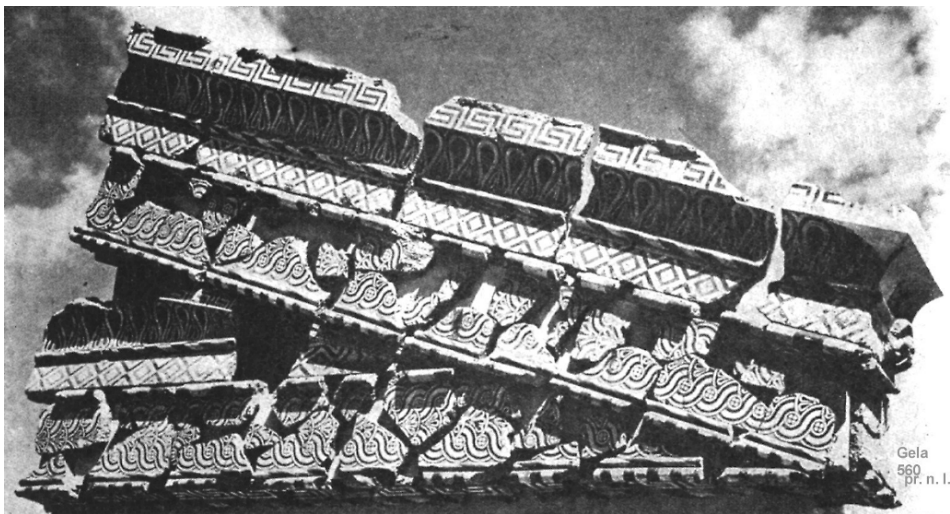


## MOZAIKY generované počítačem

Mozaiky jsou staré jako lidstvo samo



1

Mozaiky jako součást ornamentální výzdoby prošly všemi slohy až po dnešek.

Secesní ornamentikou se prakticky uzavírá dlouhý vývoj evropského ornamentu a někteří výtvarníci mluví o tom, že nastala krize ornamentu.

Celá chyba 19. století je v tom, že se domnívalo, že všechna zásadní řešení tvarových problémů může najít už hotová v pokladnici historie. (...)

Ornament znamená práci navíc. To je modernímu člověku cizí, a ještě cizější je mu ornament primitivů, který má skrz naskrz náboženský a eroticko-symbolický význam a díky své primitivnosti hraničí s uměním. Čím hlouběji stojí nějaký národ, tím přebujelejší je jeho ornament a jeho šperk. (Adolf Loos: *Řeči do prázdna, 1897-1900*).

Nikdy jsem neměl na mysli to, co puristé dohnali ad absurdum, že má být ornament systematicky a důsledně vyhlazen. Jenom tam, kde už jednou z historické nutnosti vymizel, není ho možno znovu uvést v život. Právě tak, jako se člověk nikdy nevrátí k tetování svého obličeje. (Adolf Loos *později*). (!?)

Dekorace je ožehavá záležitost, ale čistý, jednoduchý „ornament“ je jako znamení: Je to syntéza, výraz řádu. Dělat „ornament“ je kategorická disciplína. (Le Corbusier: *Mé dilo*).

Konjunktura dekoru: Proč se dneska široká fronta spotřebitelů zase vrací ke kytíčkám, k výzdobě, k dekoru? Z mnoha důvodů. Především je čistý tvar sám o sobě nesmírně náročný pro výrobce i spotřebitele. (K. Pawek: *Resopal - Forum*).

K úměrnosti dneška přes meziválečné Art Deco.

2

Př. Fa ELAN (1972)



3

Př. 2 Nejde jen o fyzikální vlastnosti

## Moderní ornament



4

**Matematikové se věnují mozaikám až ve 20. st., především na popud krystalografie.**

Symetrie, at' v širším nebo užším smyslu slova, je idea, pomocí níž se člověk odedávna snažil vysvětlit a vytvořit řád, krásu a dokonalost. (Hermann Weyl, 1952)

Mezi starověkými dekorativními vzory jsou obsaženy všechny typy symetrického pokrytí roviny libovolnými obrazy. Je jich sedmnáct a znali je již staří Egypťané. Vrcholu dokonalosti dosáhli Maurové. Matematický důkaz podal až G. Pólya v r. 1924.

Rus E. S. Fjodorov a Němec A. Schönfliese odvodili všechny grupy symetrií v prostoru. Od té doby (1891) zná krystalografie 230 grup.

Později matematikové rozšířili krystalografické grupy tak, že periodické opakování tvarů spojili s periodickým opakováním barev.

Teorie polychromatické symetrie doplňuje 17 krystalografických grup o dalších 46 dvoubarevných, 6 trojbarevných, 6 čtyřbarevných a 3 šestibarevných.

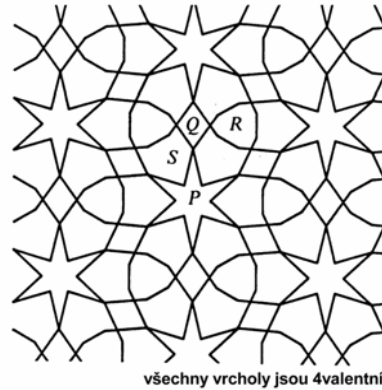
Matematikové dokázali, že existuje právě 1191 dvoubarevných prostorových grup.

...  
atd.

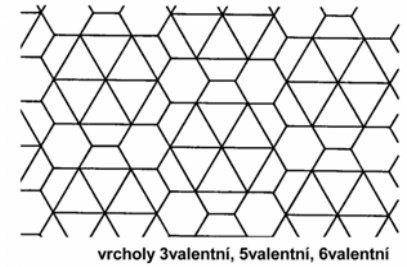
**MOZAIKA - několik úvodních pojmů**

Př. Mozaika je tvořena čtyřmi dlaždicemi

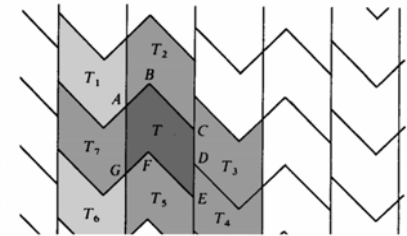
- P 12úhelník (hvězdicový 6úhelník)
- Q rovnoběžník
- R konvexní 9úhelník
- S 7úhelník



Př. Mozaika tvořena 3úhelníky, 4úhelníky, 6úhelníky



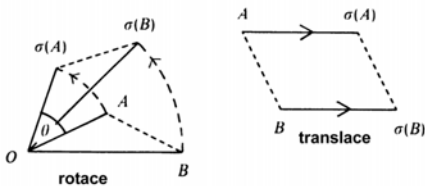
dlaždice sousední a přilehlé, rohy a strany, vrcholy a hrany



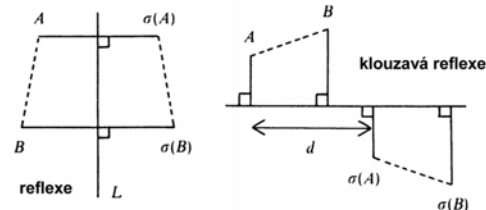
**MOZAIKA - několik úvodních pojmů**

Izometrie - kongruentní transformace, shodná zobrazení v rovině:

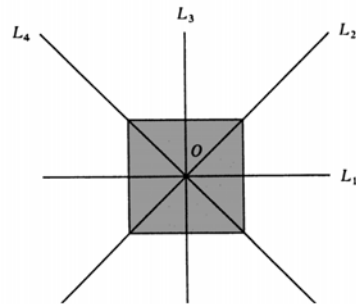
$\sigma: E^2 \rightarrow E^2$



Pozn. Násobnost rotace n (n-fold rotational symmetry) rotace o  $2\pi/n$ .



