pomůže volba $F(x) = x$, $G'(x) = \sin x$. Odtud $G(x) = -\cos x$, proto také

$$I = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Obvyklým trikem je také použít tento postup s $F'(x) = 1$:

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - x + C.$$

Další užitečný vzorec je odvozen z derivování složených funkcí. Je-li $F'(y) = f(y)$ a $y = \varphi(x)$, potom

$$\frac{dF(\varphi(x))}{dx} = F'(y) \cdot \varphi'(x)$$

a tedy $F(y) + C = \int f(y) dy$ lze spočítat jako

$$F(\varphi(x)) + C = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

Dosazením $x = \varphi^{-1}(y)$ pak dostaneme původně požadovanou antiderivaci. Častěji zapisujeme tuto skutečnost takto:

$$\int f(y) dy = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$$

a hovoříme o substituci za proměnnou y . Přímo na úrovni Riemannových součtů je možné substituci porozumět snadno tak, že přírůstky v proměnné y a v x jsou vzájemně ve vztahu popsaném formálně jako

$$dy = \varphi'(x) dx$$

který odpovídá vztahu $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ a snadno jej spočítáme výpočtem derivace.

Jako příklad ověříme touto metodou předposlední integrál v seznamu v 6.12. Pro integrál

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

zvolíme substituci $x = \sin t$. Odtud $dx = \cos t dt$ a dostáváme

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} \cos t dt = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t}} \cos t dt = \int dt = t + C.$$

Zpětným dosazením $t = \arcsin x$ dopočítáme již známý vzorec $I = \arcsin x + C$.

Při substitucích je třeba dát pozor na skutečnou existenci inverzní funkce $y = \varphi(x)$ a při výpočtu určitého integrálu je třeba řádně přepočítávat i meze.

6.15

6.15. Příklad. Často vede použití substitucí a metody per partes k rekurentním vztahům, ze kterých teprve lze dopočítat hledané integrály. Spočtěme si alespoň jeden příklad. Metodou per partes počítáme

$$\begin{aligned} I_m &= \int \cos^m x dx = \int \cos^{m-1} x \cos x dx \\ &= \cos^{m-1} x \sin x - (m-1) \int \cos^{m-2} x (-\sin x) \sin x dx \\ &= \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) \int \cos^{m-2} x \sin^2 x dx. \end{aligned}$$

Odtud díky vztahu $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ dostáváme

$$mI_m = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1)I_{m-2}$$

a počáteční hodnoty jsou

$$I_0 = x, \quad I_1 = \sin x.$$

K těmto typům integrálů se substitucí $x = \operatorname{tg} t$ často převádí integrály, kde integrovaná funkce závisí na výrazech tvaru $(x^2 + 1)$. Skutečně, např. pro

$$J_k = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^k}$$

dostáváme touto substitucí $dx = \cos^{-2} t dt$

$$J_k = \int \frac{dt}{\cos^2 t \left(\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1 \right)^k} = \int \cos^{2k-2} t dt.$$

Pro $k = 2$ je výsledkem

$$J_2 = \frac{1}{2} (\cos t \sin t + t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} + t \right)$$

a proto také po zpětné substituci $t = \operatorname{arctg} x$

$$J_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1 + x^2} + \operatorname{arctg} x \right) + C.$$

Při počítání určitých integrálů je možné celou rekurenci rovnou počítat po vyčíslení v zadaných mezích. Tak například je okamžitě vidět, že při integraci přes

interval $[0, 2\pi]$ je

$$I_0 = \int_0^{2\pi} dx = [x]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{2\pi} = 0$$

$$I_m = \int_0^{2\pi} \cos^m x \, dx = \begin{cases} 0 & \text{pro sudá } m \\ \frac{m-1}{m} I_{m-2} & \text{pro lichá } m \end{cases}.$$

Pro sudé $m = 2n$ tedy dostáváme přímo výsledek

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 2} 2\pi,$$

zatímco u lichých m je to vždy nula (jak bylo možné přímo uhádnout z grafu funkce $\cos x$).

Příklad.1. Vypočtete:

- (1) $\int x \cos x \, dx$
- (2) $\int \ln x \, dx$

Řešení. V obou případech řešíme metodou per partes.

- (1) $x \sin x + \cos x$
- (2) $x \ln x - x$

□

Příklad.2. Vypočtete:

- (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \, dx$
- (2) $\int \sin^2 x \sin 2x \, dx$

Řešení.

- (1) $\frac{2}{3}$
- (2) $\frac{1}{2} \sin^4 x$

□

Příklad.3. Dokažte, že

$$\frac{1}{2} \sin^4 x = -\frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{16} \cos(4x) + \frac{3}{16}.$$

Řešení. Funkce na pravé a levé straně rovnosti mají shodné derivace, tudíž se liší o reálnou konstantu. Tuto konstantu určíme porovnáním funkčních hodnot v jednom bodě, například bodě 0. Hodnota obou funkcí je v nule nulová, jsou si tedy rovny.

□

6.16

6.16. Integrace racionálních funkcí lomených. U racionálních funkcí lomených si můžeme při integraci pomoci několika zjednodušeními. Zejména v případě, že je stupeň polynomu f v čitateli větší nebo roven stupni polynomu g v jmenovateli, je rozumné hned z kraje dělením se zbytkem převést integraci na součet dvou

integrálů. První pak bude integrací polynomu a druhý integrací výrazu f/g se stupněm g ostře větším, než je stupeň f . Toho skutečně dosáhneme prostým vydělením polynomů:

$$f = q \cdot g + h, \quad \frac{f}{g} = q + \frac{h}{g}.$$

Můžeme tedy zrovna předpokládat, že stupeň g je ostře větší než stupeň f . Další postup si ukažme na jednoduchém příkladě. Zkusme si rozebrat, jak se dostaneme k výsledku

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x + 2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{-2}{x + 1} + \frac{6}{x + 2},$$

který již umíme integrovat přímo:

$$\int \frac{4x + 2}{x^2 + 3x + 2} dx = -2 \ln |x + 1| + 6 \ln |x + 2| + C.$$

Především převedením součtu zlomků na společného jmenovatele tuto rovnost snadno ověříme. Pokud naopak víme, že lze náš výraz rozepsat ve tvaru

$$\frac{4x + 2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}$$

a jde nám pouze o výpočet koeficientů A a B , můžeme pro ně získat rovnice pomocí roznásobení obou stran polynomem $x^2 + 3x + 2$ ze jmenovatele a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x ve výsledných polynomech napravo i nalevo:

$$4x + 2 = A(x + 2) + B(x + 1) \quad \implies \quad 2A + B = 2, \quad A + B = 4.$$

Odtud již přímo vychází náš rozklad. Říká se mu *rozklad na parciální zlomky*.

Zkusme nyní zobecnit naše pozorování. Předpokládejme, že jmenovatel $g(x)$ naší racionální funkce lomené má právě n různých reálných kořenů a_1, \dots, a_n a předpokládejme, že naopak čísel $f(x)$ ani jedno z těchto čísel jako kořen nemá. Pak jsou body a_1, \dots, a_n právě všechny body nespojitosti funkce $f(x)/g(x)$ a nabízí se tedy jako co nejjednodušší sčítance v součtu s podobnou vlastností výrazy tvaru

$$\frac{p(x)}{(x - a_i)^{n_i}}.$$

Chceme úspěšně použít stejný postup pro výpočet jako v předchozím jednoduchém příkladě. Musíme si proto hlídat, abychom po roznásobení uměli dosazením vhodných hodnot za volné koeficienty v polynomech $p(x)$ dostat napravo i nalevo stejné polynomy. Podbízí se tedy hledat sčítance, kde n_i bude násobnost kořene a_i , zatímco $p(x)$ bude polynom stupně $n_i - 1$. Ověřte si, že taková volba naplňuje právě sformulovaný záměr. Např. lze snadno spočítat, že

$$\frac{x - 4}{(x + 1)(x - 2)^2} = \frac{-5}{9(x + 1)} + \frac{5x - 16}{9(x - 2)^2}.$$

Takto to skutečně projde vždy, kdy má polynom $g(x)$ v čitateli právě tolik reálných kořenů včetně násobnosti, kolik je jeho stupeň. Opět už umíme integrovat výsledné sčítance. První typ jsme už viděli. Druhý typ rozdělíme na součet dvou zlomků:

$$\frac{5x - 16}{9(x - 2)^2} = \frac{5}{9} \cdot \frac{x - 2}{(x - 2)^2} - \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{x - 2} - \frac{6}{9} \frac{1}{(x - 2)^2}.$$

tyto už opět integrovat umíme. Mohli jsme samozřejmě již rovnou hledat původní rozklad na parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{x-4}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

Obdobně můžeme vždy spočítat rozklad na parciální zlomky u mocniny stupně n – bude v něm n sčítanců s konstantou v čitateli a postupně narůstajícími mocninami příslušného lineárního faktoru ve jmenovateli.

Zbývá ošetřit ještě případ, kdy reálných kořenů není dostatek. Vždycky ale existuje rozklad $g(x)$ na lineární a kvadratické faktory (ty kvadratické odpovídají dvojicím komplexně sdružených kořenů). Každý takový kvadratický faktor lze upravit na součet čtverců $(x-a)^2+b^2$, budeme pro zjednodušení rovnou počítat s x^2+b^2 . Opět stejný požadavek na počet volných koeficientů a stupně nám naznačuje, že bude možné hledat příslušné sčítance ve tvaru

$$\frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}.$$

Obdobně jako v případě násobných kořenů se i v případě mocniny $(x^2+b^2)^n$ takového faktoru druhého řádu vždy podaří najít odpovídající rozklad na parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1x+B_1}{(x-a)^2+b^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{((x-a)^2+b^2)^n}.$$

Konkrétní výsledky lze také snadno ozkoušet v Maplu pomocí volání procedury „convert(h, parfrac, x)“, které rozloží výraz h v proměnné x na parciální zlomky.

Všechny výše uvedené parciální zlomky už umíme integrovat. Připomeňme, že ty poslední zmíněné vedou mimo jiné na integrály diskutované v Příkladu 6.15.

Celkově můžeme shrnout, že racionální funkce $f(x)/g(x)$ lze poměrně snadno integrovat, pokud se podaří najít příslušný rozklad polynomu ve jmenovateli $g(x)$. Při výpočtu určitých integrálů jsou ale problematické body nespojitosti racionálních funkcí lomených, v jejichž okolí jsou tyto funkce neohraničené. Tomuto problému se budeme obecně věnovat v následujícím odstavci.

6.17

6.17. Nevlastní a nekonečné integrály. Jak jsme právě viděli, občas musíme pracovat s určitými integrály přes intervaly, v nichž jsou i body, kde integrovaná funkce $f(x)$ má nevlastní (jednostranné) limity. V takovém případě není integrovaná funkce ani spojitá ani omezená a proto pro ni nemusí platit námi odvozené výsledky. Hovoříme o „nevlastním integrálu“.

