

APERIODICKÉ MOZAIKY

SHRNUTÍ: Máme neomezené množství dlaždic (motivů) a možnost neomezeným pokrýváním (dlážděním) roviny všemi směry vytvořit vzor (ornament, mozaiku).

Můžeme-li z vytvořeného vzoru vyjmout shluk sousedících dlaždic a tímto shlukem bez změny měřítka a bez otočení, pouhou translací, jako razítkem pokrýt (orazítkovat) celou rovinu, mluvíme o periodickém vzoru.

Pokud takový shluk nevytvoříme, mluvíme o vzoru neperiodickém.

Většina dlaždic je schopna vytvářet vzory periodické i neperiodické.

Pokud dlaždice vytvářejí vzory pouze neperiodické (periodické uspořádání neexistuje), mluvíme o dlaždicích a vzorech aperiodických.

Aperiodické vzory jsou výtvarně nejhodnotnější. Dovolují nejlepší balancování mezi pravidelným opakováním ornamentů a jejich nahodilým výskytem.

Existují aperiodické mozaiky?

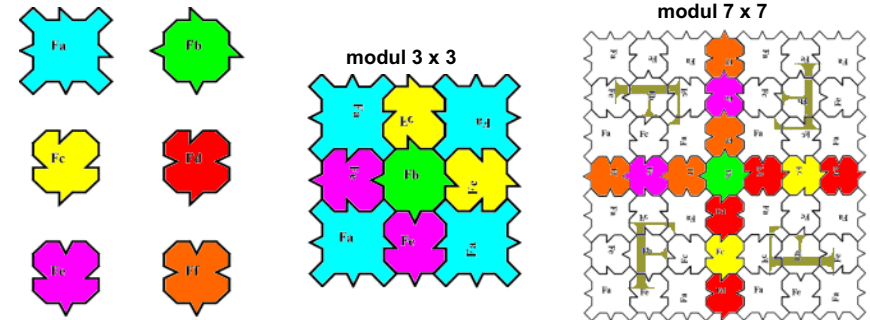
Jaké bude nejmenší množství aperiodických dlaždic?

Odpověď hledají matematikové:

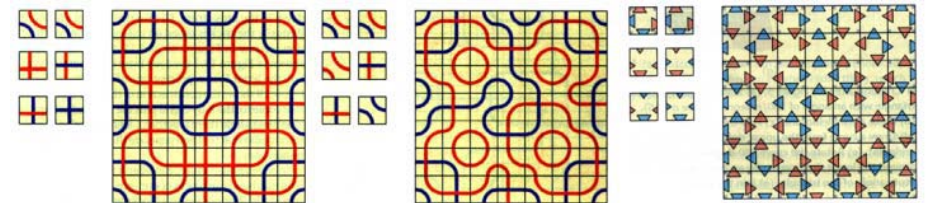
- 1961 – Hao Vang Není aperiodických dlaždic!
- 1964 – Robert Berger Souborem 26 tisíc dlaždic (kostek domina V.) vytváří aperiodický vzor. Později tvoří aperiodický vzorek ze 104 dlaždic (Amman jde na 14).
- Donald Knuth Tvoří aperiodický vzorek z 92 dlaždic.
- 1977 – Robert Ammann a Raphael Robinson Nezávisle tvoří aperiodický vzorek ze 6 dlaždic.
- 1974/88 – Roger Penrose Začal se sadou 6 dlaždic, nakonec mu stačí 2 dlaždice!!!

1

Šest aperiodických dlaždic Raphaela Robinsona

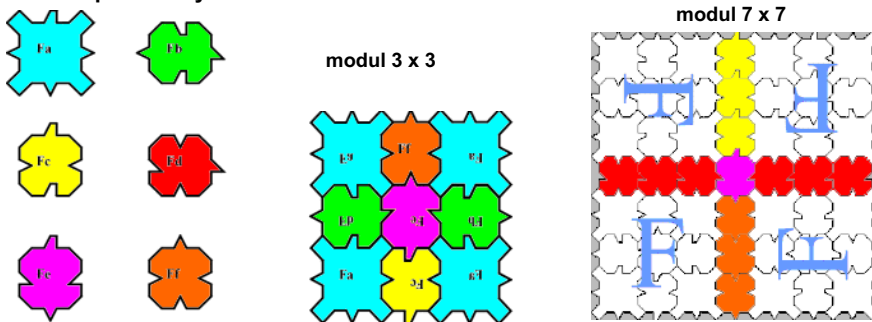


Př. Tři vzory A. Glassnera

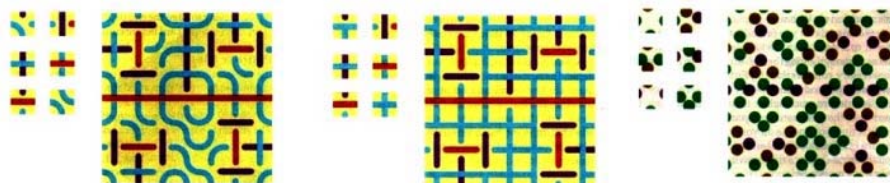


2

Šest aperiodických dlaždic Roberta Ammanna



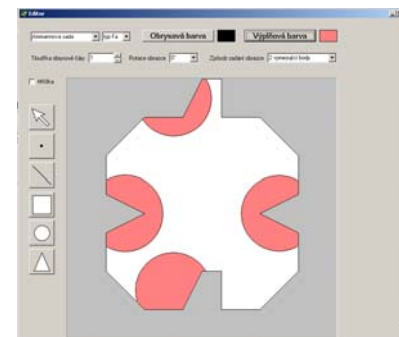
Př. Tři vzory A. Glassnera



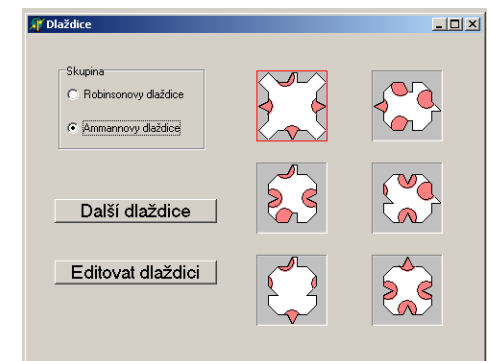
3

Editor dlaždic a generátor aperiodické mozaiky P. Láníčka (DP VUT 2002)

okno editoru dlaždice

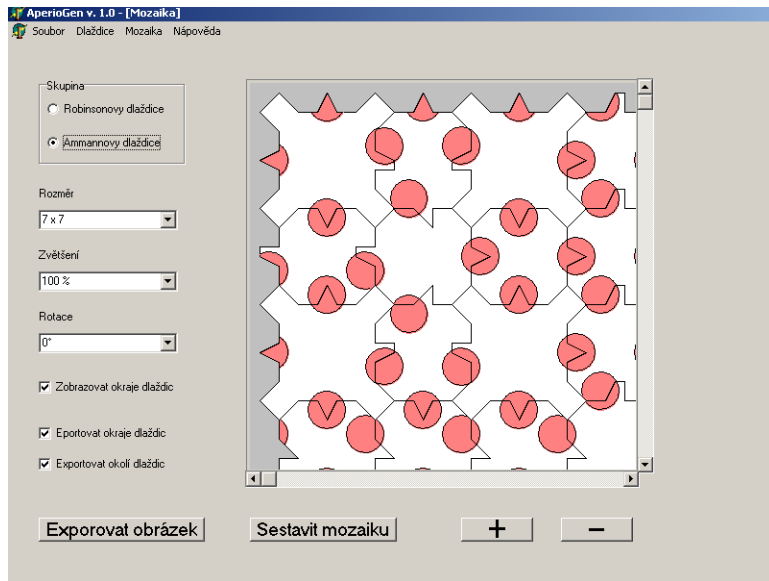


okno prohlížeče



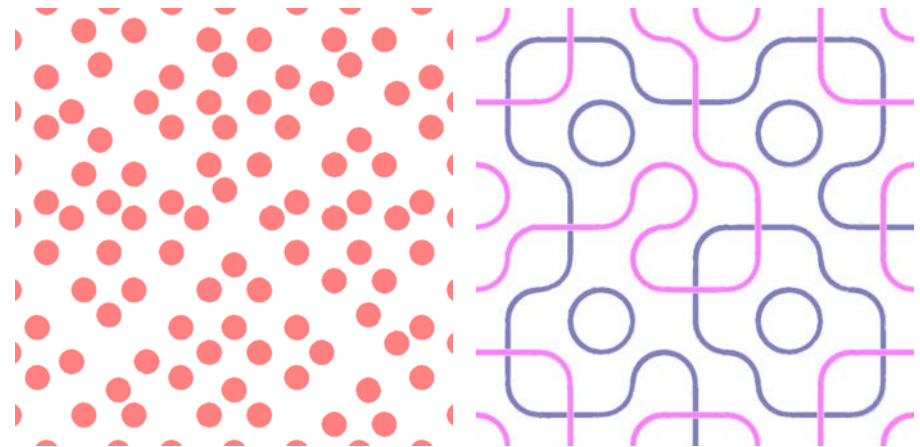
4

Okno generátoru

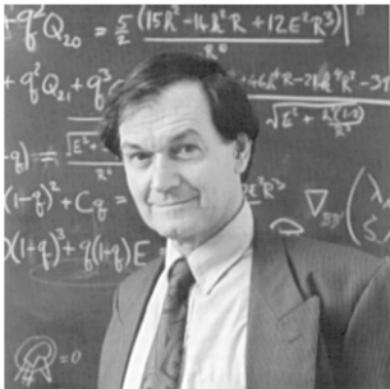


5

Př. Dva vzory P. Lánička (inspirované A. Glassnerem)



6



Recreational mathematics?

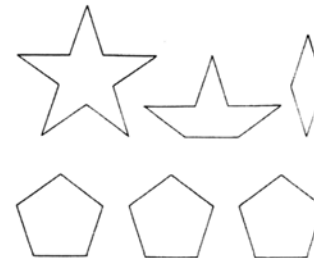
That's right - recreational math; the passion of **Sir Roger Penrose** who was recently knighted for his outstanding contributions to mathematics.

Roger Penrose, a professor of mathematics at the University of Oxford in England, pursues an active interest in recreational mathematics which he shared with his father. While most of his work pertains to relativity theory and quantum physics, he is fascinated with a field of geometry known as tessellation, the covering of a surface with tiles of prescribed shapes.

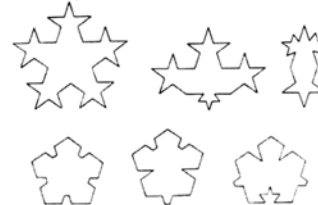
In <http://www.worldofescher.com/misc/penrose.html>

7

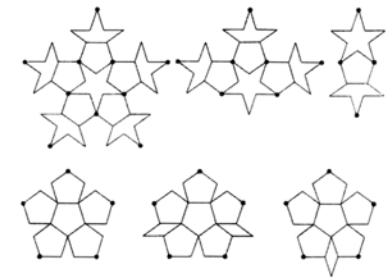
Šestice dlaždic (R. Penrose 1974)



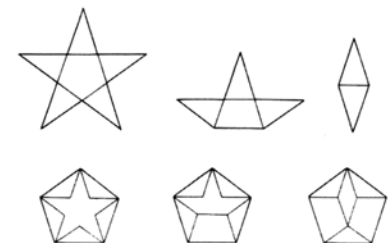
skládací pravidla



rozkladová pravidla 1

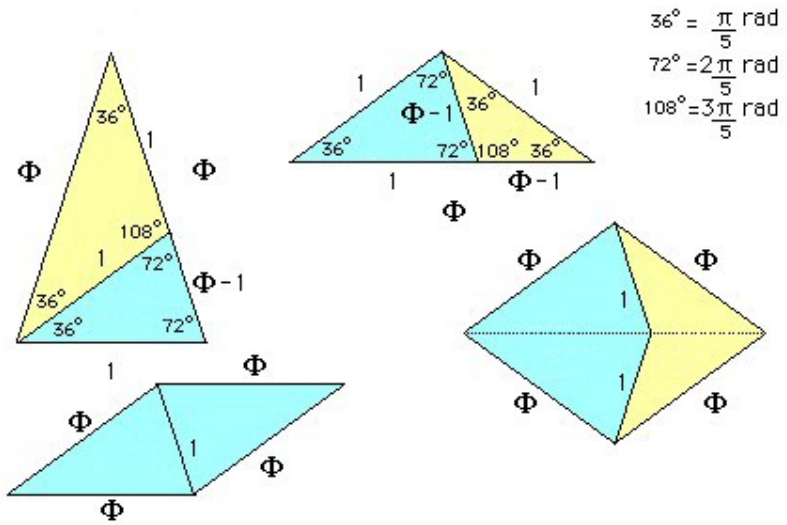


rozkladová pravidla 2



8

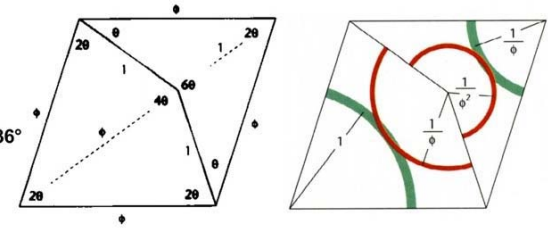
Ostré a tupé trojúhelníky



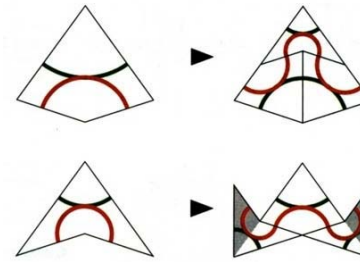
Šipky a draci Rogera Penrose (Darts and Kites – 1977)

Geometrie dlaždic

Poměr zlatého řezu $\phi = 1.68$, $\theta = 36^\circ$



Drobení dlaždic



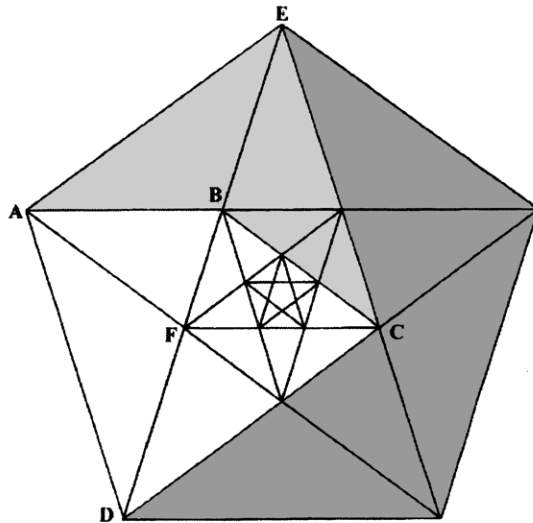
Výsledné vzory



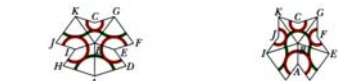
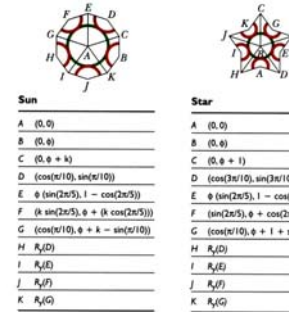
NIC NOVÉHO POD SLUNCEM!