Př. Základní symetrie čtverce: ("pohyb zachovávající polohu")



- identita 1
- rotace kolem O (proti r. h.) o úhel  $\pi/2, \pi, 3\pi/2$  3
- reflexe podle os L 4
- celkem 8

další jsou již "odvozené"  
př. reflexe podle symetrály  $L_2 L_3$  a rot. o  $\pi/4$

Připomeňme z počítačové grafiky:

**Transformační matice  $P \rightarrow P'$**

Posunutí (translation)

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix} \quad T(T_x, T_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

$P' = P \cdot T(T_x, T_y)$

Změna měřítka (scaling)

(0,0) fixed point

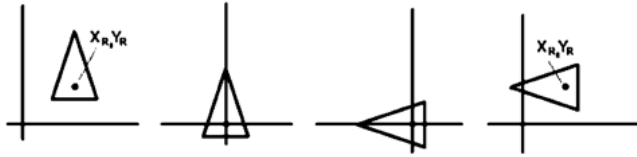
$$S(S_x, S_y) = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P' = P \cdot S(S_x, S_y)$$

Otočení (rotation)

$\Theta$  rotation angle  
(0,0) rotation point

$$R(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P' = P \cdot R(\Theta)$$

### Rotace kolem pívotu



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -X_p & -Y_p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ X_p & Y_p & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ (1 - \cos \Theta) \cdot X_p + Y_p \sin \Theta & (1 - \cos \Theta) \cdot Y_p - X_p \sin \Theta & 1 \end{pmatrix}$$

### Reflexe k souř. osám (překlopení kolem osy)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_X \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_Y$$

9

### Ornamentální mozaiky (ornamenty, mozaiky, dláždění, parketáž, ...)

Vytvářejí výzdobu s typickou rytmickou strukturou a plní podmínku pokrytí a nepřesahování:

**Definice - mozaika:** Mozaika  $\mathcal{T}$  prostoru  $E^n$  je spočetný systém uzavřených množin nazývaných dlaždice:  
 $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots\}$  takových, že  $\text{int } T_i \cap \text{int } T_j = \emptyset$ , pro  $i \neq j$   
 a zároveň  $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i = E^n$  ( $\text{int } T$  je vnitřek množiny  $T$ ).

Z morfologického hlediska dělíme vzory do tří typů:

- ♦ Pro rozetový vzor (solitér) platí: existuje takový úhel  $\alpha$ , že množina  $\{R(k, \alpha)\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  je množinou všech otočení vzoru.
- ♦ Pro vlysový vzor (nekonečný pruh) platí: existuje takový vektor  $\vec{u}$ , že množina  $\{T(k, \vec{u})\}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  je množinou všech posunutí vzoru.
- ♦ Pro tapetový vzor (nekonečné pole) platí: existují takové lineárně nezávislé vektory  $\vec{u}, \vec{v}$ , že množina  $\{T(k, \vec{u} + l, \vec{v})\}$ ,  $\forall k, l \in \mathbb{Z}$  je množinou všech posunutí vzoru.

10

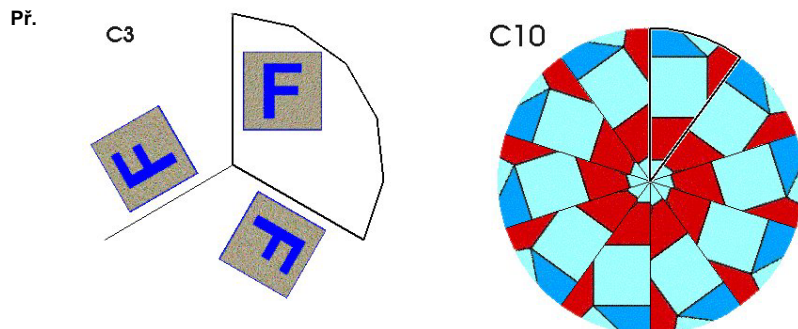
### Rozetové mozaiky

Rozety obsahují jen dva typy symetrií:

#### Cyklické rozetové mozaiky

Výseče (dlaždice, motivy, fundamentální jednotky) jsou kladeny v jednom směru.

vrcholový úhel =  $2\pi/n$ , kde  $n$  je počet segmentů

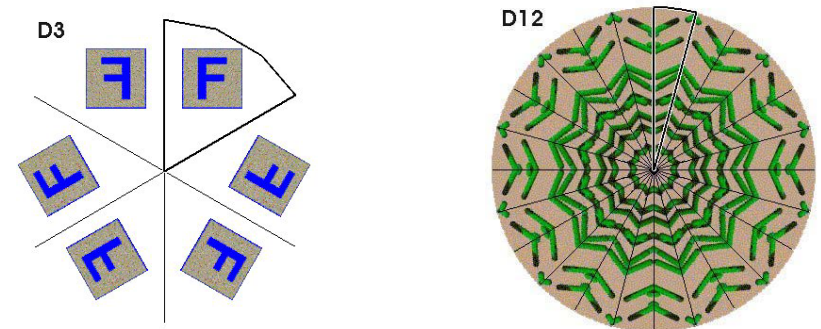


Notací jsou označovány jako rozety typu  $C_n$ , kde  $n$  je počet segmentů.

11

### Dihedrální („dvouzrcadlé“) rozetové mozaiky

Hrany segmentů tvoří osy reflexe, vrcholový (dihedrální) úhel segmentu =  $\pi/n$ , kde  $2n$  je počet segmentů



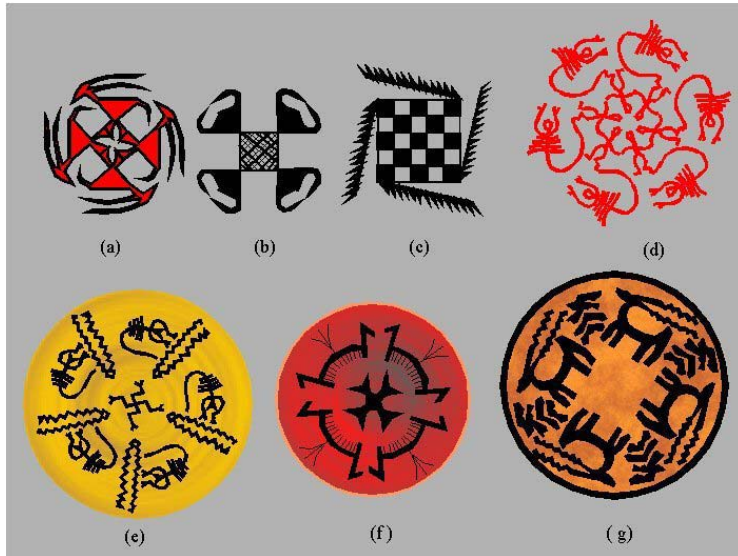
Notací jsou označovány jako rozety typu  $D_n$ , kde  $n$  je počet dvojic segmentů, vrcholový úhel =  $2\pi/n$ , kde  $n$  je počet segmentů

12

Př. Rozety ze studie S. Jablana, 1:

Neolit,  
5500-5000 př.n.l.  
stř. Asie.

- a C4
- b D4
- c C4
- d C6
- e C5
- f D4
- g C4



13

Př. Rozety ze sbírky S. Jablana, 2:

Evropa Středomoří  
kol. 2500 př.n.l.

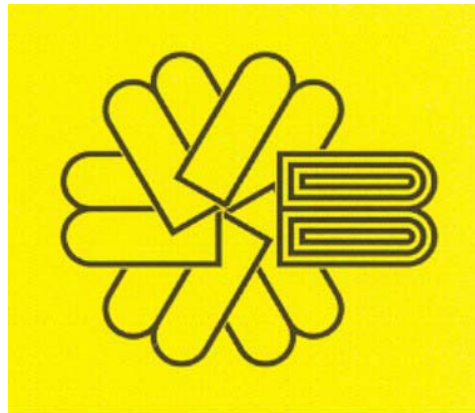
- a C4
- b C4
- c C4
- d C4
- e D3



14

Výtvarnou hodnotu rozet vytváří především design výsečí a tvarování jejich hran.

Př. Stará a nová rozeta (hodinky a logotyp SBB)



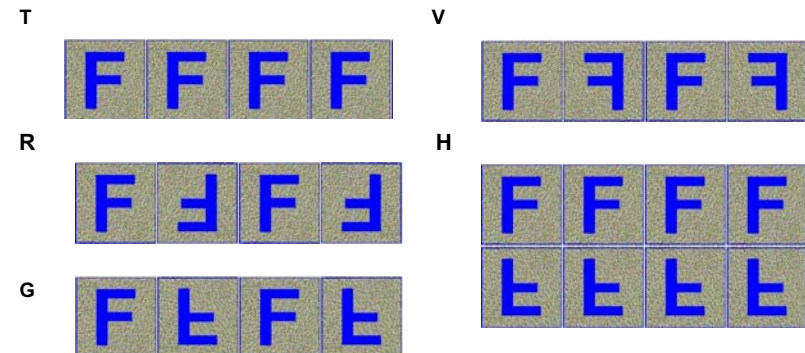
15

Pásové mozaiky – vlysy (Frieze Groups)

Aplikujeme (resp. hledáme) symetrie (izometrie) v nekonečném pásu dlaždic.  
Vlys definuje soubor použitých symetrií (transformací), který, definuje grupu symetrií.