Jednoduchým východiskem je diskutovat v takovém případě určité integrály na menších intervalech s hranicí blížící se problematickému bodu a zkoumat, zda existuje limitní hodnota takovýchto určitých integrálů. Pokud existuje, řekneme, že příslušný nevlastní integrál existuje a je roven této limitě. Uvedeme postup na jednoduchém příkladě:

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}}$$

je nevlastní integrál, protože je má funkce $f(x) = (2-x)^{-1/4}$ v bodě $b=2$ limitu zleva rovnou ∞ . V ostatních bodech je integrovaná funkce spojitá. Zajímáme se proto o integrály

$$I_\delta = \int_0^{2-\delta} \frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}} = \int_\delta^2 y^{-1/4} dy = \left[-\frac{4}{3}y^{3/4} \right]_\delta^2 = \frac{4}{3}2^{3/4} - \frac{4}{3}\delta^{3/4}.$$

Všimněme si, že jsme ve výpočtu substitucí dostali integrál s přepočtenou horní mezí δ a dolní mezí 2. Otočením mezí do obvyklé polohy jsme do výrazu přidali jedno znaménko – navíc.

Limita pro $\delta \rightarrow 0$ zprava zjevně existuje a spočítali jsme tedy nevlastní určitý integrál

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}} = \frac{4}{3} 2^{3/4}.$$

Stejně budeme postupovat, pokud je zadáno integrování přes neohrazený interval. Hovoříme o *nekonečných integrálech*. Obecně tedy např. pro $a \in \mathbb{R}$

$$I = \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

pokud limita vpravo existuje. Obdobně můžeme mít horní mez integrování konečnou a druhou nekonečnou. Pokud jsou nekonečné obě, počítáme integrál jako součet dvou integrálů s libovolně pevně zvolenou pevnou mezí uprostřed, tj.

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$$

Existence ani hodnota nezávisí na volbě takové meze, protože její změnou pouze o stejnou konečnou hodnotu měníme oba sčítance, ovšem s opačným znaménkem. Naopak limita při které by stejně rychle šla horní i dolní mez do $\pm\infty$ může vést k odlišným výsledkům! Např.

$$\int_{-a}^a x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-a}^a = 0,$$

přestože hodnoty integrálů $\int_a^\infty x dx$ s jednou pevnou mezí utečou rychle k nekonečným hodnotám.

Ukažme si opět výpočet nekonečného integrálu na příkladě (jeden z typů partiálních zlomků, integrál vyřešíme snadno substitucí $x^2 + a^2 = t$, $2x dx = dt$)

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{2(x^2 + a^2)} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2b^2 + 2a^2} + \frac{1}{2a^2} \right) = \frac{1}{2a^2}.$$

Při výpočtu určitého integrálu z racionální funkce lomené musíme pečlivě rozdělit zadaný interval podle bodů nespojitosti integrované funkce a spočítat jednotlivé nevlastní integrály každý zvlášť. Navíc je nutné rozdělit celý interval tak, abychom vždy integrovali funkci neohrazenou pouze v okolí jednoho z krajních bodů.

Příklad. Určete plochu ležící napravo od přímky $x = 3$ a dále ohraničenou grafem funkce $y = \frac{1}{x^3-1}$ a osou x .

Řešení. Plocha je dána nevlastním integrálem $\int_1^\infty \frac{1}{x^3-1} dx$. Vypočteme jej metodou rozkladu na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3-1} &= \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x-1} \\ 1 &= (Ax+B)(x-1) + C(x^2+x+1) \\ x=1 &\implies C = \frac{1}{3} \\ x^0: 1 = C - B &\implies B = -\frac{2}{3} \\ x^2: 0 = A + C &\implies A = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

a můžeme psát

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3-1} dx = \frac{1}{3} \int_1^\infty \left(\frac{1}{(x-1)} - \frac{x+2}{x^2+x+1} \right) dx$$

Nyní určíme zvlášť neurčitý integrál $\int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx$:

$$\begin{aligned} &\int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \\ &= \int \frac{x+\frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx = \left. \begin{array}{l} \text{substituce u prvního integrálu} \\ t = x^2 + x + 1 \\ dt = 2(x + \frac{1}{2}) dx \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx = \left. \begin{array}{l} \text{substituce u prvního integrálu} \\ s = x + \frac{1}{2} \\ ds = dx \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{3}{2} \int \frac{1}{s^2+\frac{3}{4}} ds = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s\right)^2+1} ds = \left. \begin{array}{l} \text{substituce u druhého integrálu} \\ u = \frac{2}{\sqrt{3}}s \\ du = \frac{2}{\sqrt{3}}s ds \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{u^2+1} du = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \sqrt{3} \arctan(u) = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Celkem pak pro nevlastní integrál můžeme psát:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^3-1} dx &= \frac{1}{3} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left[\ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \right]_3^\delta = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \ln|\delta-1| - \frac{1}{2} \ln(\delta^2+\delta+1) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2\delta+1}{\sqrt{3}}\right) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{1}{6} \ln(13) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right) = \\ &= \frac{1}{6} \ln(13) - \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}} \right| - \frac{1}{3} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2\delta+1}{\sqrt{3}} \right) = \\
& = \frac{1}{6} \ln(13) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{7}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{3} \ln(2) - \frac{\sqrt{3}}{6} \pi
\end{aligned}$$

□

6.18

6.18. Příklady užití integrálu. Sama definice Riemanova integrálu byla odvozena od představy velikosti plochy v rovině se souřadnicemi x a y ohraničené osou x , hodnotami funkce $y = f(x)$ a hraničními přímkami $x = a$, $x = b$. Přitom je plocha nad osou x dána s kladným znaménkem zatímco hodnoty pod osou vedou ke znaménku zápornému. Ve skutečnosti víme pouze, co je to plocha rovnoběžnostěnu určeného dvěma vektory, obecněji ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n víme, co je to objem rovnoběžnostěnu. Plochy jiných podmnožin je teprve třeba definovat. Pro některé jednoduché objekty jako třeba mnohoúhelníky je definice dána přirozeně předpokládanými vlastnostmi. Námi vybudovaný koncept Riemannova integrálu je možné zatím přímo použít pouze k měření „objemu“ jednorozměrných podmnožin. O podmnožině $A \subset \mathbb{R}$ řekneme, že je (*Riemannovsky*) *měřitelná*, jestliže je funkce $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže je } x \in A \\ 0 & \text{jestliže je } x \notin A \end{cases}$$

Riemannovsky integrovatelná, tj. existuje integrál (ať už s konečnou nebo nekonečnou hodnotou)

$$m(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(x) dx.$$

Funkci χ_A říkáme *charakteristická funkce množiny* A . Všimněme si, že pro interval $A = [a, b]$ jde vlastně o hodnotu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(x) dx = \int_a^b dx = b - a,$$

přesně jak jsme očekávali. Zároveň má takováto definice „velikosti“ očekávanou vlastnost, že míra sjednocení dvou Riemannovsky měřitelných disjunktních množin vyjde jako součet (detailně tu ani nebudeme dokazovat). Pokud ale vezmeme spočetné sjednocení, taková vlastnost již neplatí. Např. stačí vzít množinu \mathbb{Q} všech racionálních čísel jakožto sjednocení jednoprvkových podmnožin. Zatímco každá množina o konečně mnoha bodech má podle naší definice míru nulovou, charakteristická funkce $\chi_{\mathbb{Q}}$ není Riemannovsky integrovatelná.

Pro definici plochy (objemu) ve vícerozměrných prostorech budeme umět použít koncept Riemannova integrálu, až jej zobecníme do vícerozměrného případu. Nicméně je dobré si už teď povšimnout, že skutečně původní představa o ploše rovinného útvaru uzavřeného výše uvedeným způsobem grafem funkce bude beze zbytku naplněna.

Střední hodnota funkce $f(x)$ na intervalu (konečném nebo nekonečném) $[a, b]$ je definována výrazem

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Z definice je m výška obdélníka (s orientací podle znaménka) nad intervalem $[a, b]$, který má stejnou plochu jako je plocha mezi osou x a grafem funkce $f(x)$.

Námi vybudovaný integrál jde také dobře použít pro výpočet *délky křivky* ve vícerozměrném vektorovém prostoru \mathbb{R}^n . Pro jednoduchost si to předvedeme na případu křivky v rovině \mathbb{R}^2 se souřadnicemi x, y . Mějme tedy parametrický popis křivky $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$F(t) = [g(t), f(t)]$$

a představme si ji jako dráhu pohybu. Derivací tohoto zobrazení dostaneme hodnoty, které budou odpovídat rychlosti pohybu po takovéto dráze. Proto celková délka křivky (tj. dráha uražená za dobu mezi hodnotami $t = a, t = b$) bude dána integrálem přes interval $[a, b]$, kde integrovanou funkcí $h(t)$ budou právě velikosti vektorů $F'(t)$. Chceme tedy spočítat délku s rovnou

$$s = \int_a^b h(t) dt = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt.$$

Ve speciálním případě, kdy křivka je grafem funkce $y = f(x)$ mezi body $a < b$ obdžime pro její délku

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Tentýž výsledek lze intuitivně vidět jako důsledek Pythagorovy věty: pro lineární přírůstek délky křivky Δs odpovídající přírůstku Δx proměnné x spočteme totiž právě

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

a to při pohledu přímo na naši definici integrálu znamená

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Jako snadný příklad spočteme délku jednotkové kružnice jako dvojnásobek integrálu funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$ v mezích $[-1, 1]$. Víme již, že musí vyjít číslo 2π , protože jsme takto číslo π definovali.

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 2[\arcsin x]_{-1}^1 = 2\pi. \end{aligned}$$

Jestliže v předchozím výpočtu budeme počítat s $y = \sqrt{r^2 - x^2} = r\sqrt{1 - (x/r)^2}$ a meze budou $[-r, r]$, dostaneme substitucí $x = rt$ déku kružnice o poloměru r :

$$s(r) = 2 \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{(x/r)^2}{1 - (x/r)^2}} dx = 2 \int_{-1}^1 \frac{r}{\sqrt{1 - t^2}} dt = 2r[\arcsin x]_{-1}^1 = 2\pi r,$$

tzn. že je skutečně délka kružnice lineárně závislá na jejím poloměru.

Podobně plochu takové kružnice spočteme substitucí $x = r \sin t$, $dx = r \cos t dt$ (s využitím výsledku pro I_2 v 6.15)

$$a(r) = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{2r^2}{2} [\cos t \sin t + t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi r^2.$$

Další obdobou téhož principu je výpočet *povrchu nebo objemu rotačního tělesa*. Pokud vznikne těleso rotací grafu funkce f kolem osy x v intervalu $[a, b]$, vzniká při

přírůstku Δx nárůst plochy o násobek Δs délky křivky zadané grafem funkce f a velikosti kružnice o poloměru $f(x)$. Plocha se proto spočte formulí

$$A(f) = 2\pi \int_a^b f(x) ds = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

kde $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ je dán přírůstkem délky křivky $y = f(x)$.