Pythagorův pentagram

$$\phi = (1 + \sqrt{5})/2$$



Startovací obrazce A. Glassnera



Queen	King
A (0, 0)	A (0, 0)
B (0, φ)	B (0, 1)
C (0, φ + φ)	C (0, 1 + φ)
D φ (cos(π/10), sin(π/10))	D (sin(π/5), -cos(π/5))
E k (cos(3π/10), sin(3π/10))	E (sin(π/5) + φ cos(3π/10), -cos(π/5) + φ sin(3π/10))
F (√2(1 - cos(4π/5)), φ)	F (cos(π/10), d + sin(π/10))
G (k cos(3π/10), k(1 + sin(3π/10)))	G (cos(π/10), 1 + d + sin(π/10))
H R _y (D)	H R _y (D)
I R _y (E)	I R _y (E)
J R _y (F)	J R _y (F)
K R _y (G)	K R _y (G)



Ace	Deuce	Jack
A (0, 0)	A (0, 0)	A (0, 0)
B (0, 1)	B (0, 1)	B (0, k)
C (0, φ + 1)	C (0, φ + 1)	C (0, φ + k)
D φ (cos(3π/10), sin(3π/10))	D φ (cos(π/10), sin(π/10))	D φ (cos(3π/10), sin(3π/10))
E φ (cos(π/10), 1 + φ(1 - sin(π/10)))	E cos(3π/10), 1 + sin(3π/10)	E k(cos(π/10), sin(π/10))
F R _y (D)	F (φ cos(π/10), 1 + φ(1 - sin(π/10)))	F (φ cos(π/10), φ + φ sin(π/10))
G R _y (E)	G R _y (D)	G (cos(π/10), φ + k - sin(π/10))
	H R _y (E)	H R _y (D)
	I R _y (F)	I R _y (E)
	J R _y (F)	J R _y (F)
	K R _y (G)	K R _y (G)

Analytic expressions for vertices in the star.

In these expressions, $k^2 = 1 + \phi^2 - 2\phi \cos(2\pi/5)$,

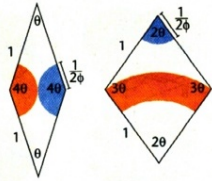
$d^2 = 1 + \phi^2 - 2\phi \cos(\pi/5)$,

and

$R_y(D)$ means the reflection of point D around the Y axis

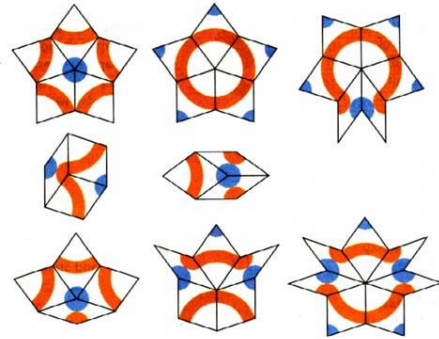
(i.e., if $D = (D_x, D_y)$, then $R_y(D) = (-D_x, D_y)$).

Geometrie tenkého
a tlustého kosočtverce

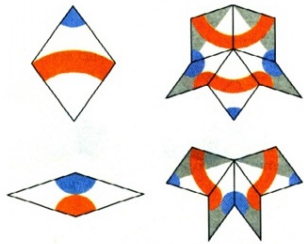


Kosočtverce Rogera Penrose

Atlas startovacích shluků

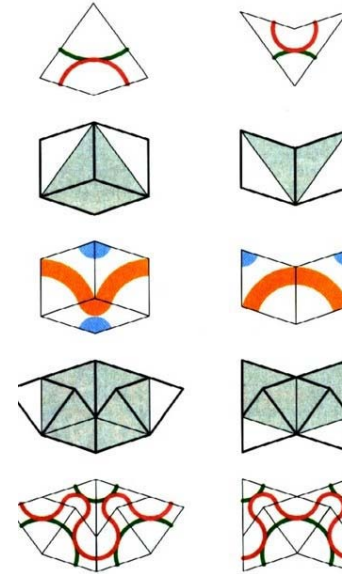


Drobení kosočtverců



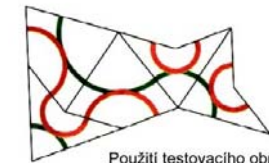
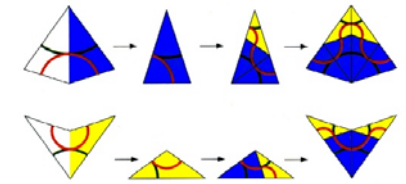
13

Obousměrná konverze dlaždic Penrose



Implementační pomůcky

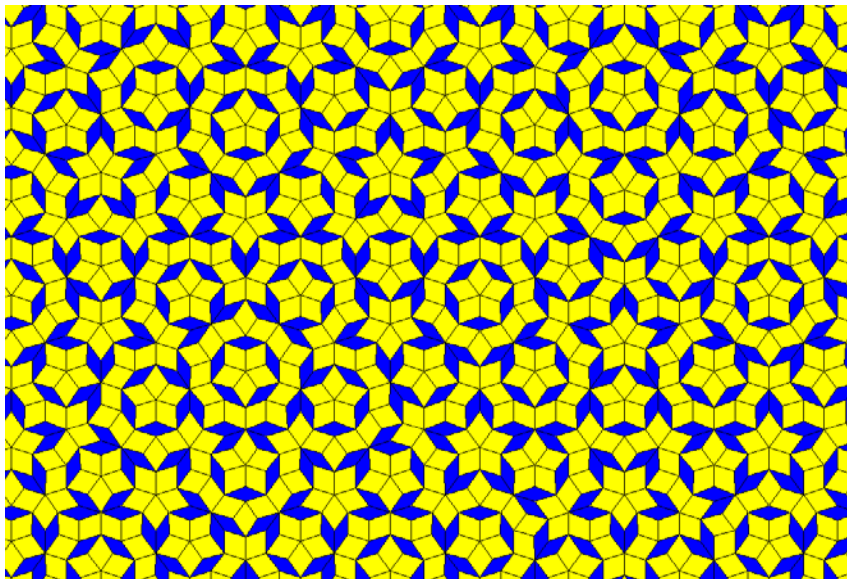
Drobení ornamentů na pomocné trojúhelníky



Použití testovacího obrazce

14

Př. Aperiodická mozaika získaná de Bruijnovou projekcí vícerozměrného prostoru



15

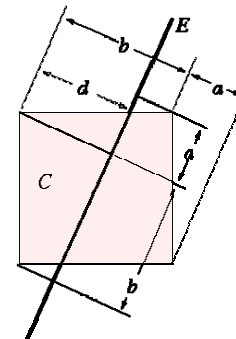
Soběpodobné dláždění vzniklé projekcí (D. J. Wright)

V osmdesátých letech de Bruijn studoval pohledy na mříž \mathbb{Z}^n uvnitř \mathbb{R}^n z různých úhlů.

Ať pro rovinu 2D mříž \mathbb{Z}^2 sestává z vrcholů jednotkového čtverce, pro prostor 3D tvoří \mathbb{Z}^3 vrcholy jednotkových krychlí atd.

Uvnitř \mathbb{R}^n vytvoříme podprostor E menší dimenze pomocí stěn \mathbb{Z}^n takto:

Mějme jednotkovou n -krychli (hyperkostku) C centrovanou v bodě patřícím E . Definujme číslo d jako nejvzdálenější vrchol C od E . Ať R je oblast bodů v \mathbb{R}^n vzdálených nanejvýš o d od E . Uvnitř \mathbb{R}^n budou vrcholy, hrany, stěny atd. mříže \mathbb{Z}^n . Tato struktura (sít) vytvoří "hrbatou" funkci F z E .



Př. pro mříž \mathbb{Z}^2 je E přímka uvnitř \mathbb{R}^2

Poznámka:

Jde o ortogonální projekci bodů $x \in \mathbb{R}^n$

zapsanou lineární mapou:

$$P(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1P(x_1) + c_2P(x_2)$$

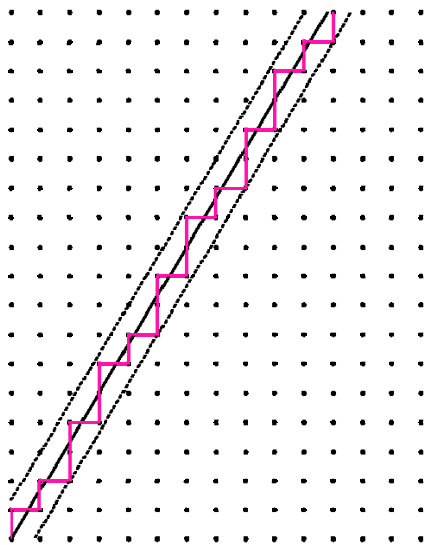
Hledali jsme body na E nejbližší bodům x . Projekci pak aplikujeme na F .

Respektujeme sled (cestu) vrcholů, stran a ploch a získáme dláždění E .

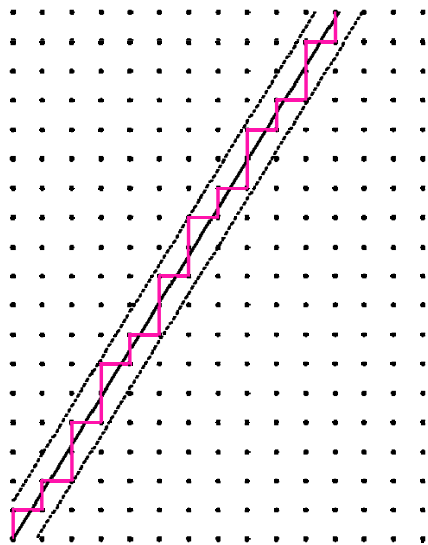
16

Př.

Dělení pro sklon 5/3 - periodické



Dělení pro sklon „zlatý řez“ 8/5 – aperiodické



17

Poznámka: Připomeňme rastrování úsečky

Alternativní způsob rastrování k metodě Bresenhama (1961 – 65, $f(x,y) = \epsilon \Rightarrow \min$)

Hledáme „vzorek“ opakování směrů S a D.

Př. Vzorek úsečky ((0,0), (131,16))

$S^4D(S^7D)^4S^2D(S^7D)^5S^8D(S^7D)^4S^4$ po extrapolaci $S^4D \dots$



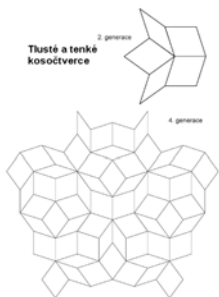
18

Příklady LS zápisu aperiodické mozaiky R. Penrose (Fractint - Philippe Hurbain)

Kosočtverce

```
{
Angle 10
Axiom x
x=@.618034+f[y]-f[x][+@.618034g@i.618034x]
---[x]f--[y]f
y=@.618034++[x]f+f[y]-[y]f+f[x]
f=g
}
```

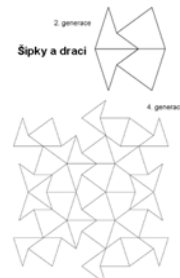
Poznámka: x generuje tlusté kosočtverce, y generuje tenké kosočtverce, $0.618034 = (\sqrt{5}-1)/2$.



Šípky a draci

```
{
Angle 10
Axiom k
k=+[@.618034a]f@.618034---[-k]f-f---
[-k]@i.618034f@.618034[a]
a=[@.618034k]+f@.618034[[]]----f+f----[a]@i.618034f
f=g
}
```

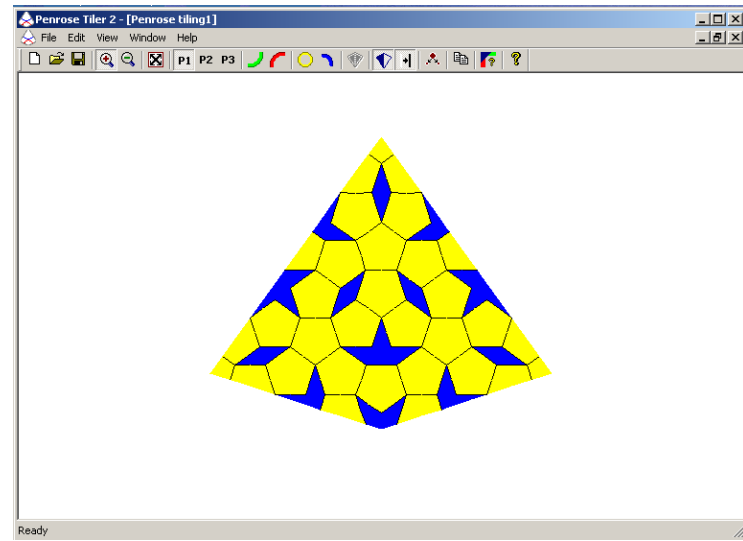
Poznámka: k generuje draky, a generuje šípky.