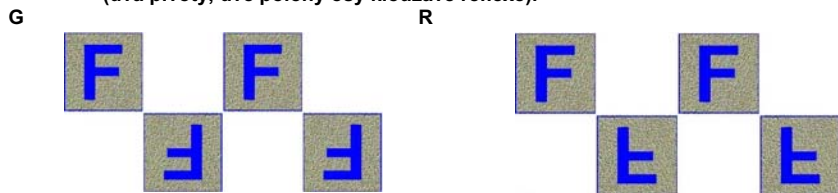
Planární pásová mozaika může obsahovat pět symetrií (včetně klouzavé).

Translace  $T$ , reflexe podle os  $V$  a  $H$ , rotace  $R$  (o  $\pi$ ) a klouzavá reflexe  $G = HT = HT$ .



16

Doplňme: Rotace a klouzavá reflexe mohou mít dvojitý kladení dlaždic (dva pivoťy, dvě polohy osy klouzavé reflexe).



Pět planárních symetrií vlysu vytvoří jen sedm vzorů!

Typ (grupa) I1



Typ I2



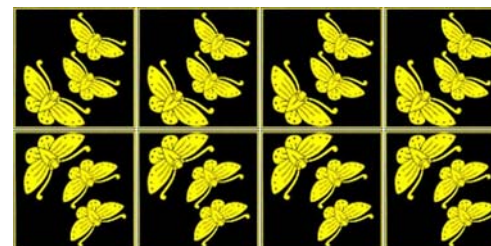
Typ I<sub>g</sub>



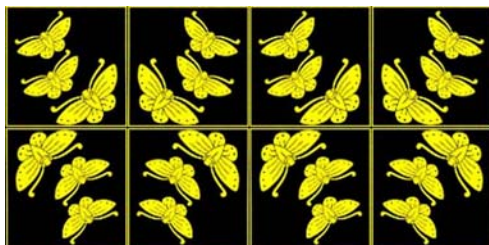
Typ m<sub>l</sub>



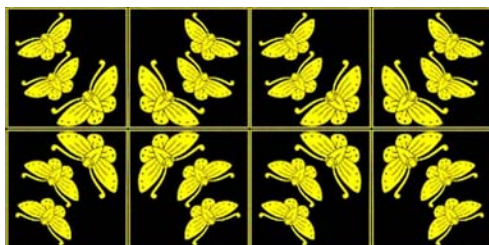
Typ I<sub>m</sub>



Typ m<sub>g</sub>



Typ m<sub>m</sub>



Př. 1. Pásové mozaiky ze studie S. Jablana 3:

Středomoří

5000 – 3000 př.n.l.

a - c grupa I<sub>2</sub>



(a)



(b)

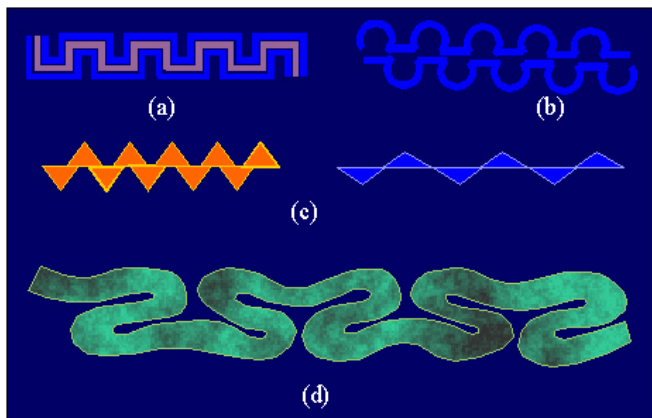


(c)

Př. 2. Pásové mozaiky ze studie S. Jablana 2:

10000 – 6000 př. n.l.

- a Palestina
- b Jugoslávie
- c Egypt
- d Mykény
- a – d grupa mg



Př. 3. Lidové pásové vzory domácí

Hornácko



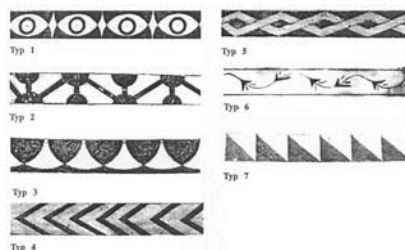
Čičmany



Př. Vlysové mozaiky z ostrova Pírgi - reverzace barev (D. A. James, ...)

- Typ 1: XXXXX Horizontální reflexe ( $m_h$ ), vertikální reflexe ( $m_v$ ), 2 násobná rotace ( $180^\circ = \frac{1}{2} 360^\circ$ )
- Typ 2: WWWW Vertikální reflexe, 2 násobná rotace, klouzavá reflexe (g)
- Typ 3: AAAAA Vertikální reflexe
- Typ 4: EEEEE Horizontální reflexe

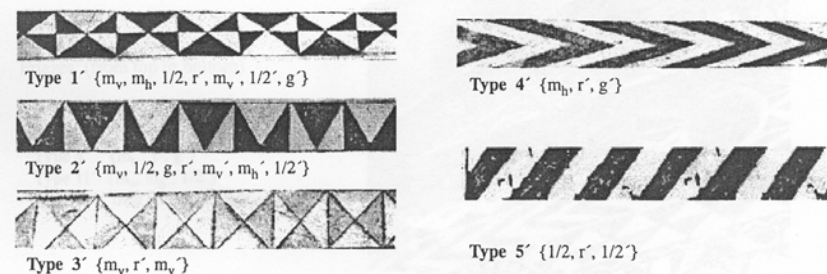
- Typ 5: SSSSS 2 násobná rotace
- Typ 6: qdqdqd Klouzavá reflexe
- Typ 7: RRRRR Pouhá translace



Poznámka: Translace je přítomná vždy!  
Vytváří pás vlysu.

Vlysové mozaiky vytvoříme i 2 násobnou rotací a translací s reverzací barev ( $r'$ ).

Tak můžeme vytvořit další variace, např.:

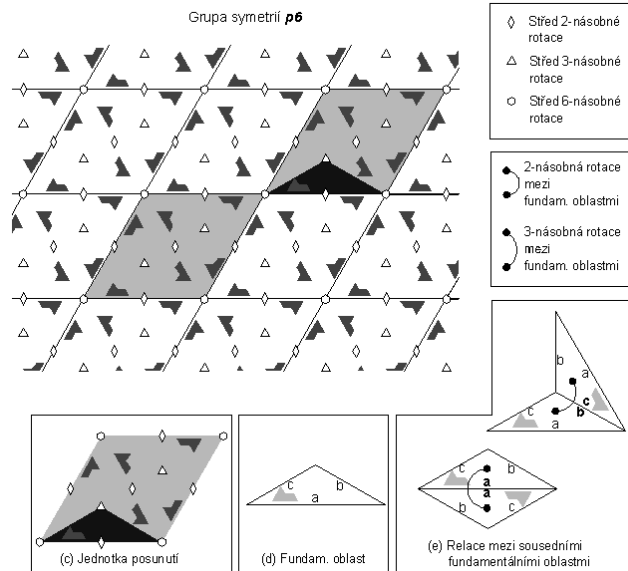


**Pamatujme:**

Jde-li o vícebarevnou mozaiku a symetrie mají respektovat i barvy, pak se obsah grupy symetrií daného vzoru může podstatně změnit.

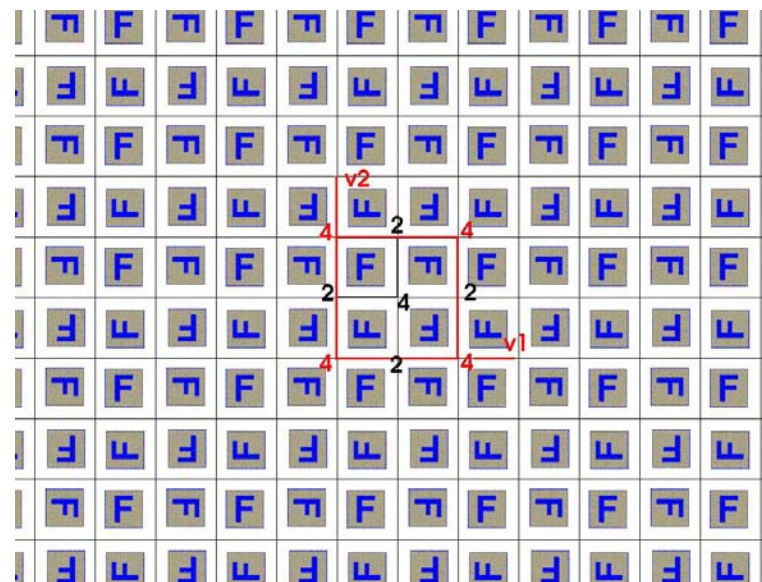


Př.  
 Redukovaný  
 „katalogový“ list grupy  
 planárních symetrií  
 V. Ostromoukova (lit.).