Objem stejného tělesa naroste při změně Δx o násobek tohoto přírůstku a plochy kružnice o poloměru $f(x)$. Proto je dán formulí

$$V(f) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Jako příklad užití posledních dvou vzorců odvodíme známé formule pro plochu jednotkové sféry a objem jednotkové koule.

$$A_r = 2\pi \int_{-r}^r r \sqrt{1 - (x/r)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - (x/r)^2}} dt = 2\pi r \int_{-r}^r dt = 4\pi r^2$$

$$V_r = \pi \int_{-r}^r r^2 - x^2 dx = 2r\pi r^2 - \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Příklad. *Odvoďte vzorec pro výpočet povrchu a objemu kužele.*

Pomocí nevlastního integrálu také umíme rozhodnout o konvergenci širší třídy nekonečných řad než doposud:

6.19. Věta. Integrální kritérium konvergence řad. *Bud' $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ řada taková, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je kladná a nerostoucí na intervalu $(1, \infty)$. Pak tato řada konverguje právě tehdy, když konverguje intergrál*

$$\int_1^{\infty} f(x) dx.$$

DŮKAZ. Pokud interpretujeme integrál, jako plochu pod křivkou, je kritérium zřejmé.

Pokud daná řada diverguje, pak diverguje i řada $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ máme pro k -tý částečný součet s'_k (řady bez prvního členu) nerovnost

$$s'_k = \sum_{n=2}^k f(n) < \int_1^k f(x) dx,$$

neboť s'_k je dolním součtem Riemannova integrálu $\int_1^k f(x) dx$. Pak ale je

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k f(x) dx > \lim_{k \rightarrow \infty} s'_k = \infty,$$

a uvažovaný integrál diverguje.

Předpokládáme nyní, že daný integrál konverguje a označme k -tý částečný součet dané řady jako s_k . Potom máme nerovnosti

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k f(x) dx < \lim_{k \rightarrow \infty} s_k < \infty,$$

neboť s_k je horním součtem Riemannova integrálu $\int_1^k f(x) dx$ a předpokládáme, že daná řada konverguje. \square

Příklad.3. *Rozhodněte, zda následující sumy konvergují či divergují:*

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$,
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Řešení. Všimněme si nejprve, že ani u jedné z uvažovaných řad neumíme o její konvergenci rozhodnout na základě podílového či odmocninového kritéria (všechny limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ jsou rovny 1). Pomocí integrálního kritéria pro konvergenci řad pak dostáváme:

a)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{\delta \rightarrow \infty} [\ln(t)]_0^{\delta} = \infty,$$

daná řada tedy diverguje.

b)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\delta} = 1,$$

a daná řada tedy konverguje.

□

3. Nekonečné řady

Již jsme se při budování našeho zvířetníku funkcí setkali s mocninnými řadami, které přirozeným způsobem rozšiřují skupinu všech polynomů, viz 5.27. Zároveň jsme si říkali, že takto získáme třídu analytických funkcí, ale nedokazovali jsme tehdy ani to, že jsou mocninné řady spojitými funkcemi. Snadno nyní ukážeme, že tomu tak je a že skutečně umíme mocninné řady i diferencovat a integrovat po jednotlivých sčítancích. Právě proto ale také uvidíme, že není možné pomocí mocninných řad získat dostatečně širokou třídu funkcí. Např. nikdy tak nedostaneme jen po částech spojitě periodické funkce, které jsou tak důležité pro modelování a zpracování audio a video signálů.

6.19

6.20. Jak ochočené jsou řady funkcí? Vraťme se nyní k diskusi limit posloupností funkcí a součtu řad funkcí z pohledu uplatnění postupů diferenciálního a integrálního počtu. Uvažujme tedy konvergentní řadu funkcí

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

na intervalu $[a, b]$. Přirozené dotazy jsou:

- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojitě v nějakém bodě $x_0 \in [a, b]$, je spojitá i funkce $S(x)$ v bodě x_0 ?
- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ diferencovatelné v $a \in [a, b]$, je v něm diferencovatelná i funkce $S(x)$ a platí vztah $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$?
- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ integrovatelné na intervalu $[a, b]$, je integrovatelná i funkce $S(x)$ a platí vztah $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$?

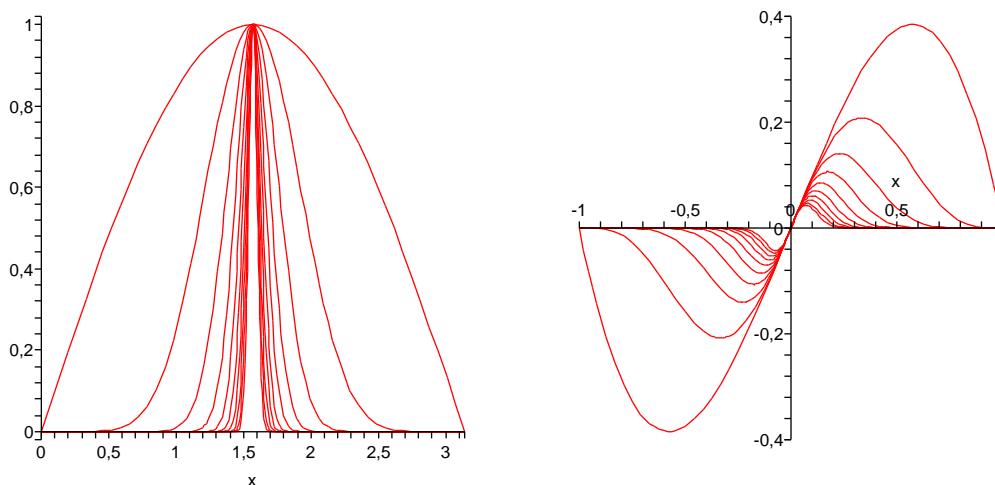
Ukážeme si nejprve na příkladech, že odpovědi na všechny tři takto kladené otázky jsou „NE!“. Poté ale najdeme jednoduché dodatečné podmínky na konvergenci řady, které naopak platnosti všech tří tvrzení zajistí. Řady funkcí tedy obecně moc zvladatelné nejsou, nicméně si umíme vybrat velkou třídu takových,

se kterými se už pracuje velmi dobře. Mezi ně samozřejmě budou patřit mocninné řady.

Uvažme funkce $f_n(x) = (\sin x)^n$ na intervalu $[0, \pi]$. Hodnoty těchto funkcí budou ve všech bodech $0 \leq x \leq \pi$ nezáporné a menší než jedna, kromě $x = \frac{\pi}{2}$, kde je hodnota 1. Proto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro všechna } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{pro } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Zjevně tedy je limita posloupnosti funkcí f_n nespojitou funkcí. Tentýž jev umíme najít i pro řady funkcí, protože součet je limitou částečných součtů. Stačí tedy v předchozím příkladě vyjádřit f_n jako n -tý částečný součet. Např. $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = (\sin x)^2 - \sin x$, atd. Levý obrázek vykresluje funkce $f_{n^3}(x)$ pro $n = 1, \dots, 10$.



Obrázek na pravo vykresluje $f_n(x) = x(1-x^2)^n$ na intervalu $[-1, 1]$ pro hodnoty $n = m^2$, $m = 1, \dots, 10$. Na první pohled je zjevné, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0,$$

všechny funkce $f_n(x)$ jsou hladké, ale v bodě $x = 0$ je jejich derivace

$$f'_n(0) = (1-x^2)^n - 2nx^2(1-x^2)^{n-1}|_{x=0} = 1$$

nezávisle na n . Limitní funkce pro posloupnost f_n přitom má samozřejmě všude derivaci nulovou!

Protipříklad k třetímu tvrzení jsme už viděli. Charakteristickou funkci $\chi_{\mathbb{Q}}$ racionálních čísel můžeme vyjádřit jako součet spočetně mnoha funkcí, které budou očíslovány právě racionálními čísly a budou vždy všude nulové, kromě množiny bodů, podle které jsou pojmenovány, kde jsou rovny 1. Riemannovy integrály všech takových funkcí budou nulové, jejich součet ale není Riemannovsky integrovatelnou funkcí.

6.20

6.21. Stejněměrná konvergence posloupností a řad funkcí. Zjevným důvodem neúspěchu ve všech třech předchozích příkladech je skutečnost, že rychlost bodové konvergence hodnot $f_n(x) \rightarrow f(x)$ se bod od bodu velice liší. Přirozenou

myšlenkou tedy je omezit se na takové případy, kdy bude naopak konvergence probíhat přibližně podobně rychle po celém intervalu.

Říkáme, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně* na intervalu $[a, b]$ k limitě $f(x)$, jestliže pro každé kladné (malé) číslo ϵ existuje (velké) přirozené číslo $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq N$ a všechna $x \in [a, b]$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Graficky si definici můžeme představit tak, že do pásu vzniklého posunutím limitní funkce $f(x)$ na $f(x) \pm \epsilon$ pro libovolně malé, ale pevně zvolené kladné ϵ , vždy padnou všechny funkce $f_n(x)$, až na konečně mnoho z nich. Tuto vlastnost zjevně neměl první a poslední z předchozích příkladů, u druhého ji postrádala posloupnost derivací f'_n .

O řadě funkcí řekneme, že konverguje stejnoměrně na intervalu, jestliže stejnoměrně konverguje posloupnost jejích částečných součtů.

Následující tři věty lze stručně shrnout tvrzením, že všechna tři obecně neplatná tvrzení v 6.20 platí pro stejnoměrnou konvergenci (pozor ale na jemnosti u derivování).

6.21 **6.22. Věta.** *Nechť $f_n(x)$ je posloupnost funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$, která na tomto intervalu stejnoměrně konverguje k funkci $f(x)$. Pak je také $f(x)$ spojitá funkce na intervalu $[a, b]$.*

DŮKAZ. Chceme ukázat, že pro libovolný pevný bod $x_0 \in [a, b]$ a jakékoliv pevně zvolené malé $\epsilon > 0$ bude $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ pro všechna x dostatečně blízka k x_0 . Z definice stejnoměrné spojitosti je pro naše $\epsilon > 0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

pro všechna $x \in [a, b]$ a všechna dostatečně velká n . Zvolme si tedy nějaké takové n a uvažme $\delta > 0$ tak, aby $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$ pro všechna x z δ -okolí x_0 (to je možné, protože všechny $f_n(x)$ jsou spojitě). Pak

$$|f(x) - f(x_0)| < |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\epsilon$$

pro všechna x z námi zvoleného δ -okolí bodu x_0 . □

6.22 **6.23. Věta.** *Nechť $f_n(x)$ je posloupnost Riemannovsky integrovatelných funkcí na konečném intervalu $[a, b]$, které stejnoměrně konvergují k funkci $f(x)$. Pak také $f(x)$ je integrovatelná a platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

DŮKAZ. Důkaz se opírá o zobecnění vlastností Cauchyovských posloupností čísel na stejnoměrnou konvergenci funkcí. Tímto způsobem umíme pracovat s existencí limity posloupnosti integrálů, aniž bychom ji potřebovali znát.