19

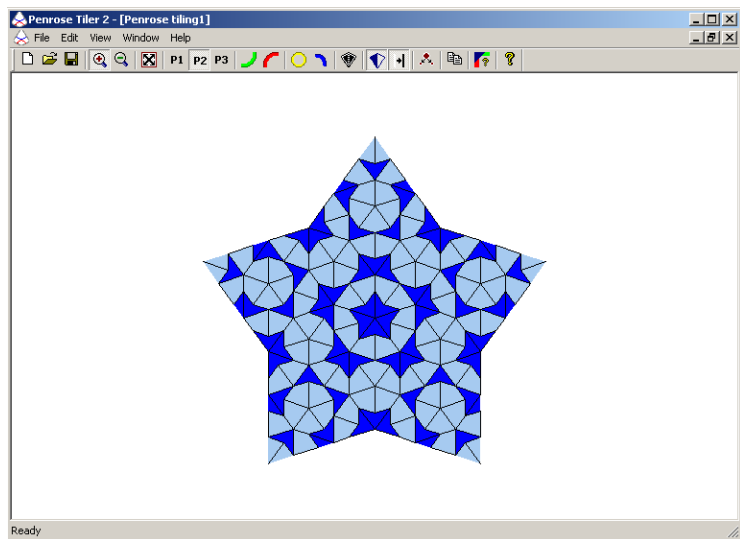
Generátor a editor aperiodických mozaik R. Penrose - autor M. Židek (DP VUT 2002)

Sada dlaždic P1



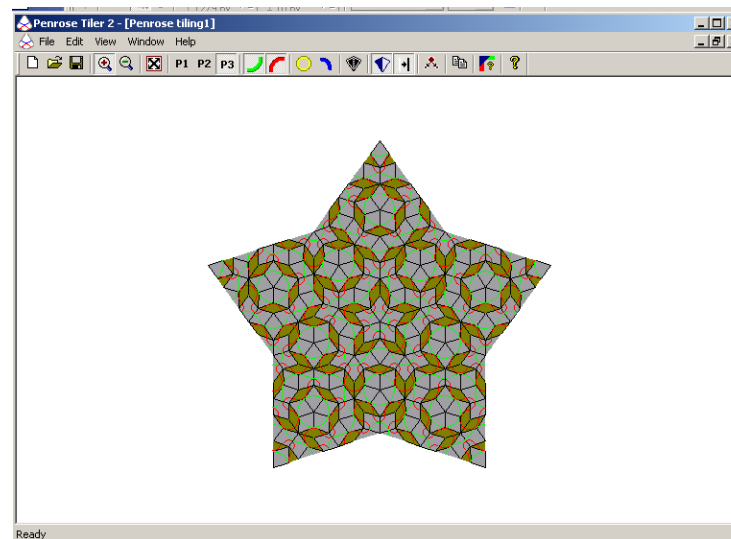
20

Sada dlaždic P2



21

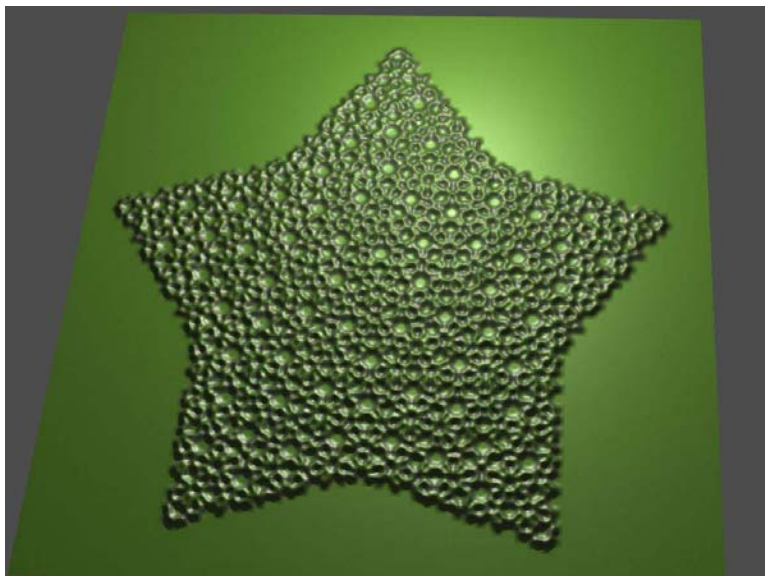
Sada dlaždic P3



22

Aperiodické vzory ve 3D

Př. 1.



23

Př. 2.

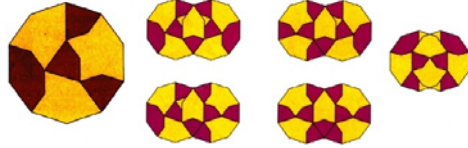


24

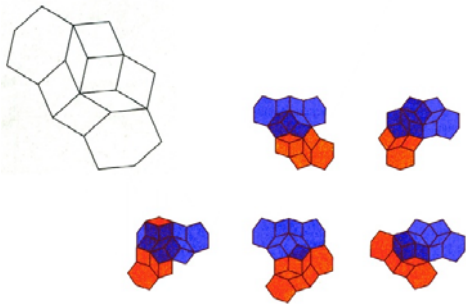
Nekorektní zvětšování vzoru

„Slepování“ startovacích shluků bez překrytí je neproveditelné.

Dekagon Petry Gummeltové a jeho pět překrytí (1996)



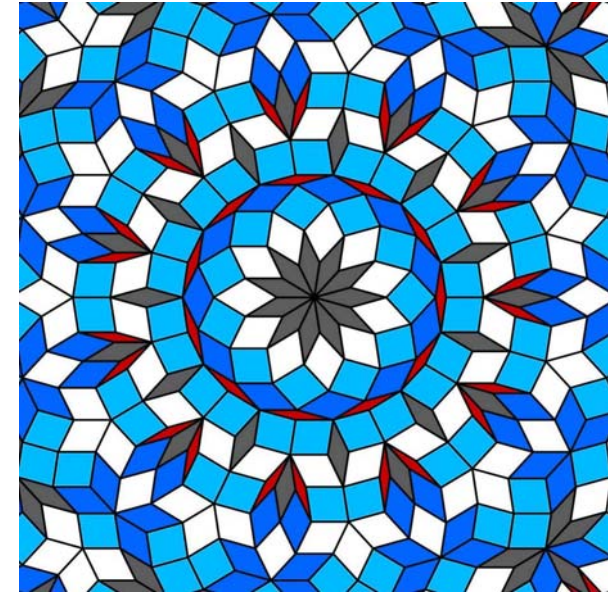
Jeong a Steinhardt našli jiný shluk a jeho překryvání (1997)



Poznámka:
Velkou skupinu aperiodických mozaik vytvářejí struktury materiálů pozorované v Roentgenové záření tzv. kvazikrystaly.

25

Př. Kolorovaná struktura kvazikrystalu:



26

ESCHEROVY MOZAIKY

Maurits Cornelius Escher

se narodil 17. června 1898 v Leeuwardenu v Nizozemí. Jeho otec, civilní inženýr, se rozhodl poslat syna studovat na Školu architektury a dekorativních umění v Haarlemu. Escher však měl větší zálibu v grafických uměních a v 21 letech studia architektury zanechal.

Strávil mnoho let cestováním po Evropě a jeho zájem o grafiku neustále rostl. V roce 1921, kdy žil v Římě, se oženil. Jeho práce byly tehdy zaměřeny na krajiny, přičemž využíval různých nereálných perspektiv.

Ve třicátých letech žil i se svou rodinou ve Švýcarsku. V roce 1936 podnikl důležitou cestu do Alhambry v Granadě ve Španělsku. Maurské dlaždice jej natolik fascinovaly, že si po návratu přečetl Pólyův článek zabývající se problematikou grup rovinných symetrií. „Po svém“ porozuměl 17 grupám symetrií a v období mezi lety 1936 až 1942 vyrobil 43 barevných kreseb založených na pravidelně se opakujících vzorech. Systematicky si dělal poznámky v notaci, kterou sám vytvořil.

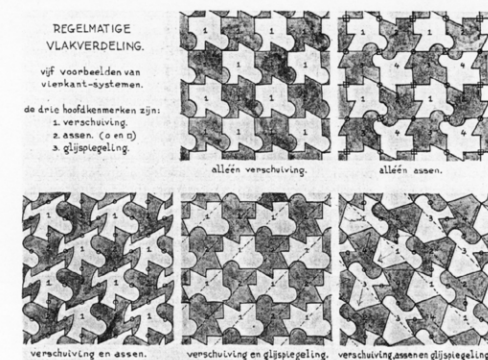
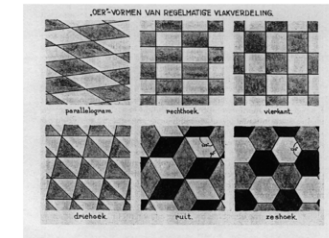
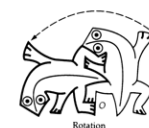
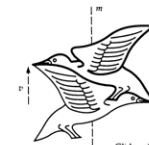
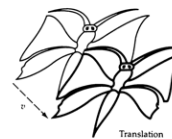
V roce 1941 se vrátil zpět do Nizozemí, poté, co strávil nějaký čas v Belgii. Jeho proslulost pomalu rostla a v padesátých letech se začaly objevovat články o jeho díle. Práce však byly vystavovány spíše ve vědeckých muzeích než v uměleckých galeriích. V roce 1958 publikoval dílo *Regular Division of the Plane*, kde seznámil veřejnost s výsledky své celoživotní práce.

Ke konci života se Escher uzavřel do sebe, měl málo přátel a jeho duševní svět se zhroutil. Zemřel po dlouhé nemoci 27. března 1972 v Laren v Nizozemí.

27

Escherovy mozaiky

Zdroj:
Doris Schattschneider:
Visions of Symmetry
W. H. Freeman and Comp.
New York 1990



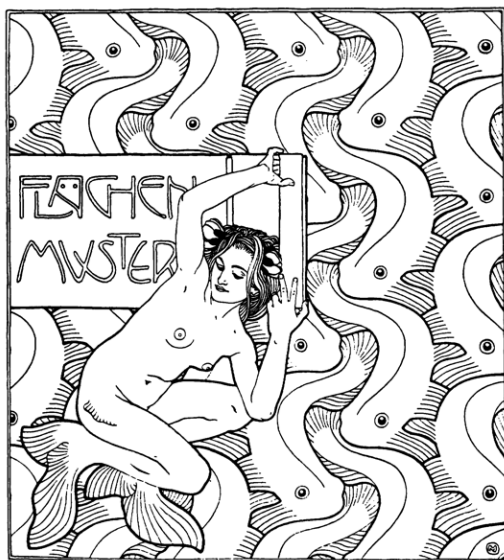
28

Escher nebyl první:

Koloman Moser:
kolem r. 1900



528. Radkug. Entwurf für
Ebebet, von Koloman Moser.
(Ver. 2000) 2400



29

Dvoubarevné zámkové vzory M. C. Eschera

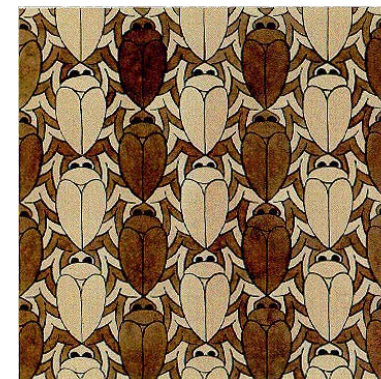
Escher uvádí 9 systémů transformací (I - IX),
které definují přiřazení dlaždic (motivů) na pravidelných mřížkách.

Notace mřížek:

A rovnoběžník, B kosočtverec, C obdélník, D čtverec.

Vytváří celkem 24 efektních dvoubarevných vzorů.

Typická Escherova kreace:



Poznámka:

Escherova tvorba byla daleko
širší, vždy však vycházela
z geometrických základů.

30

Příklad: Vzor II^D

Vzor obsahuje
1 translaci,
6 rotací.



• 6 středů rotací

1 translace

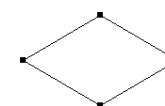


31

Příklad: Vzor I^B

Vzor obsahuje čtyři translace.
2 příčné a 2 diagonální

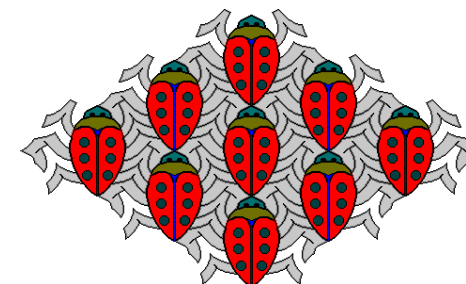
základní motiv
(mřížka)



modifikovaný motiv
(po modifikaci stran)



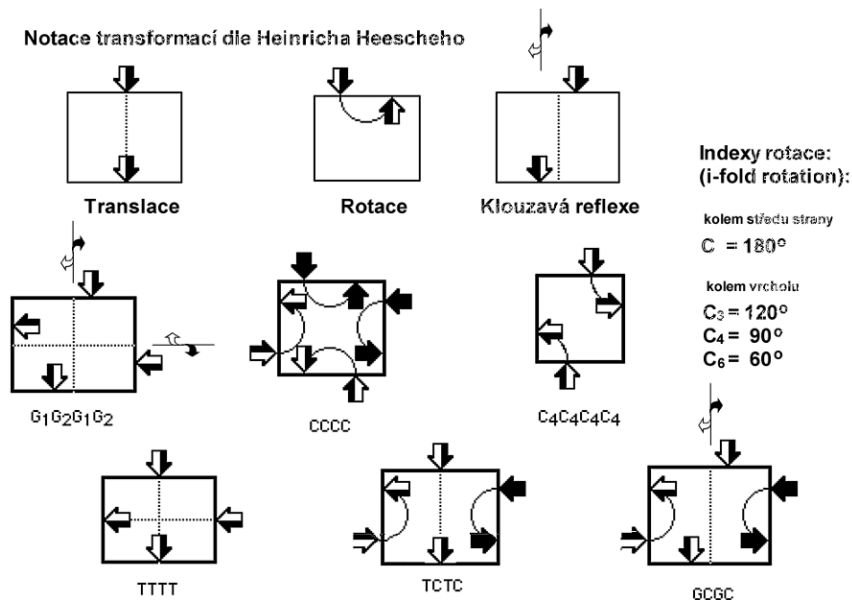
modifikovaný motiv s okolím



V následujících ukázkách použijeme i notaci německého matematika H. Heescheho.
(viz. TESSELMANIA)

32

Notace transformací dle Heinricha Heescheho



M. C. Escher (H. Heesche, krystalografie) klasifikace dvoubarevné mozaiky s jedním motivem na čtyřúhelníkové mřížce

Symetrie/třída	Směry translací	Počet, středy a násobnosti rotací	Směry klouzavých reflexí	H. Heesche/kryst.
I A, B, C, D	v obou příčných směrech, v obou diagonálních směrech			TTTT
II A, B, C, D	v jednom příčném směru	čtyři 2nás. rotace ve vrcholech, dvě 2nás. rotace v polovinách paralelních stran		TCTC
III A, B, C, D	v obou diagonálních směrech	čtyři 2nás. rotace v polovinách všech stran		CCCC
IV B, D	v obou diagonálních směrech		v obou příčných směrech	G1 G1 G2 G2
V C, D	v jednom příčném směru		v jednom příčném směru, v obou diagonálních směrech	GTGT
VI B, D	v jednom diagonálním směru	dvě 2nás. rotace v polovinách sousedních stran	v jednom diagonálním směru, v obou příčných směrech, ale jen u stran bez středů rotace	GGCC
VII C, D		dvě 2nás. rotace v polovinách paralelních stran	v jednom příčném směru, v obou diagonálních směrech	GCGC