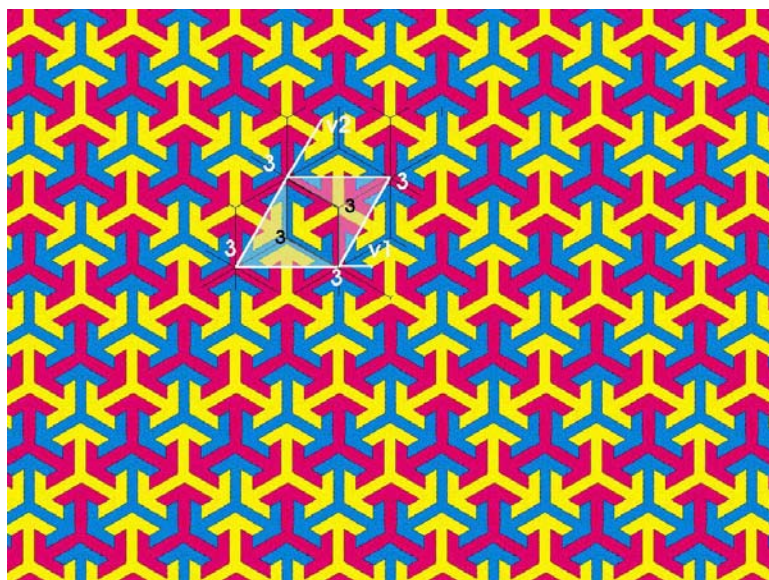
29

Př 1. Mozaika s grupou  $p4$



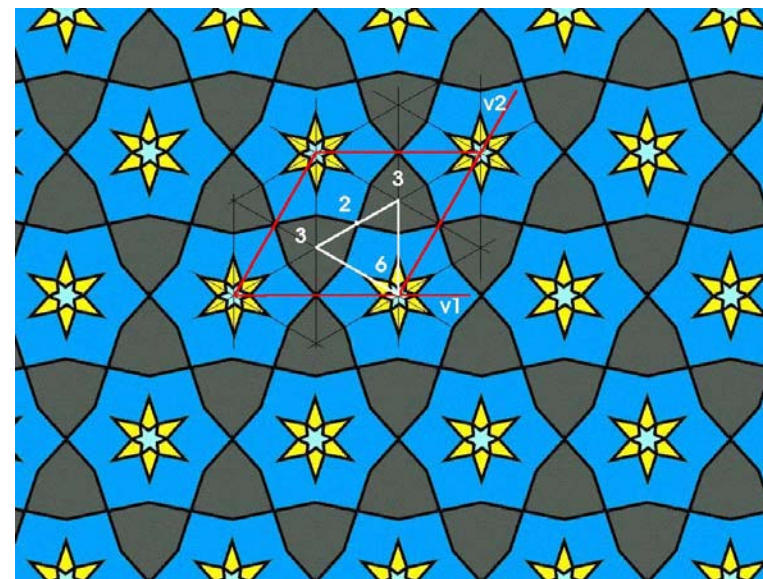
30

Př 2. Mozaika s grupou  $p3$



31

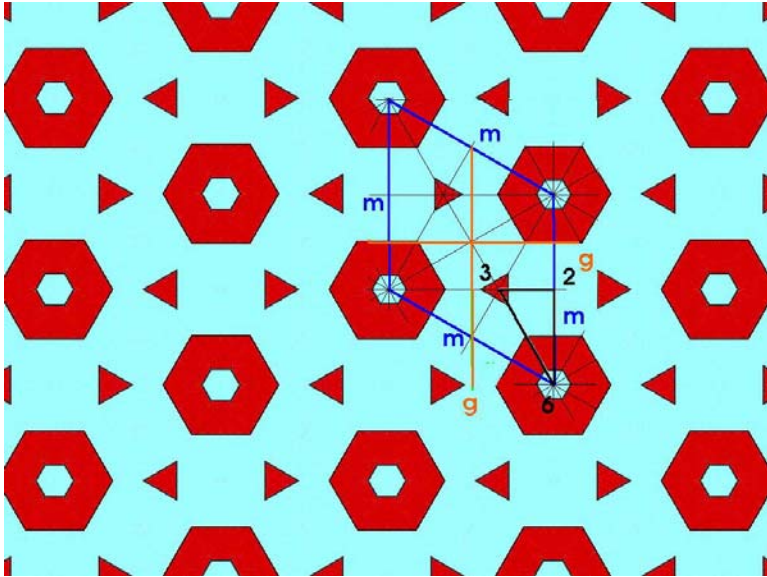
Př 3. Mozaika s grupou  $p6$



32

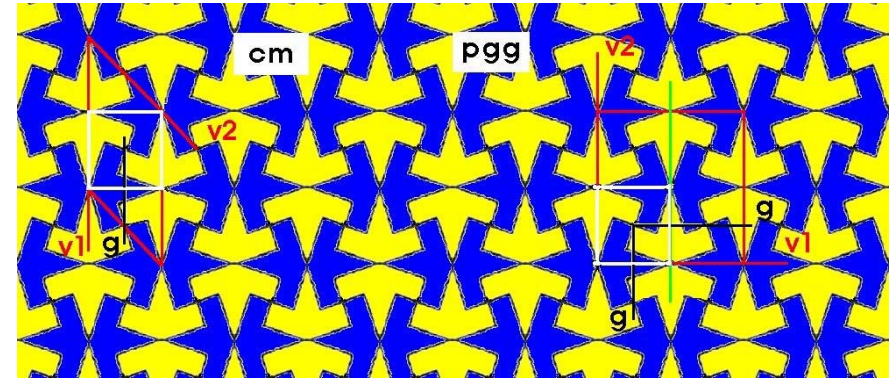


Př 4. Mozaika s grupou mp6



33

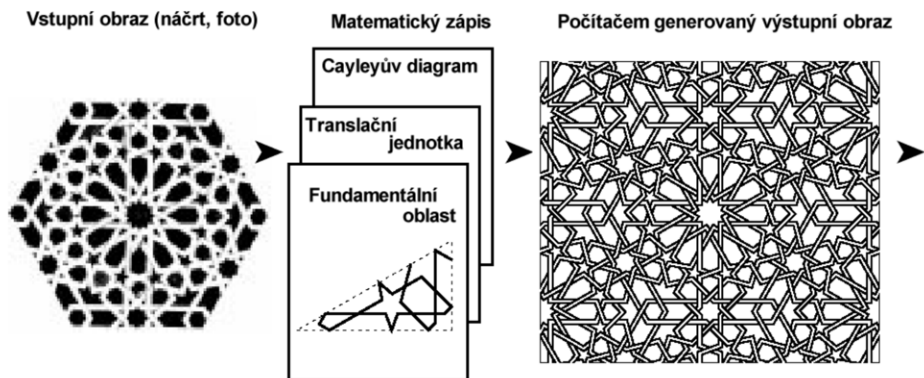
Poznámka: Určení fundamentální oblasti a translační jednotky (mřížky) není jednoznačné !!!



Je-li více možností volíme „praktičtější“ variantu ( př.nedělíme dlaždici).

34

Kompletně vyřešený problém (Victor Ostromoukhov 1998)



Do tapetových mozaik patří i většina mozaik M. C. Eschera. Escherovým mozaikám bude věnováno samostatné téma.

35

Staří Japonci znali všech 17 grup planárních symetrií (autor: Urabe).

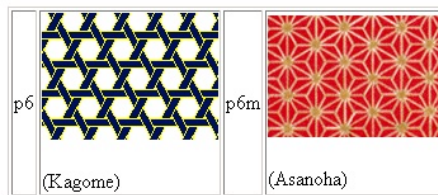
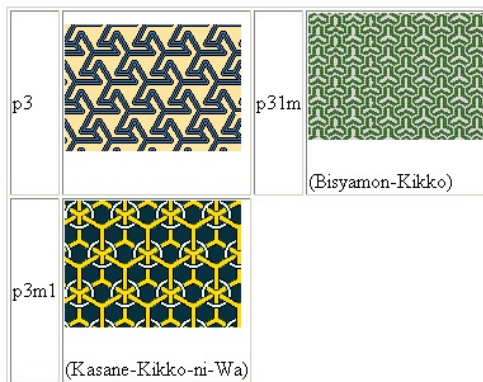
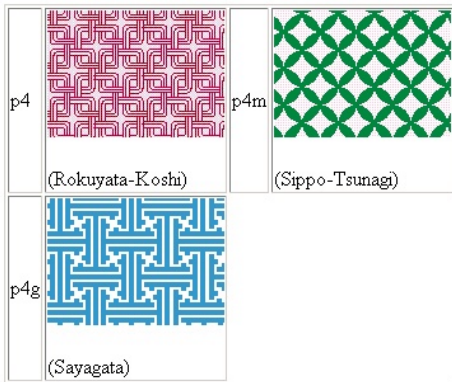


Bez rotací: p1, pg, pm, cm.