Řekneme, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ na intervalu $[a, b]$ je *stejně Cauchyovská*, jestliže pro každé (malé) kladné číslo ϵ existuje (velké) přirozené číslo N takové, že pro všechna $x \in [a, b]$ a všechna $n \geq N$ platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Zřejmě je každá stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí na intervalu $[a, b]$ také stejnoměrně Cauchyovská na téže intervalu. Toto pozorování nám už stačí k důkazu naší věty, zastavíme se ale napřed u užitečného obráceného tvrzení:

Tvrzení. Každá stejnoměrně Cauchyovská posloupnost funkcí $f_n(x)$ na intervalu $[a, b]$ stejnoměrně konverguje k nějaké funkci f na tomto intervalu.

DŮKAZ. Z podmínky Cauchyovskosti posloupnosti funkcí okamžitě vyplývá, že také pro každý bod $x \in [a, b]$ je posloupnost hodnot $f_n(x)$ Cauchyovskou posloupností reálných (případně komplexních) čísel. Bodově tedy nutně konverguje posloupnost funkcí $f_n(x)$ k nějaké funkci $f(x)$.

Ukážeme, že ve skutečnosti konverguje posloupnost $f_n(x)$ ke své limitě stejnoměrně. Zvolme N tak velké, aby

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

pro nějaké předem zvolené malé kladné ϵ a všechna $n \geq N$, $x \in [a, b]$. Nyní zvolíme pevně jedno takové n a odhadneme

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

pro všechna $x \in [a, b]$. □

Konečně se vrátíme ke snadnému důkazu věty: Připomeňme, že každá stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí je také stejnoměrně Cauchyovská a že Riemannovy součty pro jednotlivé členy naší posloupnosti konvergují k $\int_a^b f_n(x) dx$ nezávisle na výběru dělení a reprezentantů. Proto jestliže platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

pro všechna $x \in [a, b]$, pak také

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f_m(x) dx \right| \leq \epsilon |b - a|.$$

Je tedy posloupnost čísel $\int_a^b f_n(x) dx$ Cauchyovská a proto konvergentní. Současně ale také díky stejnoměrné konvergenci posloupnosti $f_n(x)$ platí pro limitní funkci $f(x)$ ze stejného důvodu, že její Riemannovy součty jsou libovolně blízké Riemannových součtům pro funkce f_n s dostatečně velkým n a limitní funkce $f(x)$ bude tedy opět integrovatelná. Zároveň

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \epsilon |b - a|.$$

a musí proto jít o správnou limitní hodnotu. □

Pro příslušný výsledek o derivacích je třeba zvýšené pozornosti ohledně předpokladů:

6.23

6.24. Věta. Nechť $f_n(x)$ je posloupnost funkcí diferencovatelných na intervalu $[a, b]$, která na tomto intervalu stejnoměrně konverguje k funkci $f(x)$. Dále nechť jsou všechny derivace $g_n(x) = f'_n(x)$ spojité a nechť konvergují na témže intervalu stejnoměrně k funkci $g(x)$. Pak je také funkce $f(x)$ diferencovatelná na intervalu $[a, b]$ a platí zde $f'(x) = g(x)$.

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že všechny naše funkce splňují $f_n(a) = 0$ (v opačném případě je pozměníme o konstanty a na výsledku úvah se nic nezmění). Pak ovšem můžeme psát pro všechny $x \in [a, b]$

$$f_n(x) = \int_a^x g_n(t) dt.$$

Protože ale funkce g_n stejnoměrně konvergují k funkci g na celém $[a, b]$, tedy tím spíše na intervalech $[a, x]$, kde $a \leq x \leq b$, platí také

$$f(x) = \int_a^x g(t) dt.$$

Protože je funkce g coby stejnoměrná limita spojitých funkcí opět spojitou funkcí, dokázali jsme vše potřebné, viz Věta 6.11 o Riemannově integrálu a antiderivaci. \square

6.24 **6.25. Důsledek.** Pro nekonečné řady můžeme předchozí výsledky shrnout takto: Uvažme funkce $f_n(x)$ na intervalu $I = [a, b]$.

(1) Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité na I a řada $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k funkci $S(x)$, je i funkce $S(x)$ spojitá na I .

(2) Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojitě diferencovatelné na I , a obě řady

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

konvergují stejnoměrně, pak je také funkce $S(x)$ spojitě diferencovatelná a platí $S'(x) = T(x)$, tj.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

(3) Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ Riemannovsky integrovatelné na I a řada $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k funkci $S(x)$ na I , je tamtéž integrovatelná i funkce $S(x)$ a platí vztah

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

6.25

6.26. Test pro stejnoměrnou konvergenci. Nejjednodušším způsobem pro zjištění stejnoměrné konvergence funkcí je porovnání s absolutní konvergencí vhodné posloupnosti. Říkává se tomu často *Weierstrassův test*. Předpokládejme tedy, že máme řadu funkcí $f_n(x)$ na intervalu $I = [a, b]$ a že navíc známe odhad

$$|f_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$$

pro vhodné reálné konstanty a_n a všechna $x \in [a, b]$. Okamžitě můžeme odhadnout rozdíly částečných součtů $s_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x)$ pro různé indexy k . Pro $k > m$ dostáváme

$$|s_k(x) - s_m(x)| \leq \left| \sum_{n=m+1}^k f_n(x) \right| \leq \sum_{n=m+1}^k |f_n(x)| \leq \sum_{n=m+1}^k a_n.$$

Pokud je řada (kladných) konstant $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak bude samozřejmě posloupnost jejích částečných součtů Caychyovská. Právě jsme ale spočetli, že v takovém případě bude posloupnost částečných součtů $s_n(x)$ stejnoměrně Caychyovská. Díky tvrzení dokázanému před chvílí v 6.23 jsme tedy právě dokázali následující

Tvrzení. Necht' $f_n(x)$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $I = [a, b]$ a platí $|f_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$. Je-li řada čísel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak řada $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně.

6.26

6.27. Důsledky pro mocninné řady. Weistrassův testu je velice užitečný pro diskusi mocninných řad

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

se středem v bodě x_0 . Při našem prvním setkání s mocninnými řadami jsme ukázali v 5.29, že každá taková řada konverguje na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kde tzv. poloměr konvergence $\delta \geq 0$ může být také nula nebo ∞ . (viz také 5.32). Zejména jsme v důkazu věty 5.29 pro ověření konvergence řady $S(x)$ používali srovnání s vhodnou geometrickou posloupností. Podle Weistrassova testu je proto řada $S(x)$ stejnoměrně konvergentní na každém kompaktním (tj. konečném) intervalu $[a, b]$ uvnitř intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Dokázali jsme tedy

Důsledek. Každá mocninná řada $S(x)$ je ve všech bodech uvnitř svého intervalu konvergence spojitá a spojitě diferencovatelná. Funkce $S(x)$ je také integrovatelná a derivování i integrování lze provádět člen po členu.

Ve skutečnosti platí také tzv. *Abelova věta*, která říká, že mocninné řady jsou spojitě i v hraničních bodech svého definičního oboru (včetně případných nekonečných limit). Tu zde nedokazujeme.

Právě dokázané příjemné vlastnosti mocninných řad zároveň poukazují na hranice jejich použitelnosti při modelování závislostí nějakých praktických jevů nebo procesů. Zejména není možné pomocí mocninných řad dobře modelovat po částech spojitě funkce. Jak uvidíme v zápětí, je možné pro konkrétněji vymezené potřeby nacházet lepší sady funkcí $f_n(x)$ než jsou hodnoty $f_n(x) = x^n$. Nejznámějšími příklady jsou Fourierovy řady a tzv. wawelety, které přiblížíme v další kapitole.

Příklad. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Nápověda: $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n2^n}$.

Řešení. Zaměnou sumace s integrací dostaneme integrál $\int_2^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}}) dx = \ln 2$. \square

Spojité modely

*jak šikovně zachytit nelineární změny?
– pořádně si je lineárně přiblížme...*

V této kapitole se budeme snažit podat stručné náznaky, jak lze relativně jednoduše používat nástroje diferenciálního a integrálního počtu. V jistém smyslu půjde o postupy a nástroje podobné, jako jsme již viděli v kapitole třetí. Jen místo konečně rozměrných vektorů budou naše objekty nebo jejich stavy často prezentovány pomocí funkcí.

1. Fourierovy řady

7.1

7.1. Vzdálenosti funkcí. Zvolme si pevně nějaký interval $I = [a, b]$, konečný nebo nekonečný. Koncept integrování můžeme velice intuitivním způsobem využít pro vyjádření vzdálenosti funkcí definované na I : Pro každé dvě (reálné nebo komplexní) funkce f, g na I zkusíme definovat jejich vzdálenost $\|f - g\|$ jako plochu oblasti vymezené mezi jejich grafy, tj.

$$\|f - g\|^2 = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx.$$

Samozřejmě je třeba předpokládat, že tento Riemannův integrál existuje. Velikost $\|f\|$ funkce f je pak její vzdálenost od funkce nulové, tj.

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Pro jednoduchost budeme pracovat s množinou $\mathcal{S} = \mathcal{S}[a, b]$ omezených a po částech spojitých reálných funkcí na I , ale úvahy lze rozšiřovat podle potřeby (často ale za cenu značné technické námahy).

Z námi již dokázaných vlastností integrování je okamžitě vidět, že \mathcal{S} je vektorový prostor a že námi právě uvažovaná velikost je odvozena z dobře definovaného symetrického bilineárního zobrazení

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx,$$

které má všechny vlastnosti skalárního součinu. V konečněrozměrném případě jsme takto definovali velikost vektorů v odstavci 2.37. Nyní je to naprosto stejné a pokud zůžeme naši definici na vektorový prostor generovaný nad reálnými čísly jen konečně mnoha funkcemi f_1, \dots, f_k , dostaneme opět dobře definovaný skalární součin na tomto konečněrozměrném vektorovém podprostoru.

Jako příklad uvažme funkce $f_i = x^i$, $i = 0, \dots, k$. Jimi je v \mathcal{S} generován $(k+1)$ -rozměrný vektorový podprostor $\mathbb{R}_k[x]$ všech polynomů stupně nejvýše k . Skalární

součin dvou takových polynomů je dán integrálem. Každý polynom stupně nejvýše k je vyjádřen jednoznačným způsobem jako lineární kombinace generátorů f_0, \dots, f_k . Pokud by navíc naše generátory měly tu vlastnost, že

$$\boxed{\text{e7.1}} \quad (7.1) \quad \langle f_i, f_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

jde o tzv. *ortonormální bázi*. Připomeňme si v této souvislosti proceduru Grammovy–Schmidtovy ortogonalizace, viz 2.46, která z libovolného systému generátorů f_i vytvoří nové ortogonální generátory g_i téhož prostoru, tj. $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ pro všechny $i \neq j$. Spočteme je přitom postupně jako $g_1 = f_1$ a formulemi

$$g_{\ell+1} = f_{\ell+1} + a_1 g_1 + \dots + a_\ell g_\ell, \quad a_i = -\frac{\langle f_{\ell+1}, g_i \rangle}{\|g_i\|^2}$$

pro $\ell > 1$.