Pokračování tabulky

Symetrie/třída	Směry translací	Počet, středy a násobnosti rotací	Směry klouzavých reflexí	H. Heesche/kryst.
VIII D, C		čtyři 2nás. rotace ve vrcholech.	v obou příčných směrech.	G1 G2 G1 G2
IX D		dvě 4nás. rotace ve vrcholech na diagonále, dvě 2nás. rotace ve vrcholech na diagonále		pozn. čtvercý čtverec
X E		tři 4nás. rotace ve vrcholech, jedna 2nás. ve středu přepony		

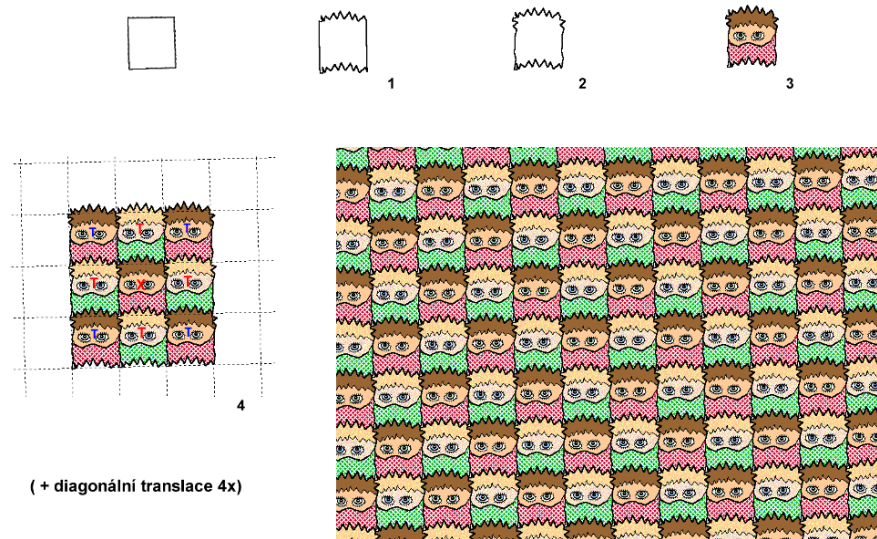
- Escherovo označení mřížek:**
- A rovnoběžník
 - B kosočtverec
 - C obdélník
 - D čtverec
 - E rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník (čtyři motivy vytvářejí čtverec)

Pozn.

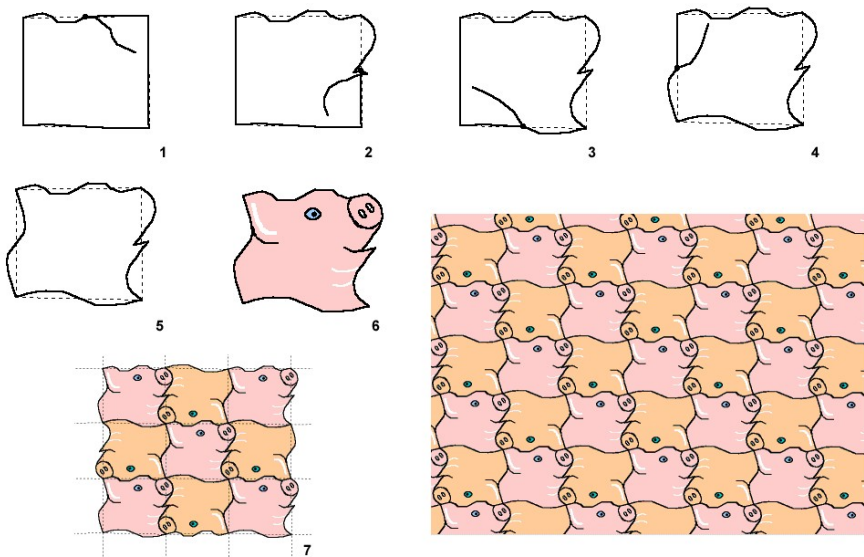
Uvedené mozaiky neobsahují horizontální ani vertikální reflexe, ani 3násobné rotace.
 Násobnosti rotace rozumíme počet otočení motivu do celé otáčky (2π).

Připomeňme: Escher nevyužil všech 17 grup symetrií, některé použil opakovaně.

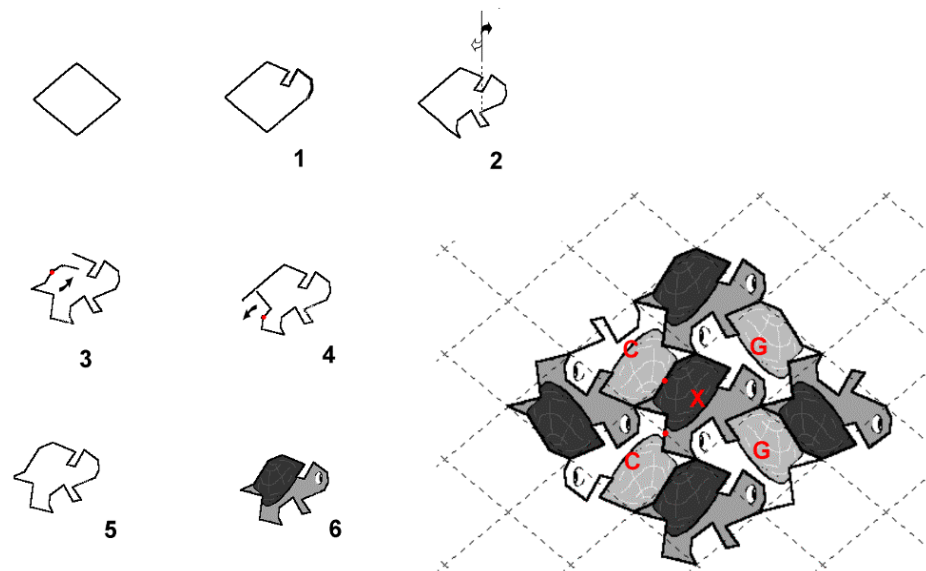
Př. Mozaika I⁰, TTTT, p1



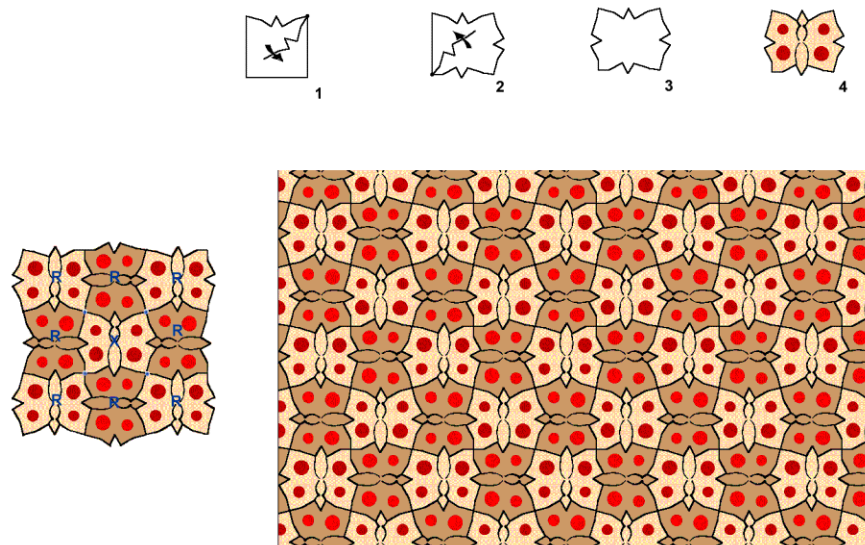
Př. Mozaika III^c, CCCC, p2



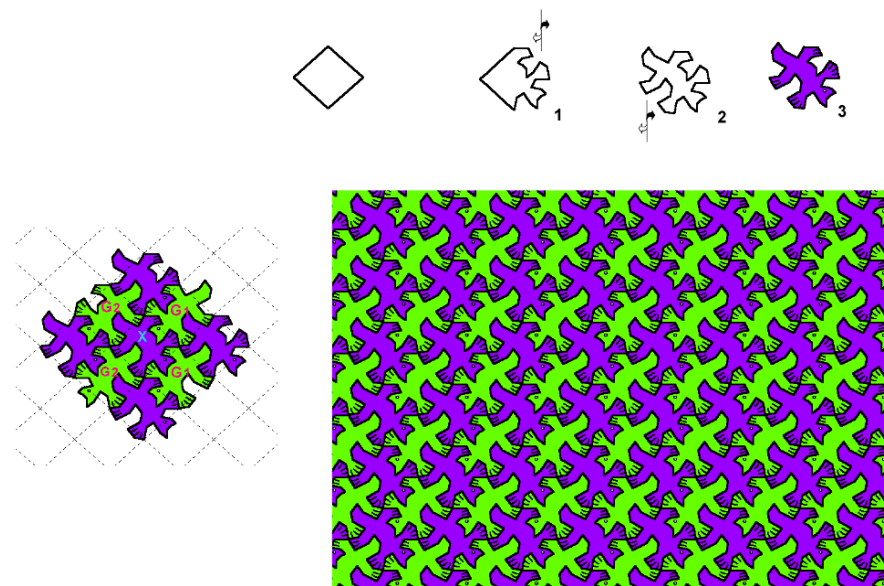
Př. Mozaika VI^B, CCGG, pgg



Př. Mozaika C4C4C4C4, p4



Př. Mozaika G1G1G2G2, pg



"Trojúhelníkové" mozaiky M. C. Eschera

Dělení trojúhelníkových mřížek:

A pouze 3nás. rotace ve vrcholech

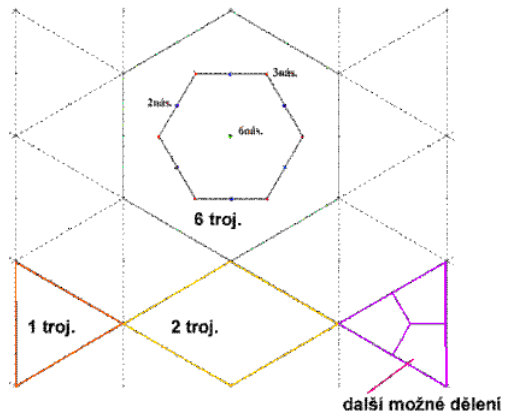
B 6nás., 3nás. ve vrcholech,
2nás. v polonách stran

C pouze centrální rotace

Mozaiky jsou typicky trojbarevné a symetrie
neobsahují translace ani klouzavé reflexe.

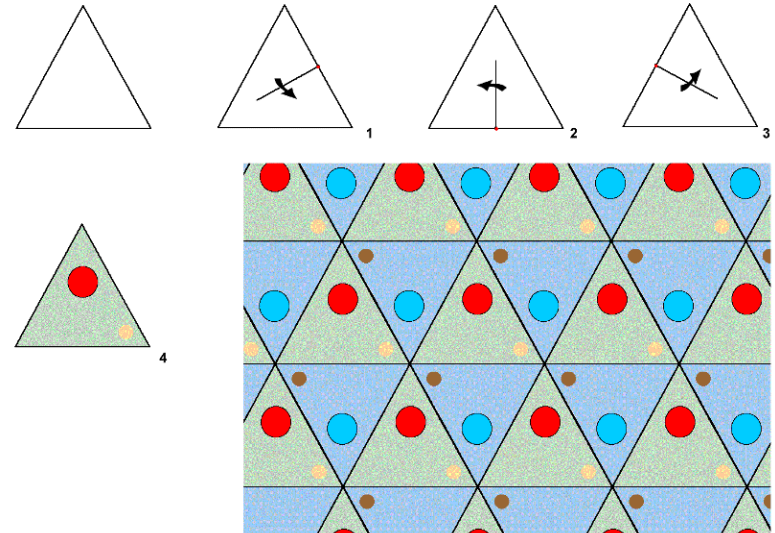
Př. notace $11A4$
systém počet barev
počet motivů

mutace trojúhelníkové mřížky



41

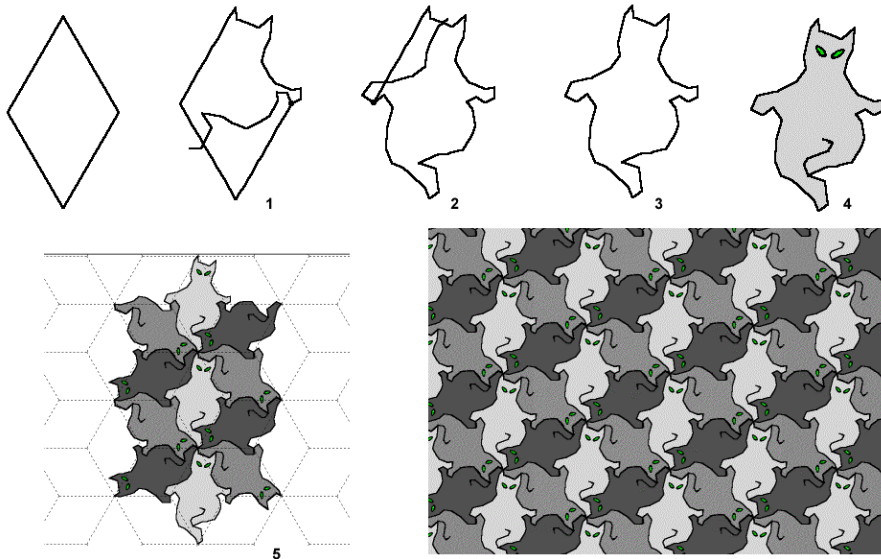
Trojúhelníková mozaika C C C



Pozn. CCC = p3

42

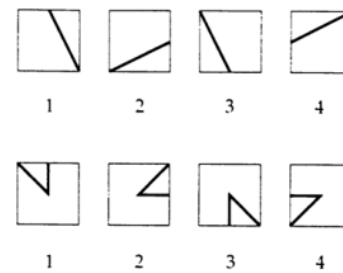
Př. Mozaika C3C3C3C3C3C3, p3



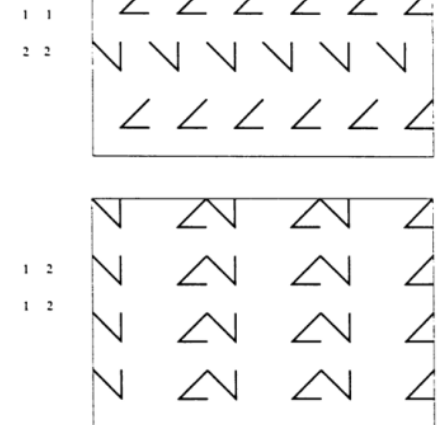
43

Ještě dvě Escherovy mozaikové kreace:

M. C. Escher
variacie motivu



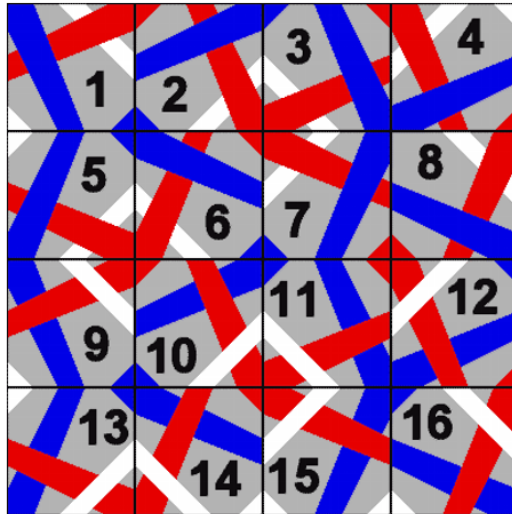
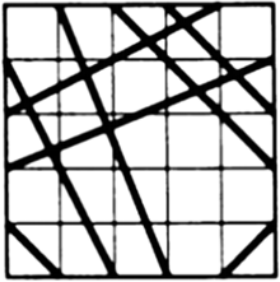
barevné vyplňování
vytváří další efekty



44

Stuhové mozaiky M. C. Eschera.