S dvojnásobnou rotací, bez čtyřnásobné a šestnásobné rotace:

p2, pgg, pmg, pmm, cmm.

36

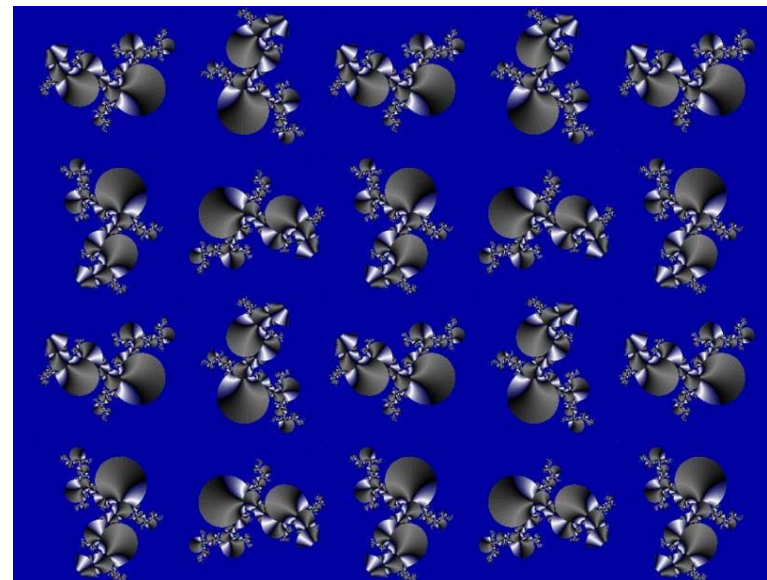


Se čtyřnásobnou rotací: p4, p4g, p4m.

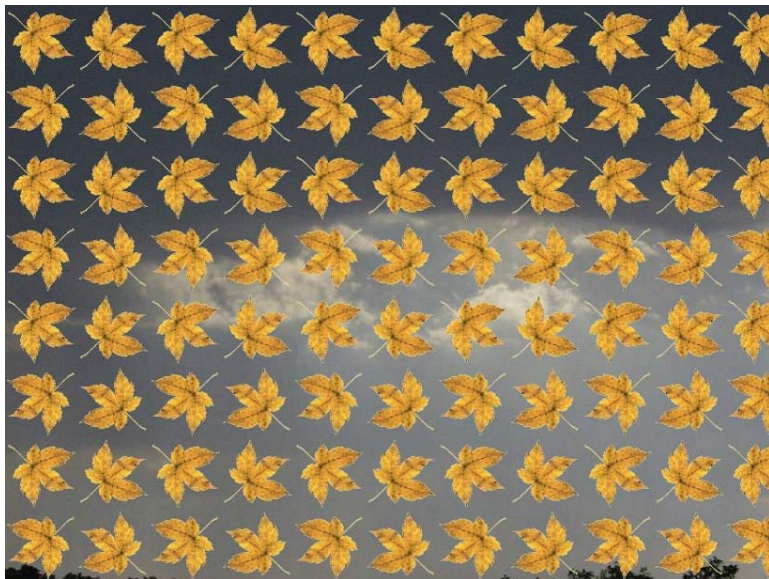
S trojnásobnou rotací, bez rotace šestinásobné:  
p3, p3m1, p31m.

S šestinásobnou rotací: p6, p6m

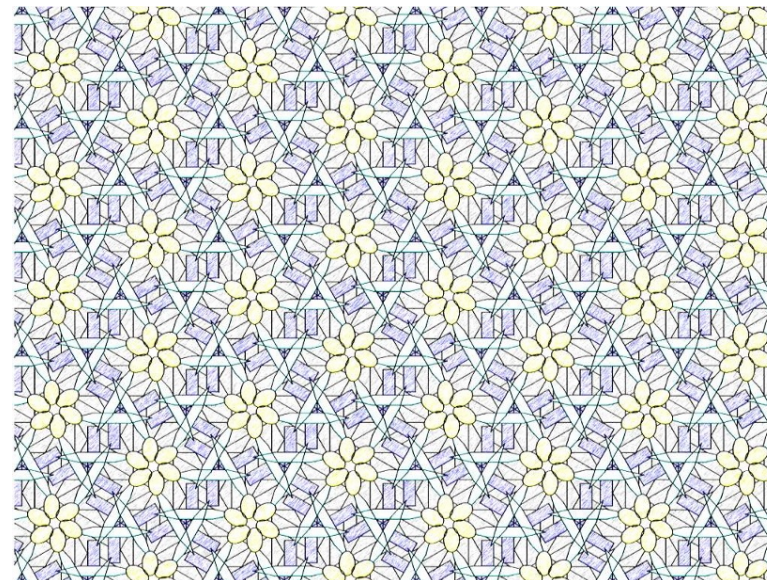
Př. 5



Př. 6



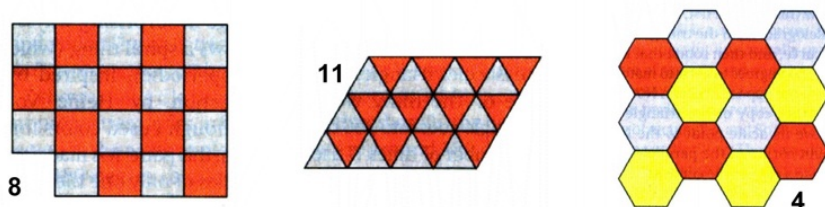
Př. 7



## Regulární polymorfni dělení roviny

Připomeňme:

Jen tři pravidelné mnohoúhelníky mohou úplně pokrýt rovinu

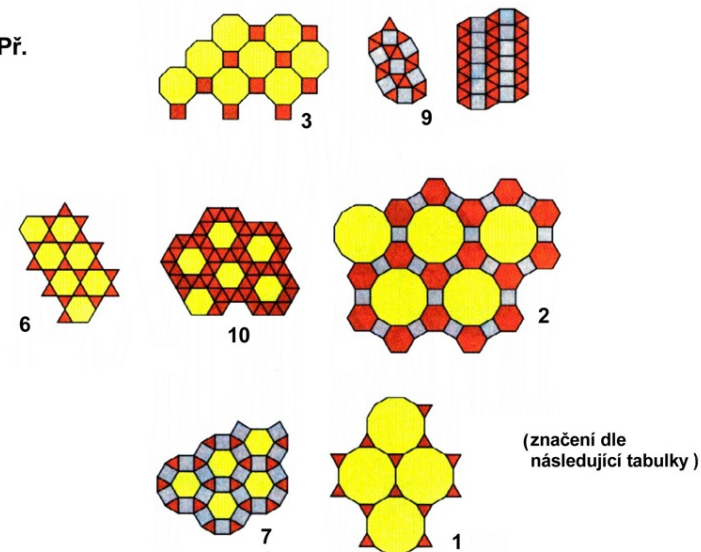


Regulární izomorfni mozaika je výtvarně "chudobná"

41

## Polymorfni mozaika je bohatší

Př.



(značení dle následující tabulky)

42

Kolik vzorů můžeme vytvořit?