Aplikujme tuto proceduru na první tři polynomy $1, x, x^2$ na intervalu $[-1, 1]$. Dostaneme $g_1 = 1$,

$$\begin{aligned} g_2 &= x - \frac{1}{\|g_1\|^2} \int_{-1}^1 x \cdot 1 \, dx \cdot 1 = x - 0 = x \\ g_3 &= x^2 - \frac{1}{\|g_1\|^2} \int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 \, dx \cdot 1 - \frac{1}{\|g_2\|^2} \int_{-1}^1 x^2 \cdot x \, dx \cdot x \\ &= x^2 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Příslušná ortogonální báze prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ na intervalu $[-1, 1]$ je tedy $1, x, x^2 - \frac{1}{3}$. Normalizací, tj. vhodným násobením skalárem tak, aby prvky v bázi měly velikost jedna dostaneme ortonormální bázi

$$h_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad h_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1).$$

Takovým ortonormálním generátorům $\mathbb{R}_k[x]$ se říká *Legendreovy polynomy*.

7.2

7.2. Ortogonální systémy funkcí. Připomeňme si výhody, které ortonormální báze podprostorů měly pro konečněrozměrné vektorové prostory. Můžeme pokračovat v předchozím příkladu polynomů a uvažovat třeba $V = \mathbb{R}_k[x]$ pro libovolné $k > 2$. Pro libovolnou funkci $h \in V$ bude funkce

$$H = \langle h, h_1 \rangle h_1 + \langle h, h_2 \rangle h_2 + \langle h, h_3 \rangle h_3$$

jednoznačně určenou funkcí, která minimalizuje vzdálenost $\|h - H\|$ mezi všemi funkcemi v $\mathbb{R}_2[x]$. Koefficienty pro nejlepší aproximaci zadané funkce pomocí funkce z vybraného podprostoru je možné tedy získat prostě integrací.

Uvedený příklad podbízí následující zobecnění: Když provedeme proceduru Grammovy–Schmidtovy ortogonalizace pro všechny monomy $1, x, x^2, \dots$, tj. pro spočetný systém generátorů, co z toho vznikne? Nebo ještě obecněji – co se stane, když zvolíme úplně libovolný spočetný systém lineárně nezávislých funkcí v \mathcal{S} takový, že každé dvě různé z nich mají nulový skalární součin? Takovému systému funkcí na intervalu I říkáme *ortogonální systém funkcí*. Jestliže jsou všechny funkce f_n v posloupnosti po dvou ortogonální a zároveň je pro všechna n velikost $\|f_n\| = 1$ normovaná, hovoříme o *ortonormálním systému funkcí*.

Nechť tedy tvoří posloupnost funkcí f_n ortogonální systém po částech spojitých funkcí na intervalu $I = [a, b]$ a předpokládejme, že pro konstanty c_n konverguje řada

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$$

stejněměrně na I . Pak snadno vyjádříme skalární součin $\langle F, f_n \rangle$ po jednotlivých sčítancích (viz Důsledek 6.25) a dostaneme

$$\langle F, f_n \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b f_m(x) f_n(x) dx = c_n \|f_n\|^2.$$

Máme tedy tušení, v jakou přibližně odpověď je možné doufat, a docela přehledně nám ji skutečně dává následující věta:

7.3 **7.3. Věta.** *Nechť f_n , $n = 1, 2, \dots$, je ortogonální posloupnost funkcí Riemannovsky integrovatelných na $I = [a, b]$ a nechť g je libovolná funkce Riemannovsky integrovatelná na I . Označme*

$$c_n = \|f_n\|^{-2} \int_a^b f_n(x) g(x) dx.$$

(1) *Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ má ze všech lineárních kombinací funkcí f_1, \dots, f_n nejmenší vzdálenost od g výraz*

$$h_n = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x).$$

(2) *Řada čísel $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2$ vždy konverguje a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 \leq \|g\|^2.$$

(3) *Vzdálenost g od částečných součtů $s_k = \sum_{n=1}^k c_n f_n$ jde v limitě k nule, tj.*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g - s_k\|^2 = 0,$$

tehdy a jen tehdy, když

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 = \|g\|^2.$$

Ještě než se pustíme do důkazu, zkusíme lépe porozumět významu jednotlivých tvrzení této věty. Protože pracujeme s úplně libovolně zvoleným ortogonálním systémem funkcí, nemůžeme očekávat, že lze dobře aproximovat jakoukoliv funkci pomocí lineárních kombinací funkcí f_i . Např. když se omezíme u ortogonálních polynomů pouze na sudé stupně, určitě budeme dobře aproximovat pouze sudé funkce. Nicméně hned první tvrzení nám říká, že vždycky budeme dosahovat nejlepší možné aproximace částečnými součty. Druhé a třetí tvrzení pak můžeme vnímat jako analogii ke komým průmětům do podprostorů vyjádřených pomocí souřadnic. Skutečně, že pokud k dané funkci g bodově konverguje řada $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$, pak je funkce $F(x)$ kolmým průmětem g do vektorového podprostoru všech takovýchto řad.

Na druhé straně ale naše věta neříká, že by částečné součty uvažované řady musely bodově konvergovat k nějaké funkci. Tj. řada $F(x)$ nemusí být obecně konvergentní ani v případě, kdy nastane rovnost v (3). Pokud ale např. existuje konečná

hodnota $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ a všechny funkce f_n jsou stejnoměrně omezené na I , pak zřejmě řada $F(x)$ konverguje v každém x .

DŮKAZ. Zvolme libovolnou lineární kombinaci $f = \sum_{n=1}^k a_n f_n$ a spočtěme její vzdálenost od g . Dostáváme

$$\begin{aligned} \|g - \sum_{n=1}^k a_n f_n\|^2 &= \int_a^b \left(g - \sum_{n=1}^k a_n f_n \right)^2 dx \\ &= \int_a^b g^2 dx - 2 \int_a^b \sum_{n=1}^k a_n f_n g dx + \int_a^b \left(\sum_{n=1}^k a_n f_n \right)^2 dx \\ &= \|g\|^2 - 2 \sum_{n=1}^k a_n c_n + \sum_{n=1}^k a_n^2 \|f_n\|^2 \\ &= \|g\|^2 + \sum_{n=1}^k \|f_n\|^2 ((c_n - a_n)^2 - c_n^2). \end{aligned}$$

Evidentně lze poslední výraz minimalizovat právě volbou $a_n = c_n$ a tím je první tvrzení dokázáno.

Dosažením této volby dostáváme tzv. *Besselovu identitu*

$$\|g - \sum_{n=1}^k c_n f_n\|^2 = \|g\|^2 - \sum_{n=1}^k c_n^2 \|f_n\|^2,$$

ze které okamžitě díky nezápornosti levé strany vyplývá tzv. *Besselova nerovnost*

$$\sum_{n=1}^k c_n^2 \|f_n\|^2 \leq \|g\|^2.$$

Tím je dokázáno druhé tvrzení, protože každá neklesající a shora omezená posloupnost reálných čísel má limitu (a je jí supremum celé množiny hodnot prvků posloupnosti).

Jestliže v Besselově nerovnosti nastane rovnost, hovoříme o tzv. *Parsevalově rovnosti*. Přímou z definic vyplývá nyní tvrzení (3). \square

Ortonogonální systém funkcí nazveme *úplný ortonogonální systém* na intervalu $I = [a, b]$, jestliže platí Parsevalova rovnost pro každou funkci g s konečnou velikostí $\|g\|$ na tomto intervalu.

7.4

7.4. Fourierovy řady. Předchozí věta naznačuje, že umíme se spočetnými ortonogonálními systémy f_n funkcí pracovat velice podobně jako s konečnými ortonogonálními bazemi vektorových prostorů, jsou tu ale zásadní rozdíly:

- Není snadné říci, jak vypadá celý prostor konvergentních nebo stejnoměrně konvergentních řad $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$.
- Pro danou integrovatelnou funkci umíme najít jen nejlepší možné přiblížení takovou řadou $F(x)$.

V případě, že místo ortonogonálního systému f_n máme systém ortonormální, jsou formulky ve větě o něco jednodušší, žádné další zlepšení ale nenastane.

Jako pěkný příklad na integrování lze elementárními metodami ověřit, že systém funkcí

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$$

je ortogonální systém na intervalu $[-\pi, \pi]$ (a také na kterémkoliv jiném intervalu o délce 2π). Řady z předchozí věty odpovídající tomuto systému nazýváme *Fourierovy řady*. I v obecném případě diskutovaném výše se někdy hovoří o obecných Fourierových řadách vzhledem k ortogonálnímu systému funkcí f_n . Koeficienty c_n se pak nazývají *Fourierovy koeficienty funkce f* .

Na intervalu $[-\pi, \pi]$ jsou velikosti všech funkcí kromě první vždy $\sqrt{\pi}$, první má velikost $\sqrt{2\pi}$. Lze dokázat, že náš systém funkcí je úplným ortogonálním systémem, nebudeme to zde ale dokazovat. Ve smyslu vzdálenosti funkcí definované pomocí našeho skalárního součinu proto budou částečné součty Fourierovy řady $F(x)$ pro libovolnou funkci $g(x)$ s konečným integrálem $\int_a^b g(x)^2 dx$, tj.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

s koeficienty

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx,$$

vždy konvergovat k funkci $g(x)$.

Z obecnějších úvah lze dovést, že z konvergence v tomto smyslu vždy vyplývá bodová konvergence částečných součtů ve skoro všech bodech $x \in I$. Nebudeme zde ale ani vysvětlovat, co znamená „skoro všechny“, ani nebudeme takový výsledek dokazovat.

Jako příklad Fourierovy řady si uvedeme Fourierovu řadu pro periodickou funkci vzniklou z Heavisideovy funkce zúžením na jednu periodu. Tj. naše funkce g bude na intervalu $[-\pi, 0]$ rovna -1 a na intervalu $[0, \pi]$ bude rovna 1 . Protože jde o funkci lichou, jistě budou všechny koeficienty u funkcí $\cos(nx)$ nulové, a pro koeficienty u funkcí $\sin(nx)$ spočteme

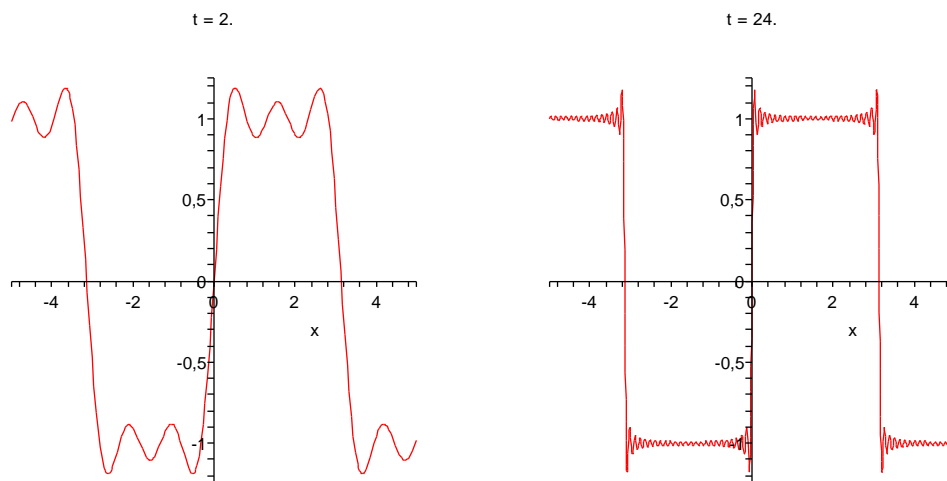
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n).$$

Výsledná Fourierova řada je tedy tvaru

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right)$$

a součet jejích prvních pěti a prvních padesáti členů je na následujících dvou obrázcích.