Základem je čtvercová dlaždice s dezénem (motivem) prokládaných pruhů



K dispozici je 8 poloh dlaždic pro každé proložení pruhů.

Escher použil 2 proložení:

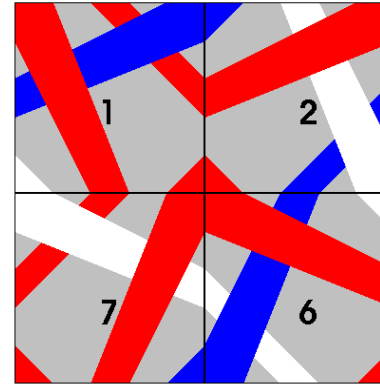
Polohy dlaždic očísloval 1 – 16.

45

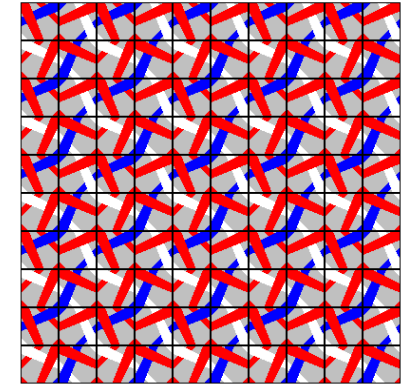
Klad dlaždic volí tak, aby pruhy navazovaly a vybarvoval je tak, aby vytvářely stuhu.

Základní kombinaci poloh zapisoval do čtvercové matice a tuto ve vzoru opakoval.

Základní kombinace (2x2)

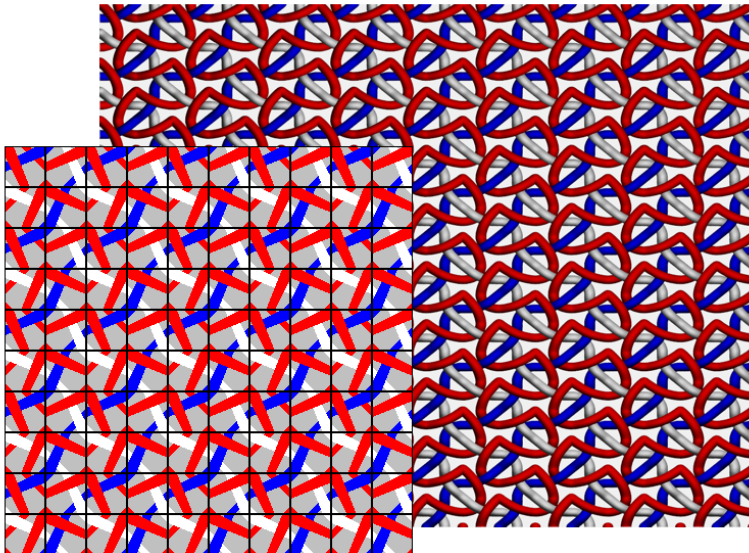


vzor s opakováním



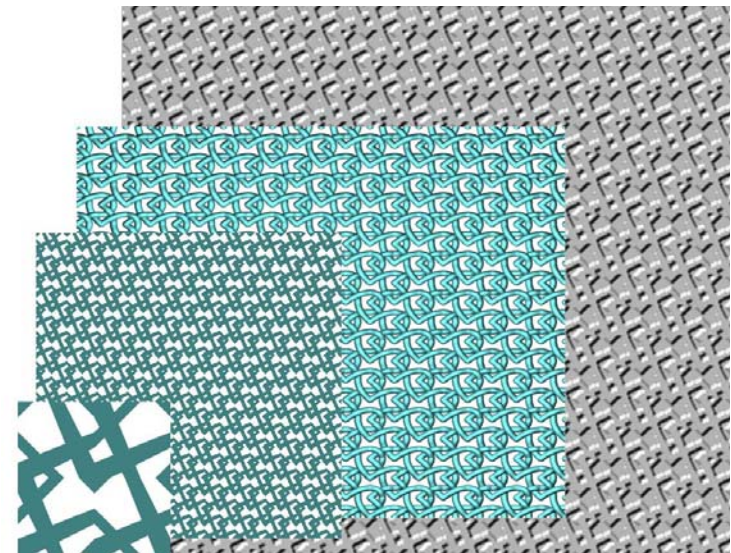
46

Př. 1. Realizace vzorku ve 2D a 3D



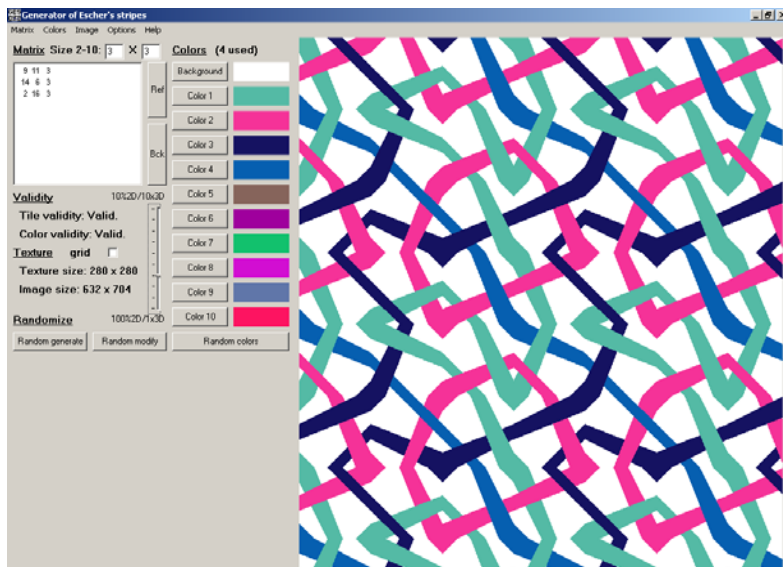
47

Př. 2. Realizace textury filtrací vzorku – reliéf



48

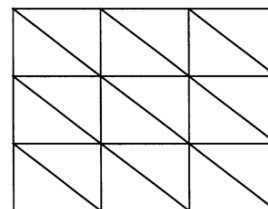
Otkno programu GES2 T. Pillera (viz praktická cvičení z VI)



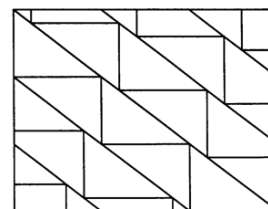
Escherův motiv pravoúhlého trojúhelníka 3 : 4 : 5



př. motivu

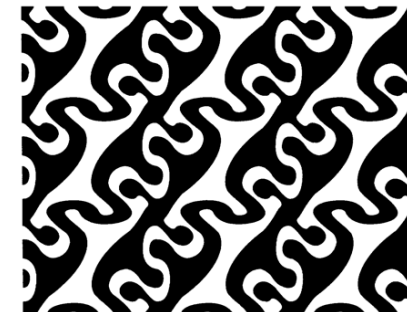


a



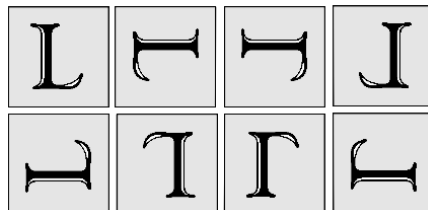
b

mozaika varianty ad a)

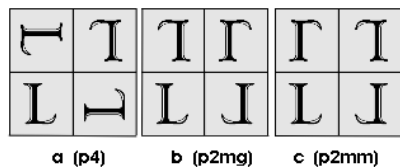


Hierarchické čtvercové mozaiky

Čtvercový motiv (dlaždice) můžeme umístit ve čtvercové síti v osmi polohách:

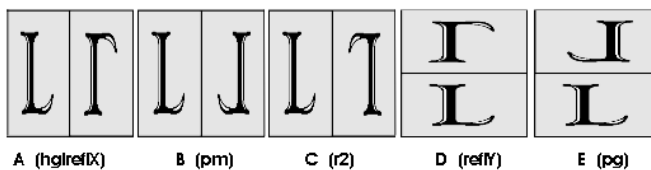


Kombinací čtyř a dvou motivů vytvoříme nové dlaždice (viz. A. Glassner),



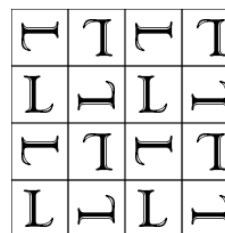
Kombinace označíme jako a,b,c,A,B,C,D,E.

(kvazikrystalografická notace, dle obsažených symetrií)

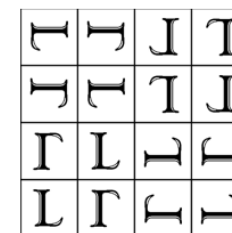


Postupně vytvoříme hierarchie h.

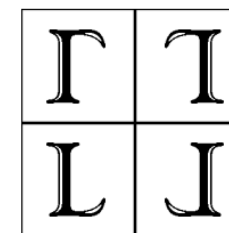
př:



h = a, a



h = A, D, a

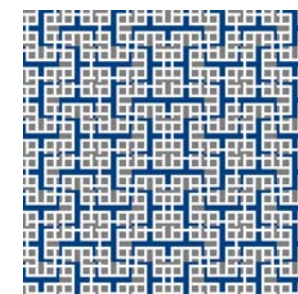


h = D, C

Př. 1. (J. Bokor)

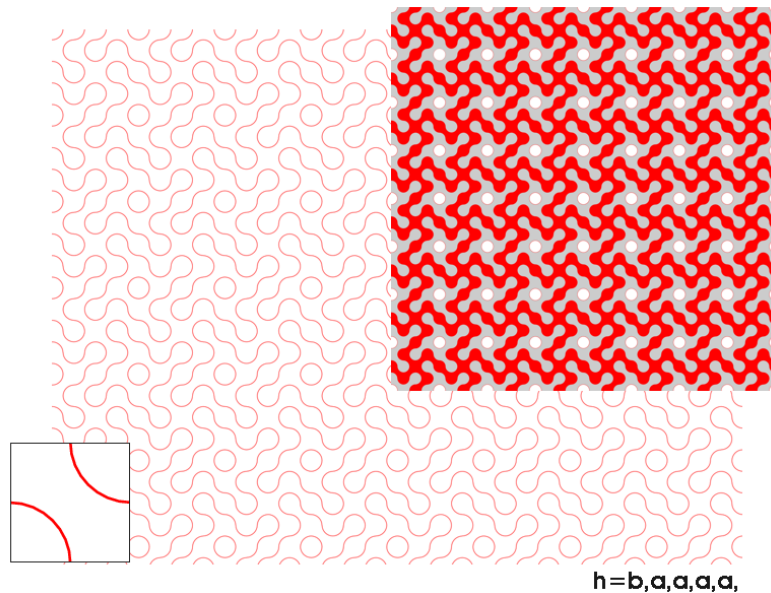


h = b, a, a, b

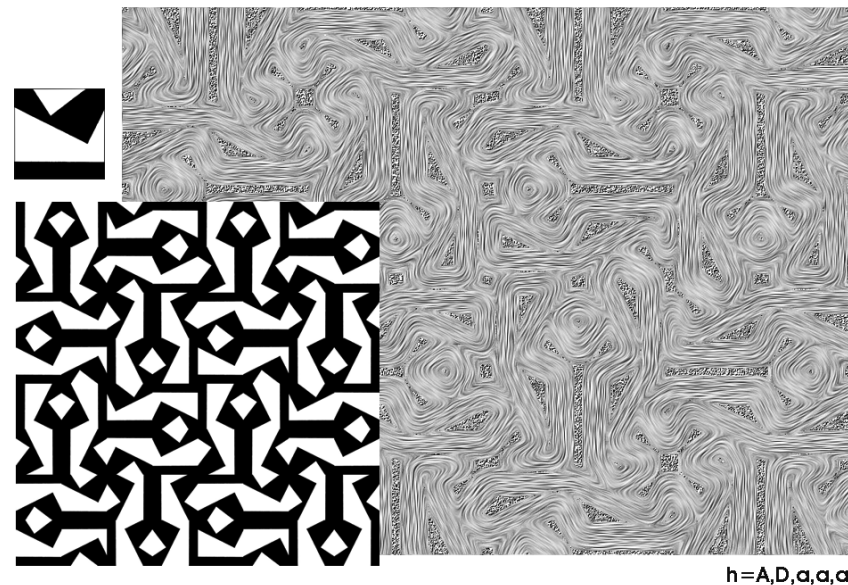


Celkový efekt vzoru je dán volbou hierarchie a volbou dezénu dlaždice.