Vnitřní úhel pravidelného  $n$ -úhelníka  $\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$   
( $n$  počet stran)

Zvolené  $n$ -úhelníky mají společné vrcholy a součet vnitřních úhlů je  $360^\circ$

Př. Pro mozaiku tvořenou třemi  $n$ -úhelníky platí:  $n_1, n_2, n_3$ ,

$$\left( \frac{n_1-2}{n_1} + \frac{n_2-2}{n_2} + \frac{n_3-2}{n_3} \right) \cdot 180^\circ = 360^\circ$$

po úpravě 
$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$$

podobně 
$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} = 2$$

43

Vytvoříme tabulku variant:

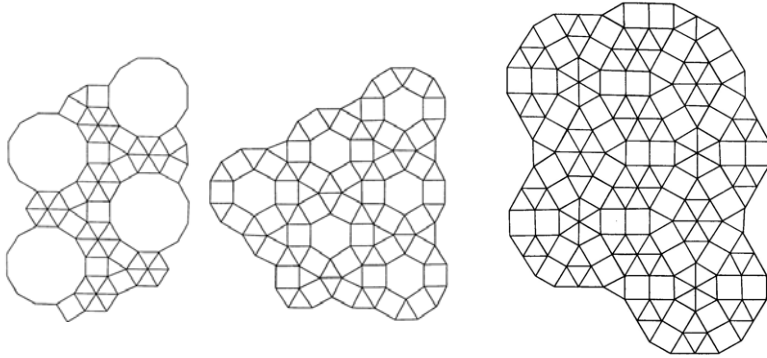
$N^\circ$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$N^\circ$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$N^\circ$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$n_6$
1	3	12	12	5	3	3	4	12	9	3	3	3	4	4	
2	4	6	12	6	3	3	6	6	10	3	3	3	3	6	
3	4	8	8	7	3	4	4	6	11	3	3	3	3	3	3
4	6	6	6	8	4	4	4	4	...						
									16						

Některé varianty nedovolují opakování vzoru a jsou vyloučeny.  
(3,7,42 3,8,24 3,9,18 atd.)

Pokud dovolíme různé rozložení dlaždic ve společných vrcholech,  
vytvoříme semiregulární polymorfni mozaiky.

44

## Semiregulární polymorfni mozaiky



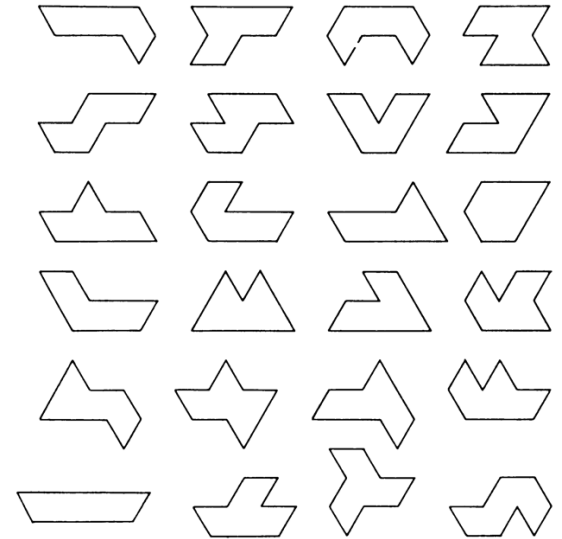
Závěr: izomorfni regulární 3  
 polymorfni regulární 7  
 semiregulární polymorfni 15  
**CELKEM 25 VARIANT**

45

## Mozaiky s kombinovanými dlaždicemi

Některá spojení regulárních dlaždic vytvářejí dlaždice splňující podmínku „teselace“.

Př. T. H. O'Beirne spojil sedm rovnostranných trojúhelníků:



(J. Bishop dokázal, že jen jedna dlaždice nevyhovuje podmínce.)

Konstrukce mozaik vycházející z čtvercového motivu vytváří tzv. polyminové mozaiky.

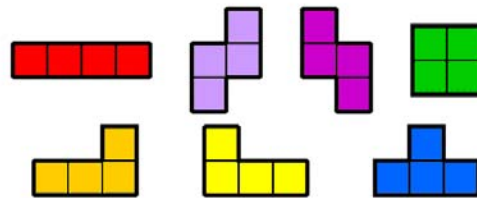
46

## POLYMINOVÉ MOZAIKY

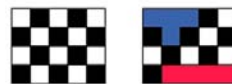
### Tetromina

Základní množina obsahuje 5 dlaždic

Reflexní množina užívá všech 7 dlaždic.



testovací šachovnice (T má nestejný počet obou polí)



Mozaiky tetromina

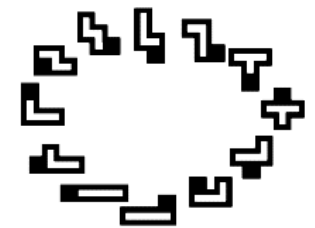
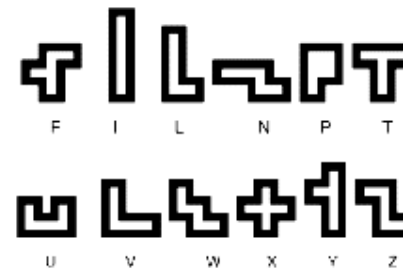


47

### PENTOMINA

Nepočítáme-li otáčení a zrcadlení, dostaneme 12 základních dlaždic.

Abeceda pentomina je úplná,



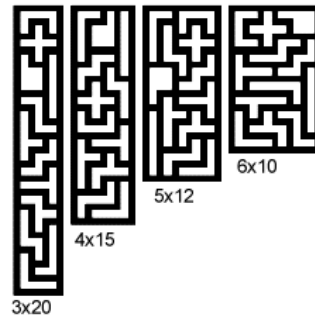
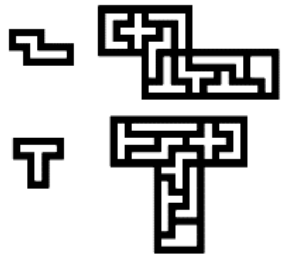
dlaždice konstruujeme přemísťováním jediného čtverce.

Poznámka:

Z pěti kostek (krychlí sousedících nejméně jednou stěnou) lze konstruovat prostorová pentomina, která mají 29 základních 3D elementů – „dlaždic“.

48

Nekonečná regrese pentominových elementů:  
Každou dlaždici pentomina lze složit  
z 9 stejných dlaždic třetinové velikosti.



Z 12 pentominových dlaždic lze složit čtyřúhelník.  
Př. Obdélník 6 x 10 lze složit v 2339 variantách.

Viz program Güntera Albrechta Büchlera (<http://pubweb.nvu.edu/~qbuechler/programs.htm>).  
Matematika polymin - Solomon W. Golomb: Polyominoes, Charles Scribener Sons, NY, 1959.

Kreace Güntera Albrechta Büchlera:

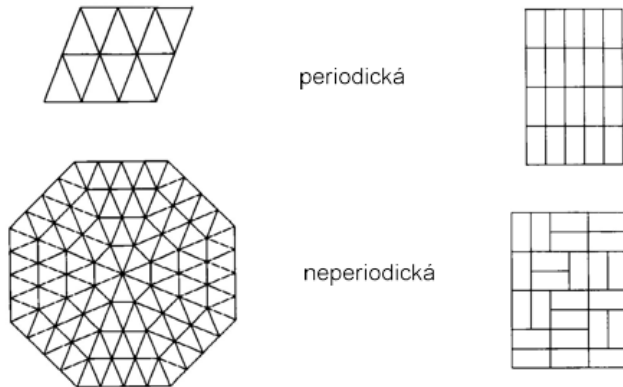


### Neperiodické mozaiky

Neperiodické mozaiky (nemají translační jednotku) ruší pravidelnost a proto jsou atraktivnější.

*Poznámka:* Neperiodické mozaiky dovolují i periodickou verzi provedení!

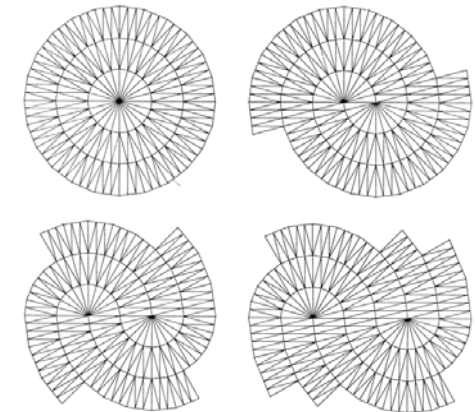
(není však typická)



### SPIRÁLOVÁ DLÁŽDĚNÍ

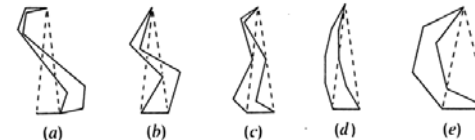
Voderbergovo neperiodické dláždění  
(1936 – 37)

Dlaždice tvoří rovnostranný trojúhelník

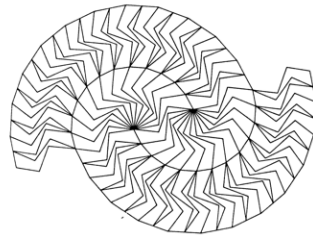


zajímavých efektů docílíme modifikací dlaždic

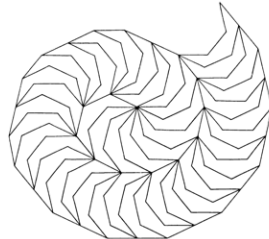
př.