Všimněme si, že se zvyšujícím se počtem členů řady se výrazně spřesňuje aproximace s výjimkou stále se zmenšujícího okolí bodu nespojivosti, na němž je ale maximum odchylky stále zhruba stejné. Je to obecná vlastnost Fourierových řad, které se říká Gibbsův jev. Povšimněme si také, že v samotném bodě nespojivosti je hodnota aproximující funkce právě v polovině mezi limitami zprava a zleva pro Heavisideovu funkci.



Samozřejmě nelze očekávat, že by konvergence Fourierových řad pro funkce g s body nespojitosti mohla být stejnoměrná (to by totiž g musela být coby stejnoměrná limita spojitých funkcí sama spojitá!).

Bez podrobného důkazu si uvedeme následující větu podávající ucelený obrázek o bodové konvergenci Fourierových řad. Nejde o nutné podmínky konvergence a v literatuře lze najít řadu jiných formulací. Tato je ale jednoduchá a postihuje velké množství užitečných případů.

Věta. *Nechť g je po částech spojitá a po částech monotónní funkce na intervalu $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada $F(x)$ konverguje na $[-\pi, \pi]$ a její součet je*

- roven hodnotě $g(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in [-\pi, \pi]$, ve kterém je funkce $g(x)$ spojitá,
- v každém bodě nespojitosti x_0 funkce $g(x)$ roven

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) \right),$$

- v krajních bodech intervalu $[-\pi, \pi]$ je roven

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow -\pi^+} g(x) + \lim_{x \rightarrow \pi^-} g(x) \right).$$

Pokud navíc je funkce $g(x)$ spojitá, periodická s periodou 2π a všude existuje její po částech spojitá derivace, pak konverguje její Fourierova řada stejnoměrně.

7.5

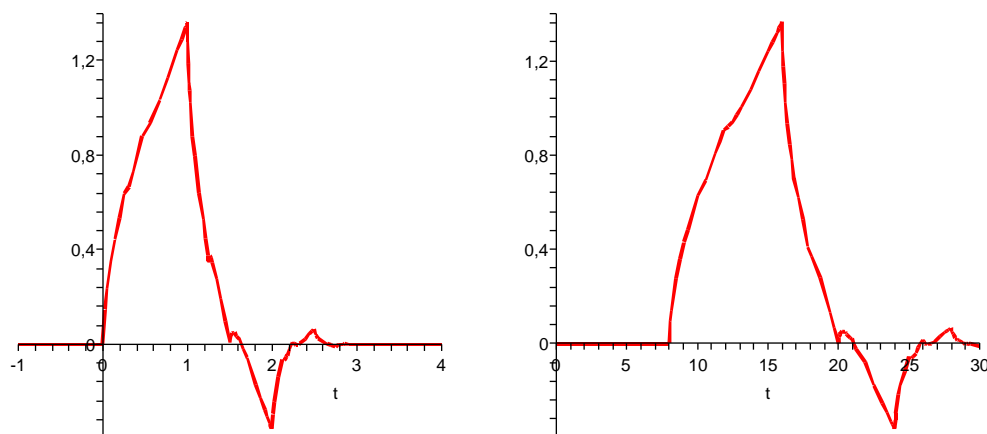
7.5. Wavelety. Fourierovy řady a další z nich vycházející nástroje jsou využívány ke zpracování různých signálů, obrázků apod. Povaha použitých periodických goniometrických funkcí a jejich prosté škálování pomocí zvětšující se frekvence zároveň omezují jejich použitelnost. V mnoha oborech proto vyvstala přirozená potřeba nalézt šikvnější úplné ortogonální systémy funkcí, které budou vycházet z předpokládané povahy dat a které bude možné efektivněji zpracovávat.

Takový systém se lze například vytvořit volbou vhodné spojitě funkce ψ s kompaktním nosičem, ze které sestrojíme spočetně mnoho funkcí ψ_{ij} , $j, k \in \mathbb{Z}$, pomocí dyadických translací a dilatací:

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k).$$

Pokud tvar mateřské funkce ψ dobře vystihuje možné chování dat, a zároveň její potomci ψ_{jk} tvoří úplný ortogonální systém, pak se zpravidla dobře daří konkrétní zpracovávaný signál aproximovat pomocí jen několika málo funkcí.

Nebudeme zde zacházet do podrobností, jde o mimořádně živý směr výzkumu i základ komerčních aplikací. Zájemce snadno najde spoustu literatury. Na obrázku je ilustrována tzv. Daubechies mateřská wavelet $D4(x)$ a její dcera $D4(2^{-3}x - 1)$.



2. Integrální transformace

7.6

7.6. Integrální operátory. V případě konečněrozměrných vektorových prostorů jsme mohli vnímat vektory jako zobrazení z konečné množiny pevně zvolených generátorů do prostoru souřadnic. Nejjednodušší lineární zobrazení zobrazovala vektory do skalárů (tzv. lineární formy) a byla definována pomocí jednořádkových matic jako součet součinů těchto souřadnic s pevně zvolenými hodnotami na generátorech. Složitější zobrazení s hodnotami opět v tom samém prostoru pak byla obdobně zadána maticemi. Velice podobně umíme přistoupit k lineárním operacím na prostorech funkcí.

V případě vektorového prostoru \mathcal{S} všech po částech spojitých funkcí na intervalu $I = [a, b]$ se lineární zobrazení $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ nazývají (reálné) *lineární funkcionály*. Jednoduše je můžeme zadat dvěma způsoby – pomocí vyčíslení funkce (případně jejích derivací) v jednotlivých bodech nebo pomocí integrování. Příkladem funkcionálu L tedy může být vyčíslení v jediném pevném bodě $x_0 \in I$

$$L(f) = f(x_0)$$

integrální funkcionál pak je zadán pomocí pevně zvolené funkce $g(x)$

$$L(f) = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Funkce $g(x)$ zde hraje roli váhy, se kterou při definici Riemannova integrálu bereme jednotlivé hodnoty reprezentující funkci $f(x)$. Nejjednodušším příkladem takového funkcionálu je samozřejmě Riemannův integrál samotný, tj. případ s $g(x) = 1$ pro

všechny body x . Dobrou představu dává také volba

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } |x| \geq a \\ e^{\frac{1}{x^2 - a^2} + \frac{1}{a^2}} & \text{je-li } |x| < a. \end{cases}$$

To je funkce hladká na celém \mathbb{R} s kompaktním nosičem v intervalu $(-a, a)$, viz 6.8. V bodě $x = 0$ má přitom hodnotu jedna. Integrální funkcionál

$$L_y(f) = \int_a^b f(x)g(y-x) dx$$

je možné vnímat jako „rozmlžené zprůměrování“ hodnot funkce f kolem bodu $x = y$ (obrázek funkce g je v 6.8 – ve svém středu má hodnotu jedna a hladkým monotonním způsobem se plynule přimkne k nule ve vzdálenosti a na obě strany). Ještě lepší volbou je z tohoto pohledu libovolná funkce g jejíž integrál přes celou reálnou osu je jednička.

7.7

7.7. Konvoluce funkcí. Pohled na integrální funkcionál L_y jako na zprůměrované chování funkce f v okolí daného bodu je názornější pro případ nevlastních mezí integrálu $a = -\infty$, $b = \infty$. Místo prostoru \mathcal{S} všech po částech spojitých funkcí na \mathbb{R} budeme uvažovat po částech spojitě a v absolutní hodnotě integrovatelné funkce f v roli argumentu pro náš funkcionál. Volný parametr y může být vnímán jako nová nezávislá proměnná a naše operace tedy ve skutečnosti zobrazuje funkce opět na funkce $f \mapsto \tilde{f}$:

$$\tilde{f}(y) = L_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x) dx.$$

Této operaci se říká *konvoluce funkcí* f a g , značíme ji $f * g$. Většinou se konvoluce definuje pro reálné nebo komplexní funkce s kompaktním nosičem na celém \mathbb{R} . Pomocí transformace $t = z - x$ se snadno spočte

$$(f * g)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x) dx = - \int_{\infty}^{-\infty} f(z-t)g(t) dt = (g * f)(z),$$

je tedy konvoluce coby binární operace na dvojicích funkcí s kompaktními nosiči komutativní.

Konvoluce je mimořádně užitečný nástroj pro modelování způsobu, jak můžeme pozorovat experiment nebo jak se projevuje prostředí při přenosu informací (např. analogový audio nebo video signál ovlivňovaný šumy apod.). Argument f je přenášenou informací, funkce g je volena tak, aby co nejlépe vystihovala vlivy prostředí či zvoleného technického postupu.

Konvoluce jsou jedním z mnoha případů obecných integrálních operátorů na prostorech funkcí

$$K(f)(y) = \int_a^b f(x)k(y, x) dx$$

s jádrem daným funkcí dvou proměnných $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Definiční obor takových funkcionálů je nutné vždy volit s ohledem na vlastnosti jádra tak, aby vždy existoval použitý integrál.