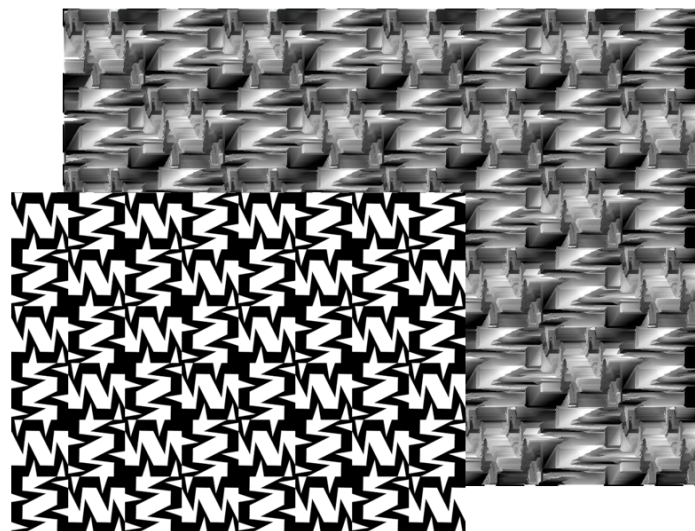
Př. 2. Vybarvená mozaika s dlaždicí podle S. Trucheta (1727)



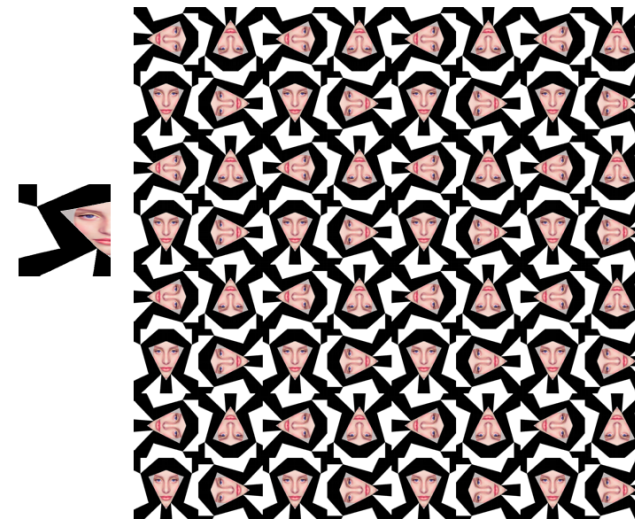
Př. 3. Textura 1, vytvořená z hierarchické mozaiky filtrací LIC



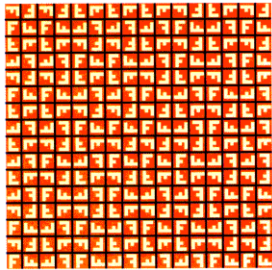
Př. 4. Textura 2, vytvořená z hierarchické mozaiky filtrací LIC



Př. 5. Dekorativní mozaika ($h = B,a,a,a$)

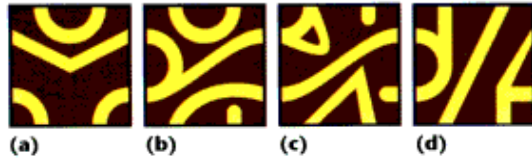


Př. 6. A. Glassner's Notebook, IEEE CGA, July/August 2000 (viz atraktivní motivy):

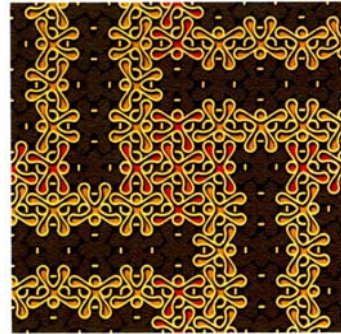


$h1 = p4, p2mm, p2mm, p4$

($h1 = a, c, c, a$)

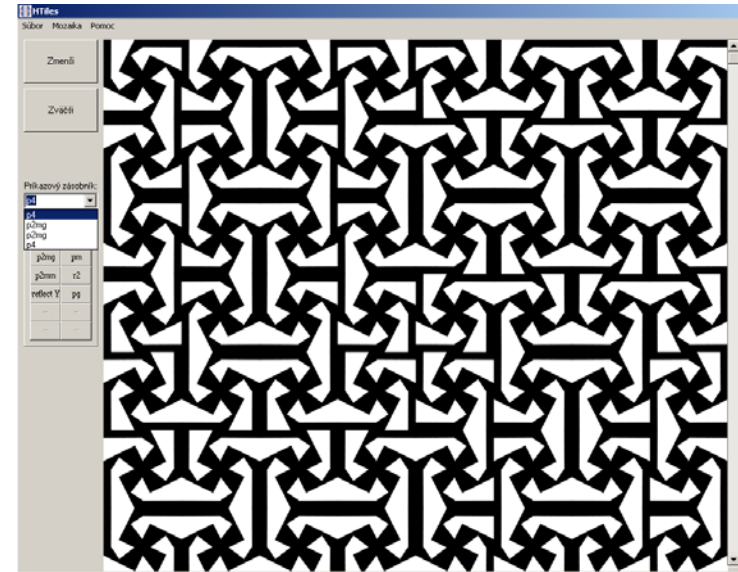


Př. substituce $h1/b$



57

Okno programu J. Bokora - Generátor hierarchických mozaik v 2



58

Geometrie islámských hvězdicových vzorů

Roger Calois ve své zobecněné estetice říká, že výtvarník umí vytvořit esteticky hodnotná díla jak kopírováním přírody, tak abstraktní spekulací.

Islámské mozaiky jsou toho dobrým příkladem, i když ornamentika byla ceněna méně než kaligrafie, ale daleko více než malba a kresba.

Designer M. C. Escher při své návštěvě Granady byl těmito vzory natolik inspirován, že na mozaikách postavil podstatnou část svého díla.

Islámským mozaikám se věnovali četní matematicky orientovaní badatelé : E. H. Hankin 1925, B. Grunbaum a G. C. Shephard 1992, A. K. Dewdney 1993, El Said 1993, A. J. Lee 1995, V. Ostromoukhov 1999, C. S. Kaplan 2000, a další.

Islámské vzory tvoří část tématu Mozaiky v předmětu Výtvarná informatika, který je již sedm let pěstován na Fakultě informatiky Masarykovy univerzity v Brně.

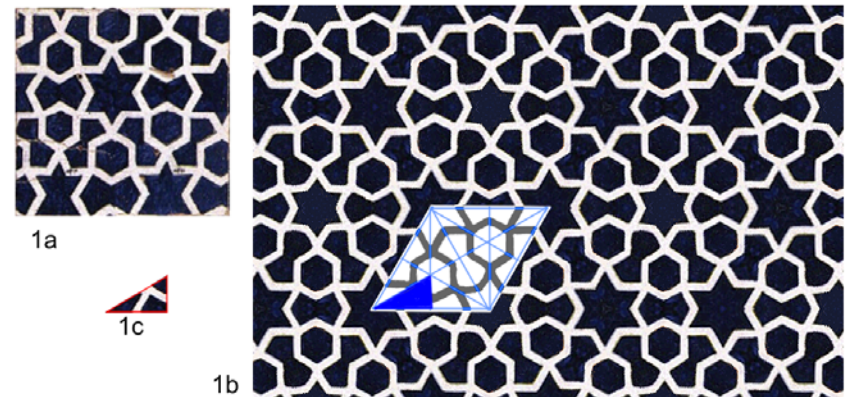
Mezi islámskými vzory tvoří významné místo tzv. hvězdicové mozaiky - periodické mozaiky s výraznými růžicovými motivy.

59

Analýza hvězdicových vzorů

Hvězdicové vzory jsou periodické a proto pro jejich analýzu vyhoví instrumentarium opřené o grupy symetrií. Hledáme symetrie, fundamentální oblasti, translační jednotky vzoru. Mozaiku definuje grupa symetrií.

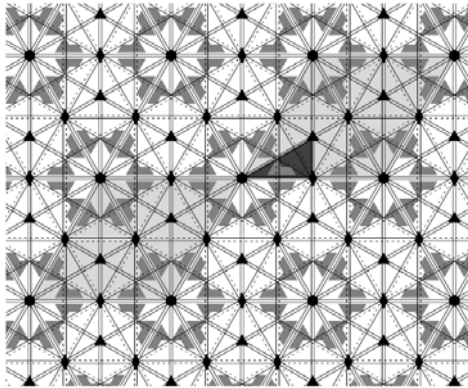
Rekonstrukce mozaiky $p6mm$ (resp. $p6m$) pro zopakování:



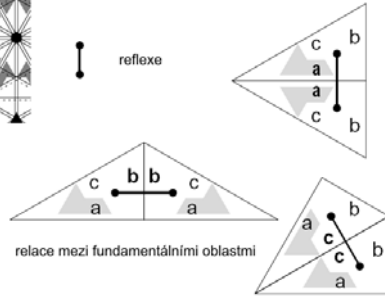
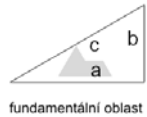
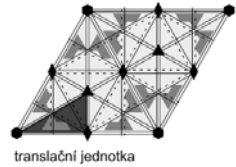
60

Prověrka:

Grupa symetrií p6mm podle V. Ostromoukhova



- osa reflexe
- - - - - osa klouzavé reflexe
- ◆ střed 2nás. rotace
- ▲ střed 3nás. rotace
- střed 6nás. rotace
- ⋮ reflexe

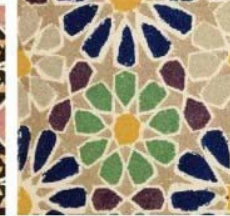
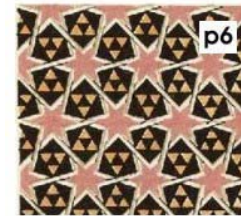
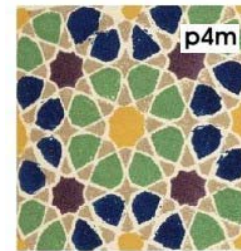


61

Podobné vzory:

Granada 9. - 15. stol.

Káhira (Heluan) 20. stol.

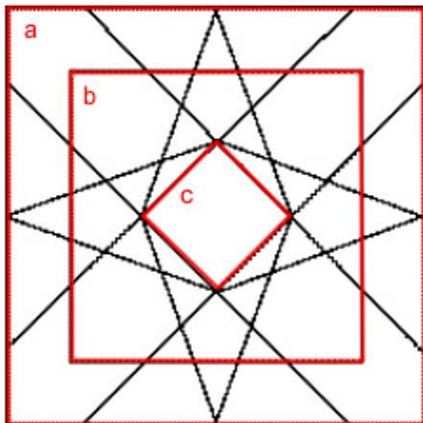


62

Design hvězdicových vzorů – pomocné konstrukce

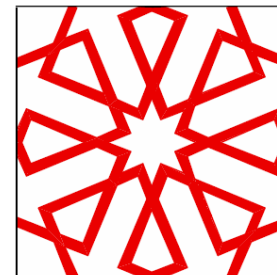
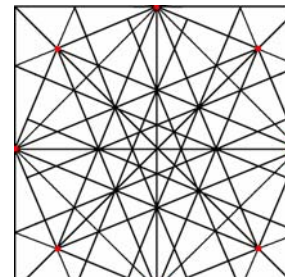
Ve středověku přísně střežené tajemství.

Abul Wafa Buzjani (polyhistor) – tři soustředné čtverce a, b, c:



63

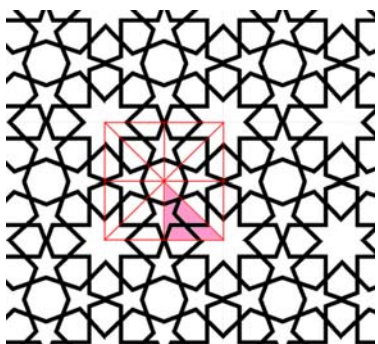
El Said uvádí podobnou pomocnou konstrukci



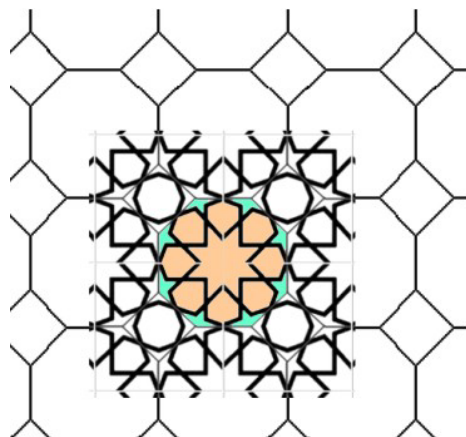
64

Duální geometrie vzoru

a) Mozaika p4m



b) Polymorfni regulární mozaika 4-8-8 (var. 3)



N ^o	n_1	n_2	n_3
1	3	12	12
2	4	6	12
3	4	8	8

Varieta tří n-úhelníků polymorfni mozaiky je vymezena součtem úhlů ve společném vrcholu.

65

Leeova konstrukce růžice

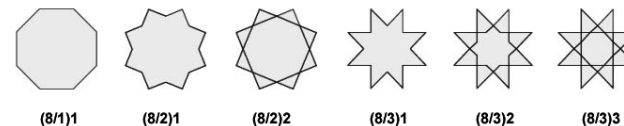
Konstrukce vychází z regulárního n-úhelníka, do kterého je vepisován obrazec (hvězdice, růžice) symetrie typu d , obsahující všechny symetrie výchozího n-úhelníka.

Pro konstruovanou hvězdici typu (n/d) bude platit, že $d < n/2$.

Regulární n-úhelník je $(n/1)$.

Lee předpokládá $n \geq 5$.

Př. Šest možností osmicípé hvězdy a tři celočíselné hodnoty d :



Poznámka:

Kaplan rozšiřuje konstrukci na d , které je libovolné reálné číslo v intervalu $[1, n/2)$.

66

Konstrukce vychází z regulárního n-úhelníka, do kterého je vepisován obrazec (hvězdice, růžice).

Př. Konstrukce růžice $n=8$

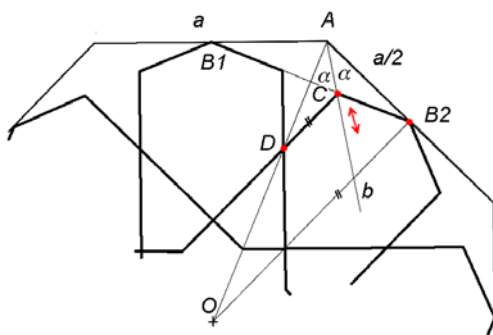
Vytvoříme pravidelný n-úhelník. Označíme středy sousedních stran B_1, B_2 .