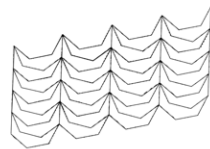
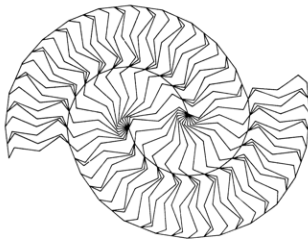
Variety spirálového dláždění:



ad e - neperiodické



ad e - periodické



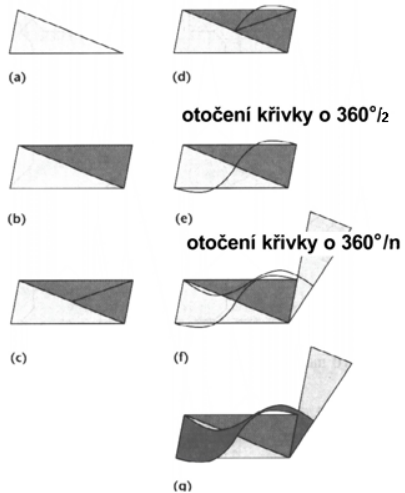
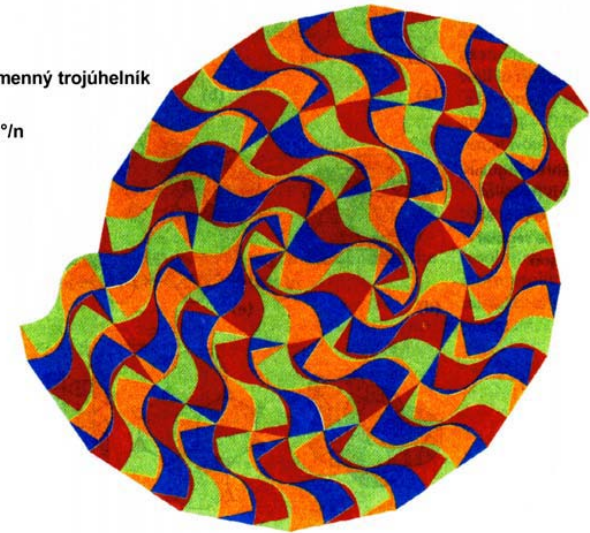
Příklad konstrukce (H. Voderberg, A. Glassner)

Základem je rovnoramenný trojúhelník

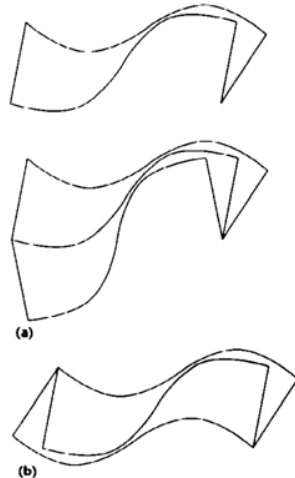
Vrcholový úhel =  $360^\circ/n$

n sudé číslo

Př. n = 16



dvě možná přiřazení

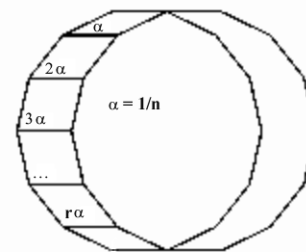


SPIRÁLOVÉ MOZAIKY JEDNODUŠŠÍ KONSTRUKCE

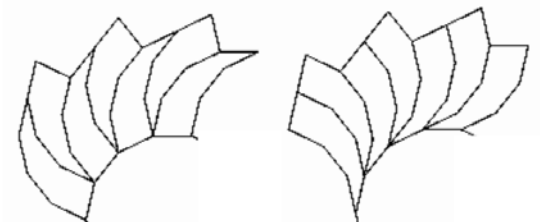
Spirálové mozaiky z dlaždic získaných překrytím n-úhelníka (1978 – 1980)  
Paul Galiunas je dělí do dvou základních skupin:

Zubaté (hvězdicové) spirálové mozaiky

Srpkovitá dlaždice a její dílce (kosočtverce) úplně pokrývají rovinu.



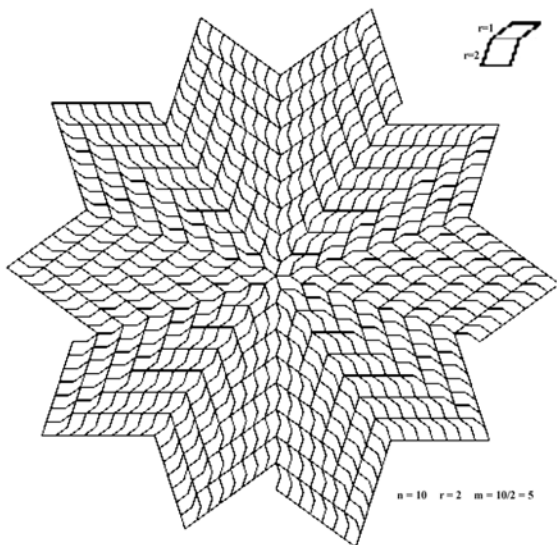
Dva způsoby přiložení tvoří totožné zuby.



Počet startovních ramen je dán poměrem  
 $m = n/r$ ,  
počet cípů spirály je n.

Př. 1

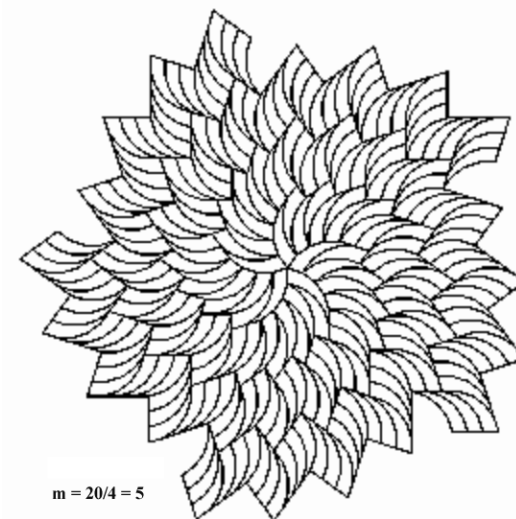
Spirála o pěti ramenech  
z desetiúhelníka má  
deset cipů (zubů):



57

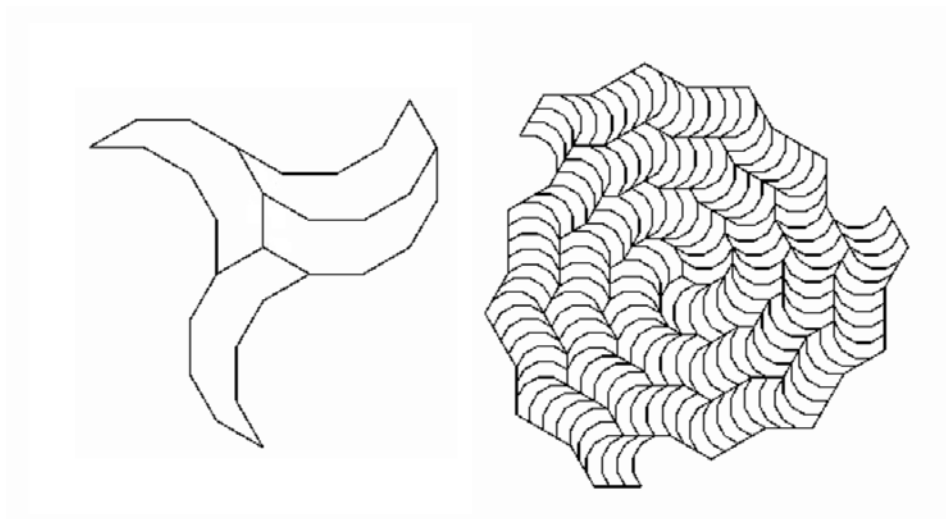
Př. 2

Pětiramenná spirála  
z dvacetiúhelníka:



58

Př. 3 Modifikace kladení dlaždic dává další možnosti:



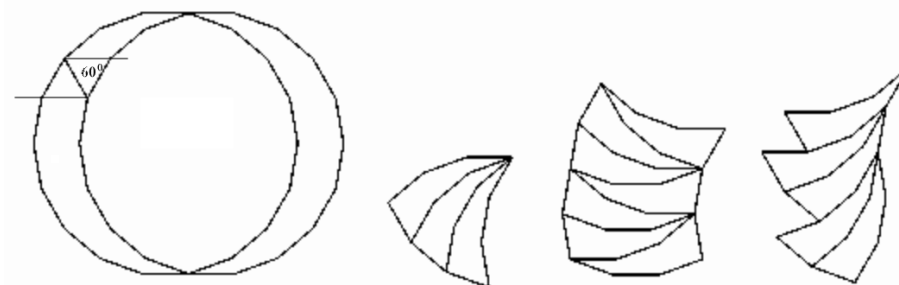
59

Zavinuté spirály (méně zubaté)

(Grunbaum a Shephard (1979)– Versatiles)

Počet vrcholů  $n$  je násobek šesti!!!