7.8

7.8. Fourierova transformace. Teorie integrálních operátorů s jádry a rovnic, které je obsahují je velice užitečná a zajímavá zároveň, bohužel pro ni zde teď ale nemáme dost prostoru. Zaměříme teď alespoň na jeden mimořádně důležitý případ, tzv. *Fourierovu transformaci* \mathcal{F} , která úzce souvisí s Fourierovými řadami. Připomeňme si základní formuli pro parametrizaci jednotkové kružnice v komplexní rovině s rychlostí obíhání $\omega = 2\pi/T$, kde T je čas jednoho oběhu:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

Pro (reálnou nebo komplexní) funkci $f(t)$ můžeme spočítat její tzv. komplexní Fourierovy koeficienty jako komplexní čísla

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt.$$

Přitom platí vztahy mezi koeficienty a_n a b_n Fourierových řad (po přepočtu formulí pro tyto koeficienty pro funkce s obecnou periodou délky T) a těmito čísly c_n

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

a při reálném f jsou samozřejmě c_n a c_{-n} komplexně konjugované. Označíme-li $\omega_n = \omega n$, bude tedy původní funkce $f(t)$ s konvergující Fourierovou řadou rovna

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}.$$

Při pevně zvoleném T vyjadřuje výraz $\Delta\omega = 2\pi/T$ právě změnu ve frekvenci způsobenou nárůstem n o jedničku. Je to tedy právě diskrétní krok, se kterým při výpočtu koeficientů Fourierovy řady měníme frekvence. Koeficient $1/T$ u formule pro c_n je pak roven $\Delta\omega/2\pi$, takže můžeme řadu pro $f(t)$ přepsat jako

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega_n x} dx e^{i\omega_n t} \right).$$

Představme si nyní hodnoty ω_n pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ jako vybrané reprezentanty pro malé intervaly $[\omega_n, \omega_{n+1}]$ o délce $\Delta\omega$. Pak náš výraz ve vnitřní velké závorce v poslední formuli pro $f(t)$ ve skutečnosti vyjadřuje sčítance Riemannových součtů pro nevlastní integrál

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

kde $g(\omega)$ je funkce nabývající v bodech ω_n hodnoty

$$g(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega_n x} dx.$$

Předpokládejme, že naše funkce f je integrovatelná v absolutní hodnotě přes celé \mathbb{R} . Pak můžeme limitně přejít $T \rightarrow \infty$ a dojde ke zjemňování normy $\Delta\omega$ našich intervalů. Zároveň se dostaneme v posledním výrazu k integrálu

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Můžeme tedy položit pro (každou v absolutní hodnotě Riemannovsky integrovatelnou) funkci f na \mathbb{R}

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Této funkci \tilde{f} říkáme Fourierova transformace funkce f . Přechozí úvahy pak ukazují, že pro „rozumné“ funkce $f(t)$ bude také platit

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Tím říkáme, že existuje k právě definované *Fourierově transformaci* \mathcal{F} inverzní operace \mathcal{F}^{-1} , které říkáme *inverzní Fourierova transformace*.

Všimněme si, že Fourierova transformace a její inverze jsou integrální operátory se skoro shodným jádrem $k(\omega, t) = e^{\pm i\omega t}$.

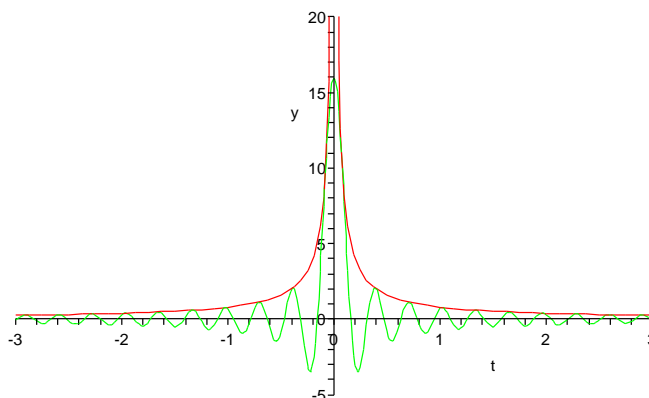
7.9

7.9. Vlastnosti Fourierovy transformace. Fourierova transformace zajímavým způsobem převrací lokální a globální chování funkcí. Začneme jednoduchým příkladem, ve kterém najdeme funkci $f(t)$, která se ztransformuje na charakteristickou funkci intervalu $[-\Omega, \Omega]$, tj. $\tilde{f}(\omega) = 0$ pro $|\omega| > \Omega$ a $\tilde{f} = 1$ pro $|\omega| \leq \Omega$. Inverzní transformace \mathcal{F}^{-1} nám dává

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{it} e^{i\omega t} \right]_{-\Omega}^{\Omega} = \frac{2}{\sqrt{2\pi} t} \frac{1}{2i} (e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi} t} \sin(\Omega t). \end{aligned}$$

Přímým výpočtem limity v nule (L'Hospitalovo pravidlo) spočteme, že $f(0) = 2\Omega(2\pi)^{-1/2}$, nejbližší nulové body jsou v $t = \pm\pi/\Omega$ a funkce poměrně rychle klesá k nule mimo počátek $x = 0$. Na obrázku je tato funkce znázorněná zelenou křivkou pro $\Omega = 20$. Zároveň je vynesena červenou křivkou oblast, ve které se s rostoucím Ω naše funkce $f(t)$ stále rychleji „vlní“.

Omega = 20.000



V dalším příkladu spočteme Fourierovu transformaci derivace $f'(t)$ pro nějakou funkci f . Pro jednoduchost předpokládejme, že f má kompaktní nosič, tj. zejména $\mathcal{F}(f')$ i $\mathcal{F}(f)$ skutečně existují a počítejme metodou per partes:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-i\omega t} f(t)]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \mathcal{F}(f)(\omega) \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že Fourierova transformace převádí (infinitesimální) operaci derivování na (algebraickou) operaci prostého násobení proměnnou. Samozřejmě můžeme tento vzorec iterovat, tj.

$$\mathcal{F}(f'')(\omega) = -\omega^2 \mathcal{F}(f), \dots, \mathcal{F}(f^{(n)}) = i^n \omega^n \mathcal{F}(f).$$

Další mimořádně důležitou vlastností je vztah mezi konvolucemi a Fourierovou transformací. Spočteme, jak dopadne transformace konvoluce $h = f * g$, kde opět pro jednoduchost předpokládáme, že funkce mají kompaktní nosiče. Při výpočtu prohodíme pořadí integrování, což je krok, který ověříme teprve v diferenciálním a integrálním počtu později, viz ???. V

dalším krůčků pak zavedeme substituci $t - x = u$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x) dx \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-i\omega t} dt \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega(u+x)} du \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega u} du \right) \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)\end{aligned}$$

Podobný výpočet ukazuje i obrácené tvrzení, že Fourierova transformace součinu je, až na konstantu, konvoluce transformací.

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$$

Jak jsme si uváděli výše, konvoluce $f * g$ velice často modeluje proces našeho pozorování nějaké sledované veličiny f . Pomocí Fourierovy transformace a její inverze nyní můžeme snadno rozpoznat původní hodnoty této veličiny, pokud známe konvoluční jádro g . Prostě spočteme $\mathcal{F}(f * g)$ a podělíme obrazem $\mathcal{F}(g)$. Hovoříme o *dekonvoluci*.

Vraťme se nyní ještě k prvnímu příkladu s inverzní transformací k charakteristické funkci f_{Ω} intervalu $[-\Omega, \Omega]$. Zkusme provést limitní přechod pro Ω jdoucí k nekonečnu a označme $\sqrt{2\pi}\delta(t)$ kýženou limitní „funkci“ pro $\mathcal{F}^{-1}(f_{\Omega})(t)$. Pro součin s libovolným obrazem $\mathcal{F}(g)$ platí

$$\mathcal{F}^{-1}(f_{\Omega} \cdot \mathcal{F}(g))(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \mathcal{F}^{-1}(f_{\Omega})(z-t) dt.$$

Při $\Omega \rightarrow \infty$ přejde výraz nalevo k $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g))(z) = g(z)$, zatímco napravo dostáváme

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(z-t) dt.$$

Naše hledaná $\delta(t)$ tedy vypadá na „funkci“, která je všude nulová, kromě jediného bodu $t = 0$, kde je tak „nekonečná“, že integrováním jejího součinu s libovolnou integrovatelnou funkcí g dostaneme právě hodnotu g v bodě $t = 0$. Není to samozřejmě funkce v našem smyslu, nicméně jde o objekt často používaný. Říká se jí *Diracova funkce* δ a korektně ji lze popsat jako tzv. distribuci. Z nedostatku času nebudeme distribuce podrobněji rozebírat a omezíme se na konstatování, že si lze dobře Diracovo δ představit jako jednotkový impulz v jediném bodě. Fourierova transformace jej pak přetransformuje na konstantní funkci $\mathcal{F}(\delta)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Naopak mnohé funkce, které nejsou integrovatelné v absolutní hodnotě na \mathbb{R} transformuje Fourierova transformace na výrazy s Diracovým δ . Např.

$$\mathcal{F}(\cos(nt))(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(n-\omega) + \delta(n+\omega)).$$

7.10

7.10. Poznámky o dalších transformacích. Pokud použijeme Fourierovu transformaci na lichou funkci $f(t)$, tj. $f(-t) = -f(t)$, příspěvek integrace součinu $f(t)$ a funkce $\cos t$ se pro kladná a záporná t vyruší. Dostaneme proto přímým výpočtem

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Výsledná funkce je opět lichá, proto ze stejného důvodu i inverzní transformaci lze spočítat obdobně. Vynecháním imaginární jednotky i dostáváme vzájemně inverzní transformace, kterým se říká *Fourierova sinusová transformace* pro liché funkce:

$$\tilde{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt, \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_s(t) \sin \omega t dt.$$

Obdobně se definuje *Fourierova cosinová transformace* pro sudé funkce.

Fourierovu transformaci nelze dobře využít pro funkce, které nejsou integrovatelné v absolutní hodnotě přes celé \mathbb{R} (minimálně nedostáváme opravdové funkce). *Laplaceova transformace* se chová docela podobně jako Fourierova a tuto vadu nemá:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Integrální operátor \mathcal{L} má velice rychle se zmenšující jádro, proto bude existovat $\mathcal{L}(p(t))$ například pro každý polynom p a všechna kladná s . Obdobně jako pro Fourierovu transformaci dostaneme prostým výpočtem per partes vztah pro Laplaceovu transformaci derivované funkce při $s > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'(t))(s) &= \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = [f(t) e^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}(f)(s). \end{aligned}$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace a řadu dalších zejména v technické praxi používaných transformací je možné snadno dohledat v literatuře.

3. Diferenciální rovnice

7.11

7.11. Lineární a nelineární modely. Pojem derivace jsme zavedli, abychom mohli pracovat s okamžitými změnami studovaných veličin. Ze stejných důvodů jsme kdysi v úvodní kapitole zaváděli diference a právě vztahy mezi hodnotami veličin a změnami těch samých nebo jiných veličin vedly k rovnicím. Nejjednodušším modelem bylo úročení vkladů nebo půjček (a totéž pro tzv. Malthusiánský model populace). Přírůstek byl úměrný hodnotě, viz 1.12. V rámci spojitého modelování by stejný požadavek vedl na rovnici vztahující derivaci funkce $y'(x)$ s její hodnotou

e7.20

$$(7.2) \quad y'(x) = r \cdot y(x)$$

s konstantou úměrnosti r . Je snadné uhodnout řešení této rovnosti

$$y(x) = C e^{rx}$$

s libovolnou konstantou C . Tuto konstantu určíme jednoznačně volbou tzv. počáteční hodnoty $y_0 = y(x_0)$ v nějakém bodě x_0 . Pokud by část růstu v našem modelu byla dána konstantním působením nezávislým na hodnotě y nebo x , mohli bychom použít rovnici s konstantou s na pravé straně

e7.21

$$(7.3) \quad y'(x) = r \cdot y(x) + s.$$

Zjevně bude řešením této rovnice funkce $y(x) = C e^{rx} - \frac{s}{r}$. K tomuto závěru je velice lehké dojít, pokud si uvědomíme, že množinou všech řešení rovnice (7.2) je jednorozměrný vektorový prostor, zatímco řešení rovnice (7.3) se obdrží přičtením kteréhokoliv jednoho jejího řešení ke všem řešením předchozí rovnice. Lze pak snadno najít konstantní řešení $y(x) = k$ pro $k = -\frac{s}{r}$.