Uřídíme bod C jako průsečík spojnice bodů B_1, B_2 a osy úhlu OAB_2 .

Bodem C vedeme rovnoběžku se spojnicí bodů O, B_2 a symetricky získáme bod D (cíp vnitřní hvězdy).

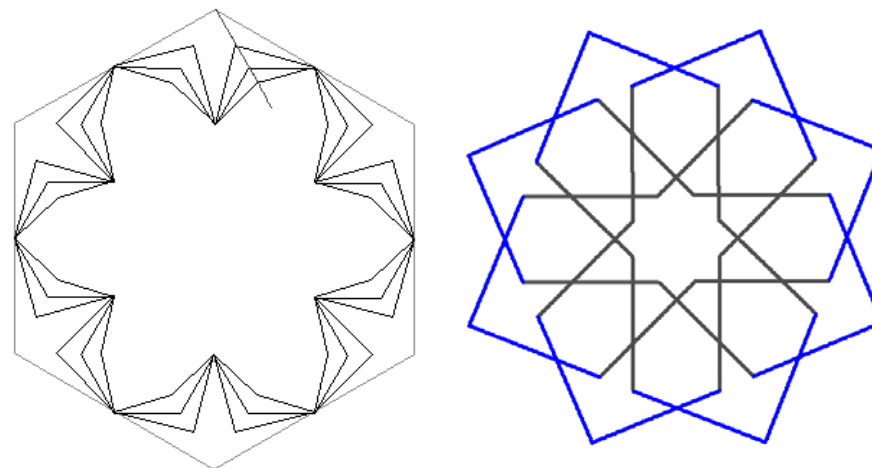
Dotvoříme růžici (dle symetrie).

Tvar růžice lze modifikovat posouváním bodu C po ose úhlu DAB_2 (Da B_2 jsou pivoty) dostaneme varietu růžic.



67

Prodloužením stran růžice vně n-úhelníka dostaneme „rozšířenou růžici“ sahající do čtverce (!!!).

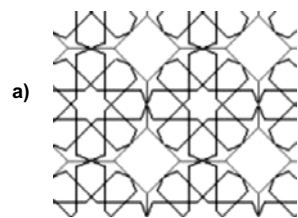
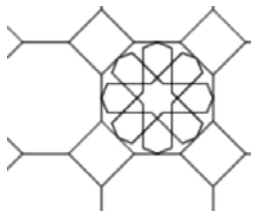


A.J. Lee konstruuje islámské mozaiky pomocí růžic (resp. hvězdic) vkládaných do sítě tvořené regulární polymorfni mozaikou a dotvořením vzoru expanzí vně růžice.

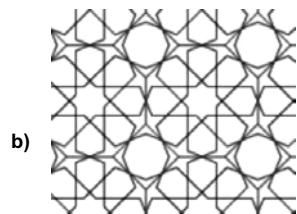
68

Vyplnění polymorfní sítě růžicemi

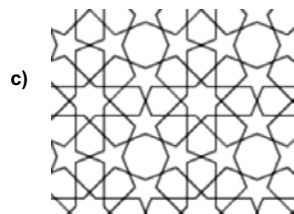
Př. Síť osmiúhelníků a čtverců



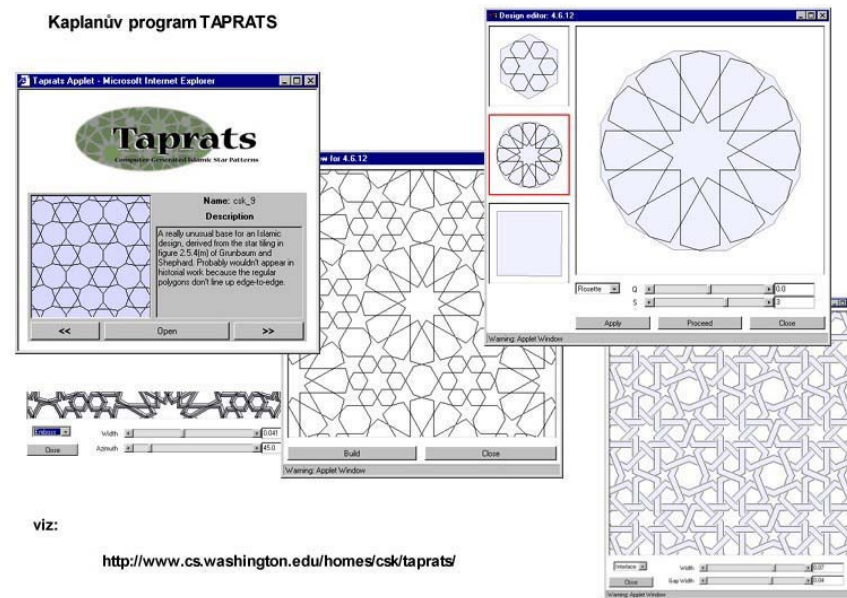
protažení stran růžice vně n-úhelníka



vymazání polymorfní sítě



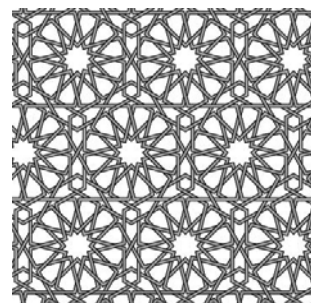
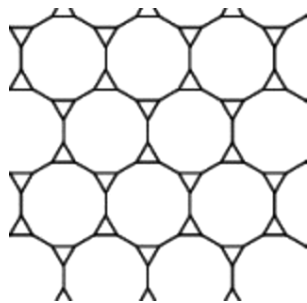
Kaplanův program TAPRATS



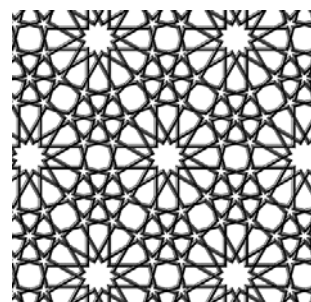
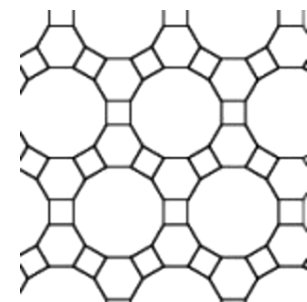
viz:

<http://www.cs.washington.edu/homes/ck/taprats/>

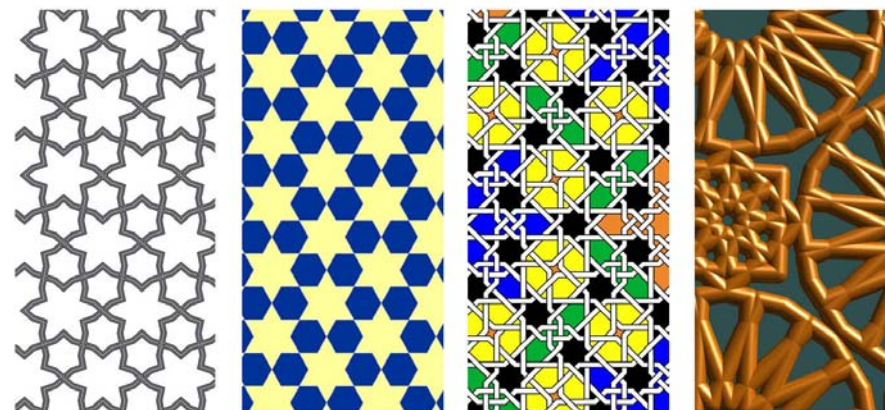
Příklad var. 1:



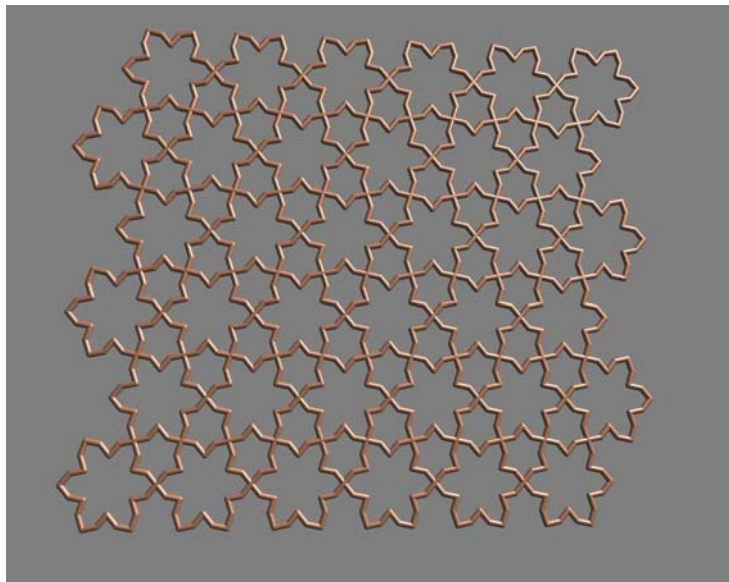
Příklad var. 2:



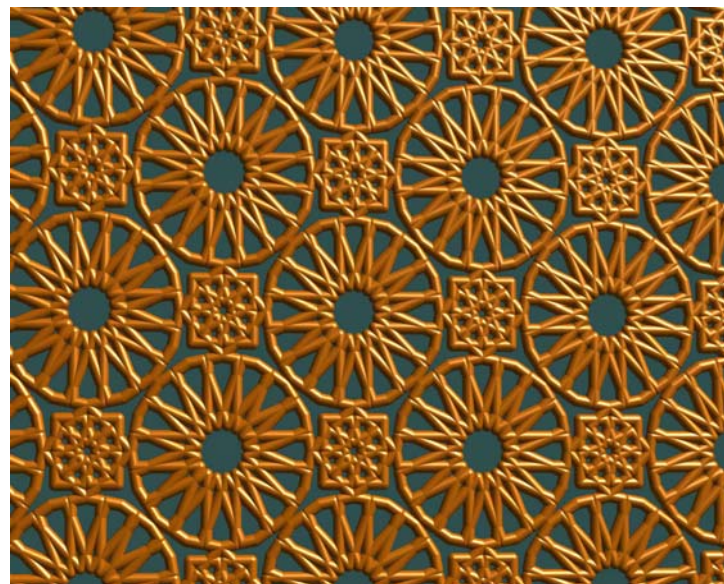
Výtvarné dokončení po vymazání pomocných čar:



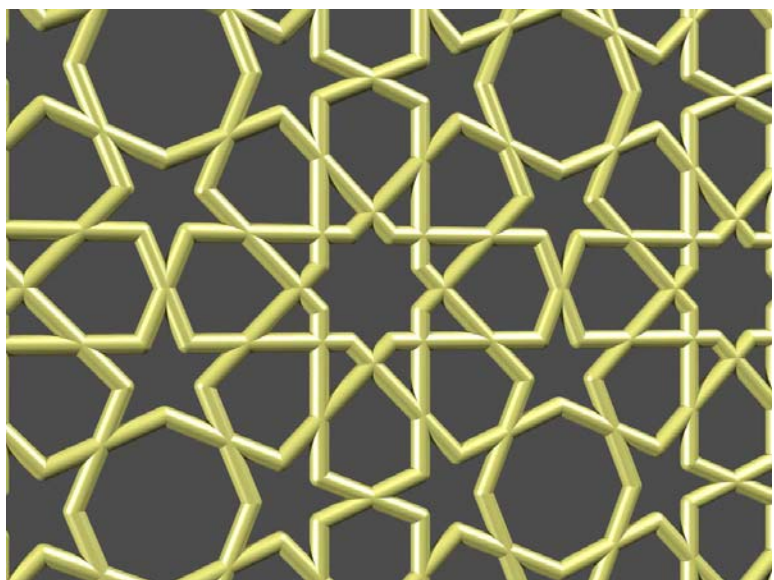
Několik mříží pro ukázkou:



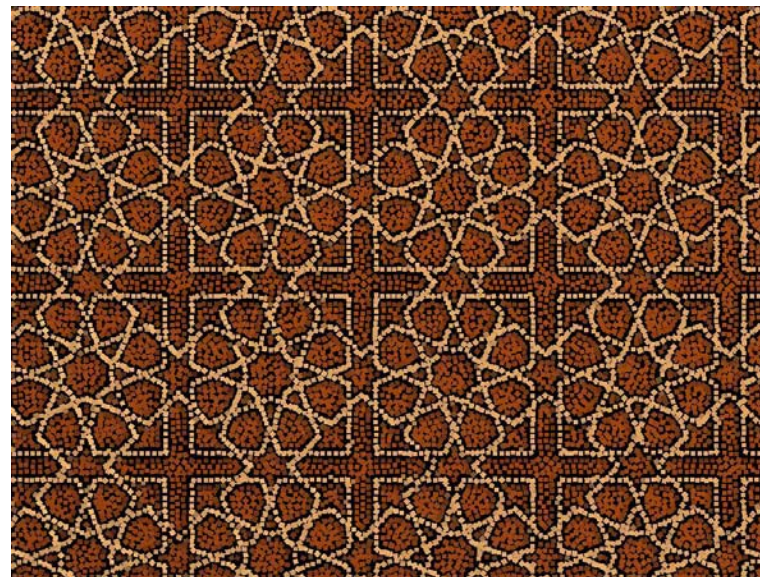
73



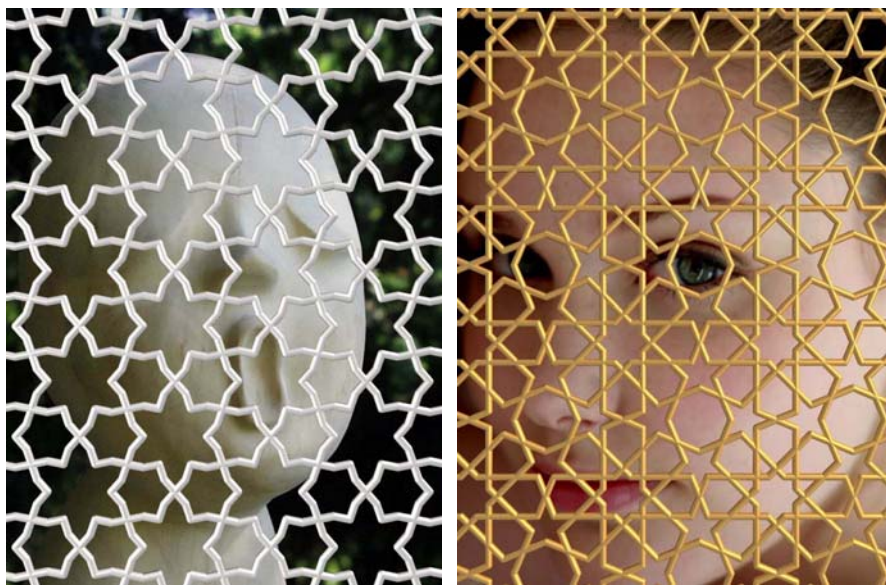
74



75

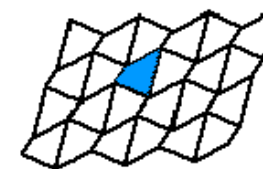
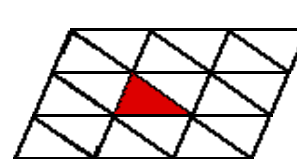


76

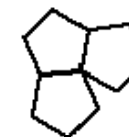


Několik jiných způsobů konstrukce mozaik

Provokující pětiúhelníky



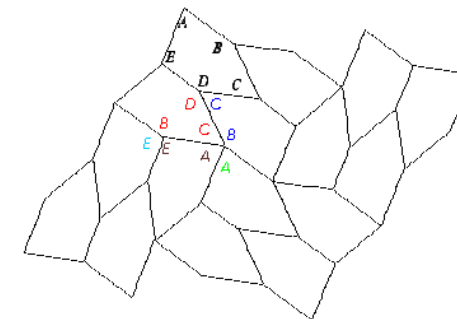
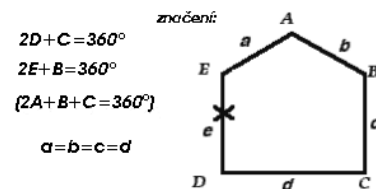
S trojúhelníky a čtyřúhelníky nejsou potíže.