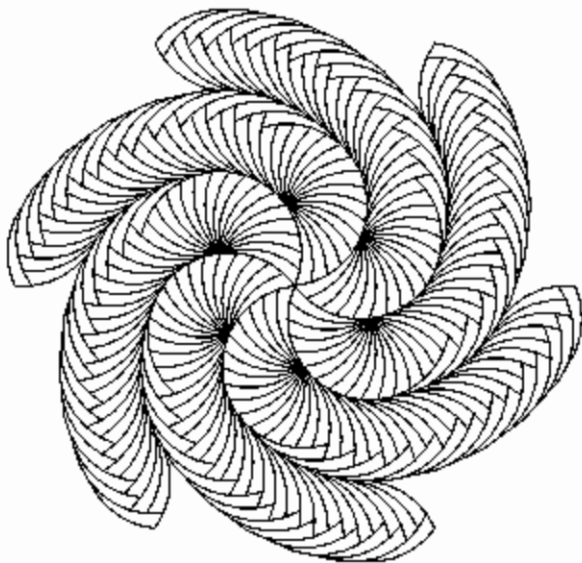
Krátká strana dlaždice půlí kosočtverec, jehož úhel  $\alpha = 60^\circ$ .



Různé způsoby přikládání dlaždic dávají další možnosti.

60

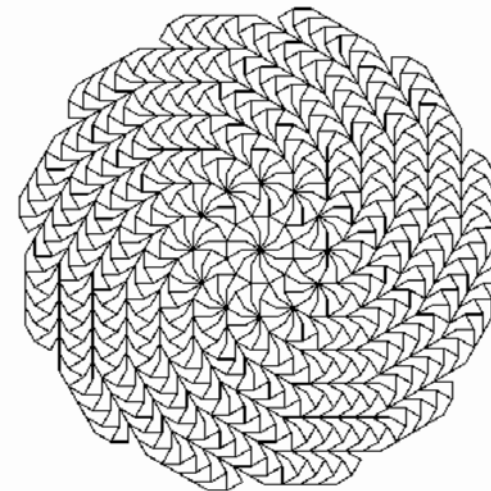
Př. 4  
Šestiramenná spirála  
z třicetiúhelníka:



61

Omezíme-li počet vrcholů  $n$ -úhelníka na dvanáct, můžeme vytvořit další varianty.

Př. 5  
Jedna z mnoha variant versatílek -  
dvanáctiramenná spirála  
z dvanáctiúhelníka:

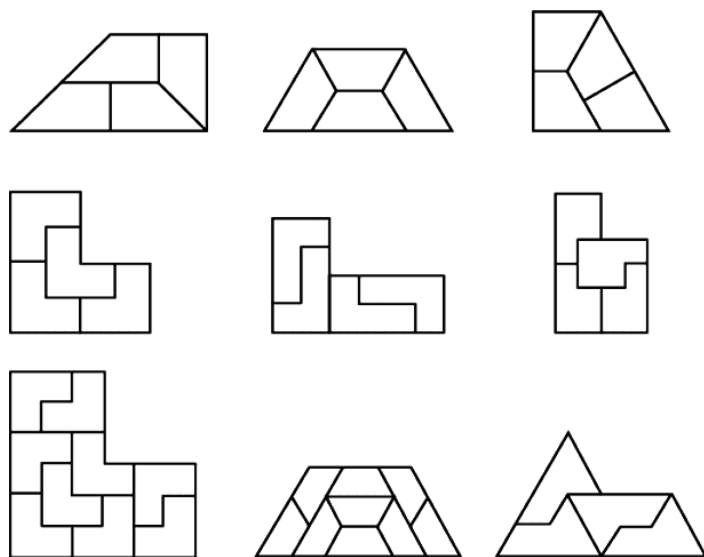


*Poznámka:*  
Počty různých variant a mutací jsou  
matematically dokazatelné.

62

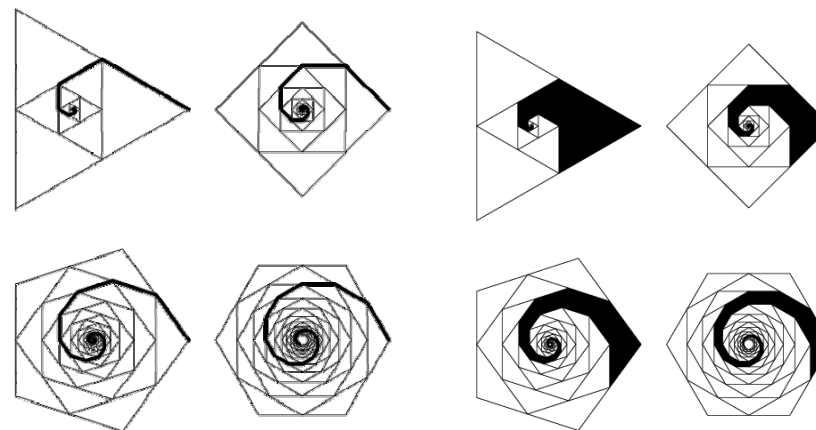
Samostatnou skupinu tvoří „vnořené“ dlaždice (Reptiles) a hierarchické dláždění

Př.



63

*Poznámka:* Vnořování (reptile) jako generátor spirál:



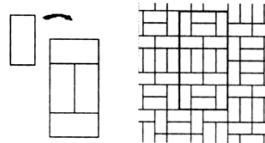
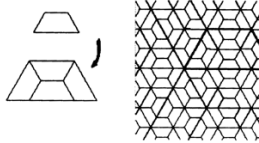
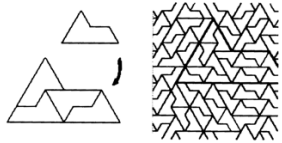
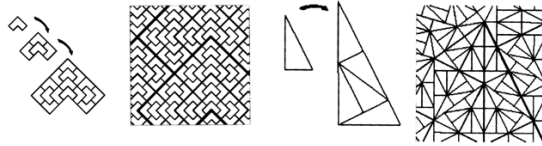
64



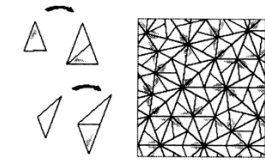
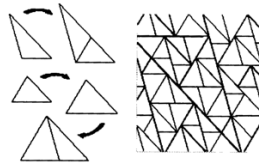
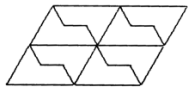
**Je řada dalších neperiodických vzorů:**

Hierarchické mozaiky jako příklad neperiodických mozaik

Rozkladová pravidla:

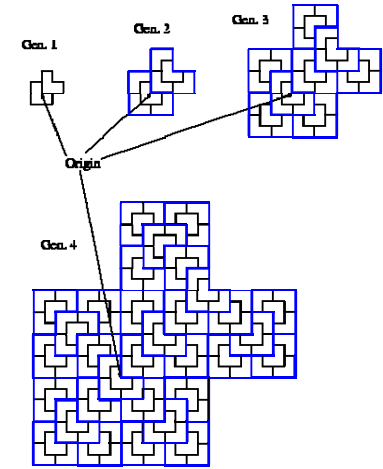
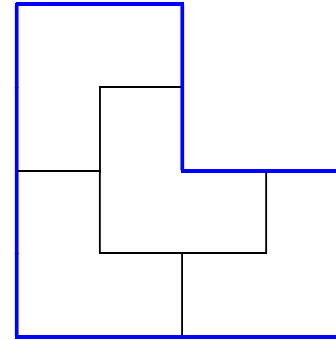


periodická varianta



**Neperiodická mozaika z L dlaždic je vlastně fraktál (viz příslušné téma)**

Základní seskupení prvků a konstrukce mozaiky



Proces bývá označován jako inflation

**Konec části 1.**