Podobně se nám v odstavci 1.19 podařilo vytvořit model populačního růstu založený na předpokladu, že závislost poměru změny velikosti populace $p(n+1) - p(n)$ a její velikosti $p(n)$ je v afinní závislosti na samotné velikosti populace. Nyní bychom tentýž vztah pro spojitý model patrně formulovali pro populaci $p(t)$ závislou na čase t jako

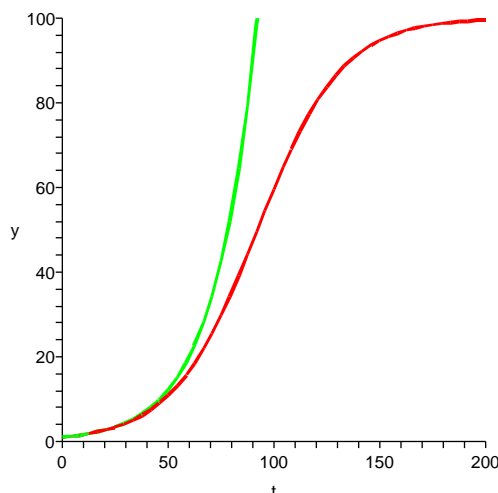
e7.22

$$(7.4) \quad p'(t) = p(t) \left(-\frac{r}{K} p(t) + r \right),$$

tj. při hodnotě $p(t) = K$ pro velkou konstantu K je přírůstek nulový, zatímco pro $p(t)$ blízké nule je poměr rychlosti růstu populace k její velikosti blízký r , což je malé číslo v řádu setin vyjadřující rychlost růstu populace za dobrých podmínek.

Není jistě snadné vyřešit bez znalosti teorie takovou rovnici, nicméně jako cvičení lze jistě ověřit, že následující funkce řešením pro každou konstantu C je

$$p(t) = \frac{K}{1 + CK e^{-rt}}.$$



Srovnáním červeného grafu této funkce s volbou $K = 100$, $r = 0,05$ a $C = 1$ (první dvě jsme takto použili v 1.19, poslední odpovídá přibližně počáteční hodnotě $p(0) = 1$) s obrázkem v 1.19 vidíme, že skutečně oba přístupy k modelování populací dávají docela podobné výsledky. Pro srovnání výstupu je také do obrázku zeleně vkreslen graf řešení rovnice (7.2) s touž konstantou r a počáteční podmínkou.

7.12

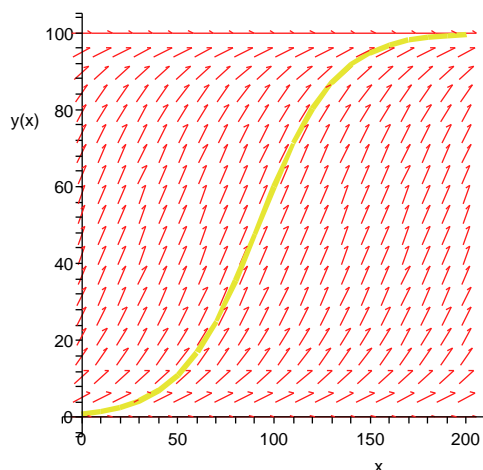
7.12. Diferenciální rovnice prvního řádu. Obecně rozumíme (obyčejnou) diferenciální rovnici prvního řádu vztah mezi derivací funkce $y'(x)$ v proměnné x , její hodnotou $y(x)$ a samotnou proměnnou, který lze zapsat jako

$$F(y'(x), y(x), x) = 0$$

nějakou pevnou funkci F , která každé trojici reálných čísel přiřadí jedno reálné číslo. Na tuto obecnost nejsme zatím připraveni a budeme diskutovat jen speciální případy rovnic. Pokud je alespoň rovnice explicitně vyřešena vzhledem k derivaci, tj.

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

můžeme si dobře graficky představit, co taková rovnice zadává. Pro každou hodnotu (x, y) v rovině si totiž můžeme představit šipku udávající vektor $(1, f(x, y))$, tj. rychlost se kterou nám rovnice grafu řešení přikazuje pohybovat se rovinou. Např. pro rovnici (7.4) dostaneme takovýto obrázek (i s vynesným řešením pro počáteční hodnotu jako výše).



Intuitivně lze na základě takových obrázků očekávat, že pro každou počáteční podmínku bude existovat právě jedno řešení naší rovnice. Takové tvrzení skutečně platí pro všechny rozumné funkce f , např. hladké. Nebudeme je tu dokazovat.

Užitečným typem rovnic, pro který máme elementární postup k řešení jsou tzv. *rovnice se separovanými proměnnými*:

$$\boxed{7.23} \quad (7.5) \quad y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$$

pro dvě dostatečně hladké funkce jedné reálné proměnné f a g . Obecné řešení tu lze získat integrací, tj. nalezením primitivních funkcí

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}, \quad F(x) = \int f(x)dx.$$

Pak totiž spočtením funkce $y(x)$ ze vztahu $F(x) + C = G(y)$ s libovolnou konstantou C vede k řešení, protože derivováním této rovnosti (s použitím pravidla pro derivování složené funkce $G(y(x))$) dostaneme skutečně $\frac{1}{g(y)} \cdot y'(x) = f(x)$.

Jako příklad najděme řešení rovnice

$$y'(x) = x \cdot y(x).$$

Přímým výpočtem dostaneme $\ln|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C$. Odtud to vypadá (alespoň pro kladná y) na

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = D \cdot e^{\frac{1}{2}x^2},$$

kde D je nyní libovolná kladná konstanta. Zastavme se ale pozorněji u výsledné formule a znamének. Konstantní řešení $y(x) = 0$ vyhovuje naší rovnici také a pro záporná y můžeme použít stejné řešení s zápornými konstantami D . Ve skutečnosti může být konstanta D jakákoliv a našli jsme řešení vyhovující jakékoliv počáteční hodnotě.

Zkuste si stejným postupem vyřešit nelineární model z předchozího odstavce, jde o docela přímočaře řešitelný postup tohoto typu.

$\boxed{7.13}$

7.13. Lineární diferenciální rovnice. Již jsme přemýšleli o operaci derivování jako o lineárním zobrazení z (dostatečně) hladkých funkcí do funkcí. Pokud derivace

$(\frac{d}{dx})^j$ jednotlivých řádů j vynásobíme pevnými funkcemi $a_j(x)$ a výrazy sečteme, dostaneme tzv. *lineární diferenciální operátor*:

$$y(x) \mapsto D(y)(x) = a_k(x)y^{(k)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0y(x).$$

Řešit příslušnou *homogenní lineární diferenciální rovnici* pak znamená najít funkci y splňující $D(y) = 0$, tj. obrazem je identicky nulová funkce.

Ze samotné definice je zřejmé, že součet dvou řešení bude opět řešením, protože pro libovolné funkce y_1 a y_2 platí

$$D(y_1 + y_2)(x) = D(y_1)(x) + D(y_2)(x).$$

Obdobně je také konstantní násobek řešení opět řešením. Celá množina všech řešení lineární diferenciální rovnice k -tého řádu je tedy vektorovým prostorem. Byť nemáme teď prostředky na jeho důkaz, platí tvrzení, že tento vektorový prostor je vždy dimenze k . Proto můžeme vždy řešení zadat jednoznačně počátečními podmínkami na hodnotu prvních $(k-1)$ derivací a samotné hodnoty funkce y v jednom bodě x_0 .

To vše jistě připomíná situaci s homogenními lineárními diferenčními rovnicemi, se kterými jsme se potýkali v odstavci 3.6 třetí kapitoly. Analogie jde i dále v okamžiku, kdy jsou všechny koeficienty a_j diferenciálního operátoru D konstantní. Už jsme viděli u takové rovnice prvního řádu (7.2), že řešením je exponenciála s vhodnou konstantou u argumentu. Stejně jako u diferenčních rovnic se podbízí vyzkoušet, zda takový tvar řešení $y(x) = e^{\lambda x}$ s neznámým parametrem λ může splnit rovnici k -tého řádu. Dosazením dostaneme

$$D(e^{\lambda x}) = (a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0(x)) e^{\lambda x}.$$

Parametr λ tedy vede na řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tehdy a jen tehdy, když je λ kořenem tzv. *charakteristického polynomu* $a_k \lambda^k + \dots + a_1 \lambda + a_0$. Pokud má tento polynom k různých kořenů, dostáváme bázi celého vektorového prostoru řešení. Pokud je λ násobný kořen, přímým výpočtem s využitím toho, že je pak také kořenem derivace charakteristického polynomu, dostaneme, že je řešením i funkce $x e^{\lambda x}$. Podobně pak pro vyšší násobnost ℓ dostáváme ℓ různých řešení $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{\ell} e^{\lambda x}$.

U obecné lineární diferenciální rovnice předepisujeme nenulovou hodnotu diferenciálního operátoru D . Opět úplně analogicky k úvahám o systémech lineárních rovnic nebo u lineárních diferenčních rovnic přímo vidíme, že obecné řešení takovéto (nehomogenní) rovnice

$$D(y)(x) = b(x)$$

pro nějakou pevně zadanou funkci $b(x)$ je součtem jednoho jakéhokoliv řešení této rovnice a množiny všech možných řešení příslušné homogenní rovnice $D(y)(x) = 0$. Celý prostor řešení je tedy opět pěkný konečněrozměrný afinní prostor, byť ukrytý v obrovském prostoru funkcí.

K diferenciálním rovnicím se vrátíme později, až budeme mít k dispozici další nástroje.

Literatura

- Došlá-Kuben**
- Došlá-Plch-Sojka**
- Horák**
- Horová-Zelinka**
- RHB**
- Šik**
- Slovák**
- Zlatoš**
- [1] Zuzana Došlá, Jaromír Kuben, Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2.
 - [2] Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
 - [3] Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta.
 - [4] Ivana Horová, Jiří Zelinka, Numerické metody, MU Brno, 2. rozšířené vydání, 2004, 294 s., ISBN 80-210-3317-7.
 - [5] Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.
 - [6] František Šik, Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu, MU, 1998, 176 s. ISBN 80-210-1996-2.
 - [7] Jan Slovák, Lineární algebra. učební texty, Masarykova univerzita, elektronicky dostupné na www.math.muni.cz/~slovak
 - [8] Pavol Zlatoš, Lineárna algebra a geometria, skripta MFF Univerzity komenského v Bratislavě.