Pravidelné pětiúhelníky „neteselují“.

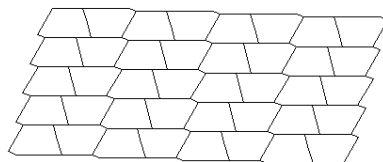
Co nepravidelné pětiúhelníky? Jsou? Kolik je druhů (typů)?

Matematici hledají různými cestami tvarové modifikace pětiúhelníkových dlaždic.

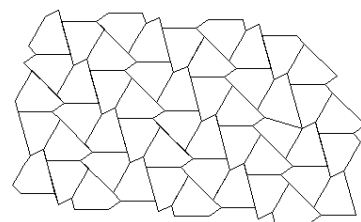


Doris Schattschneider: Přehled 14 typů konvexních pětiúhelníků

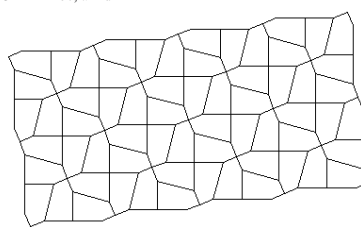
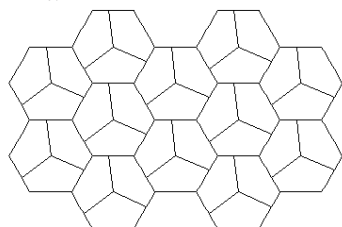
Historický vývoj: Typ 1-5 K. Reinhardt 1918. Typ 6-8 R. B. Kershner 1968.
 Typ 10 R. James 1975. Typ 9, 11-13 M. Rice 1976-1977. Typ 14 R. Stein 1985.



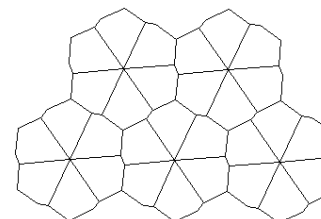
Typ 1 : $D + E = 180$



Typ 2 : $C + E = 180, a = d$

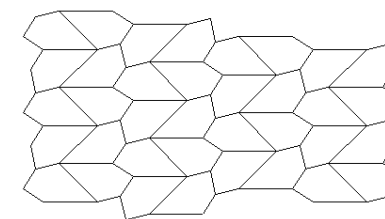


Typ 3 : $A = C = D = 120, a = b, d = c + e$

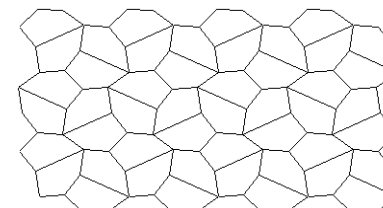


Typ 5 : $C = 2A = 120, a = b, c = d$

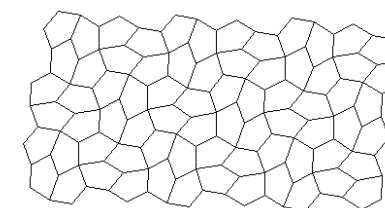
Typ 4 : $A = C = 90, a = b, c = d$



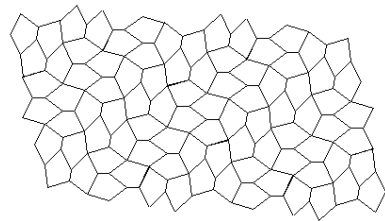
Typ 7 : $C + E = 180, A = 2C, a = b = e, c = d$



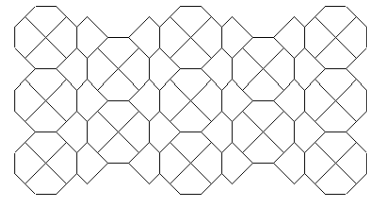
Typ 8 : $2B + C = 360, 2D + A = 360, a = b = c = d$



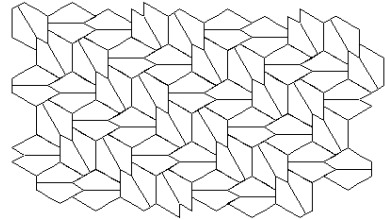
Typ 9 : $2A + B = 360, 2D + C = 360, a = b = c = d$



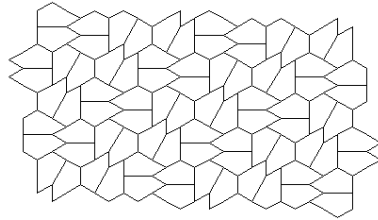
Typ 9 : $2E + B = 360, 2D + C = 360, a = b = c = d$



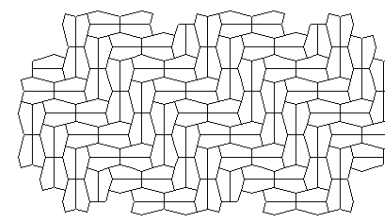
Typ 10 : $E = 90, A + D = 180, 2B - D = 180, 2C + D = 360, a = e = b + d$



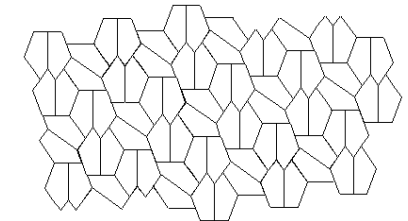
Typ 11 : $A = 90, C + E = 180, 2B + C = 360, d = e = 2a + c$



Typ 12 : $A = 90, C + E = 180, 2B + C = 360, 2a = c + e = d$

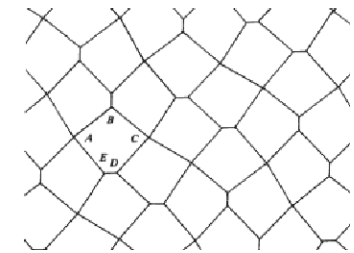
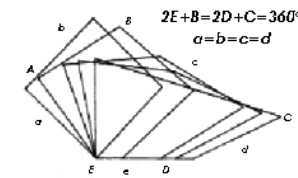


Typ 13 : $A = C = 90, 2B = 2E = 360 - D, c = d, 2c = e$

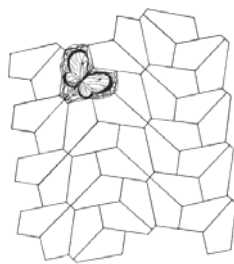


Typ 14 : $D = 90, 2E + A = 360, C + A = 180, B + D + E = 360, 2e = 2c = a$

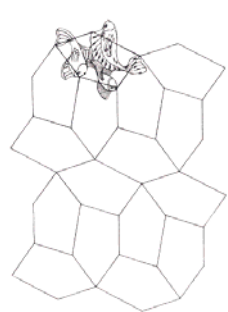
„Amatér Marjorie Rice“



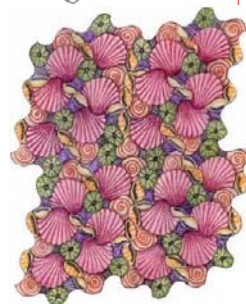
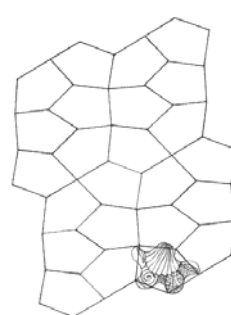
Typ 13



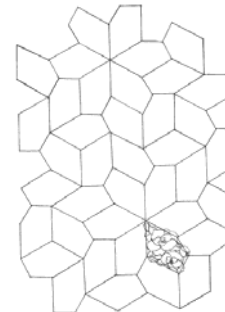
Typ 2



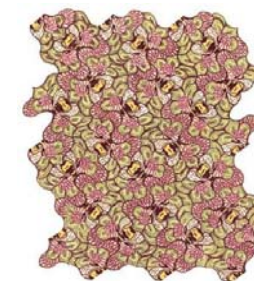
Typ 2



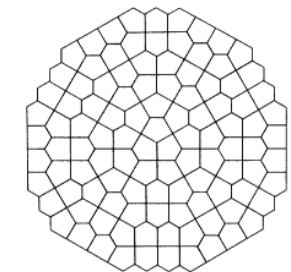
Typ 1



Typ 9



Pětúhelníková rozeta:



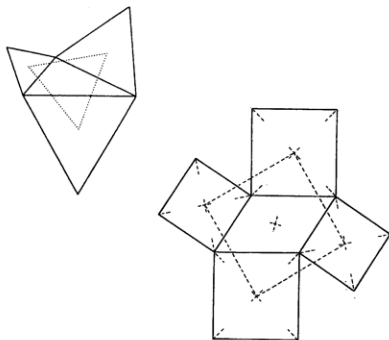
Mozaiky založené na planimetrických větách

Dva speciální případy věty A. Barlottiho:

Barlottiho věta

Nad stranami afimně-regulárního n -úhelníka sestrojme vně nebo dovnitř pravidelné n -úhelníky. Potom středy pravidelných n -úhelníků tvoří pravidelný n -úhelník.

N-úhelníkem je trojúhelník:
Věta Napoleonova (Ch. J. Scriba 1880)



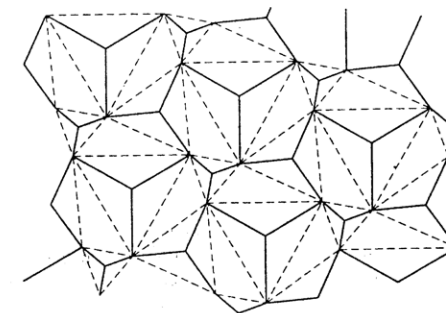
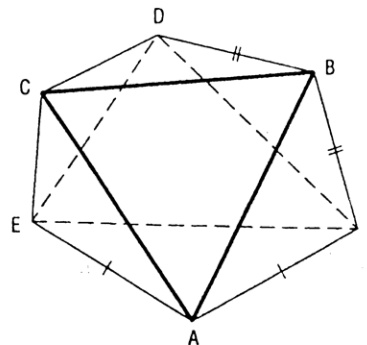
N-úhelníkem je čtyřúhelník:
Věta V. Thébaulтова 1937 (K. Petr 1905).

Prvou větu použil M. C. Escher (J. F. Rigby 1991), druhou Pavel Pech (1998)

85

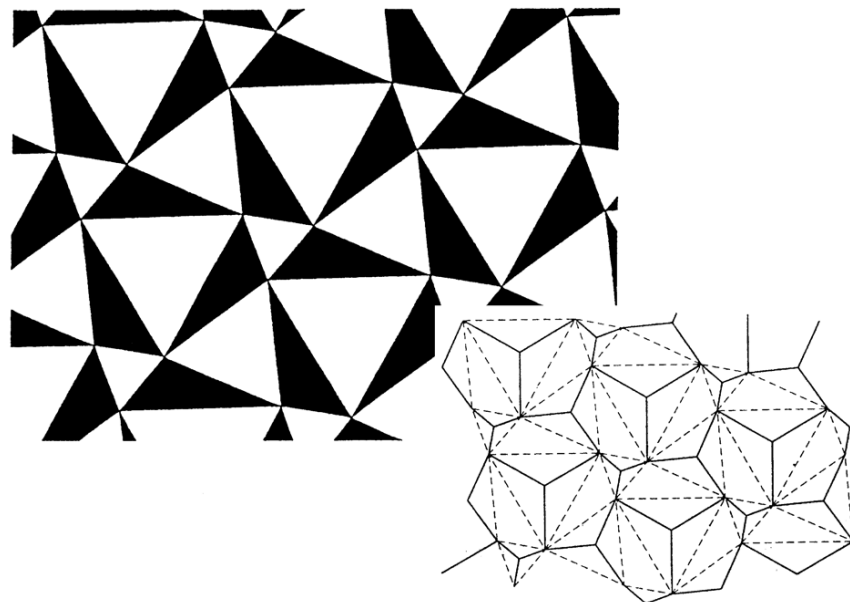
Escherova věta:

1. Nechť ABC je rovnostranný trojúhelník a E libovolný bod. Sestrojme bod F tak aby $|AF|=|AE|$ a $\angle FAE = 120^\circ$. Dále sestrojme bod D , pro který platí $|BD|=|BF|$ a $\angle DBF = 120^\circ$. Potom $|CE|=|CD|$ a $\angle ECD = 120^\circ$.
2. Shodnými šestiúhelníky $AFBDCE$ lze pokrýt rovinu.
3. Přímky AD , BE a CF se protínají v jednom bodě.



86

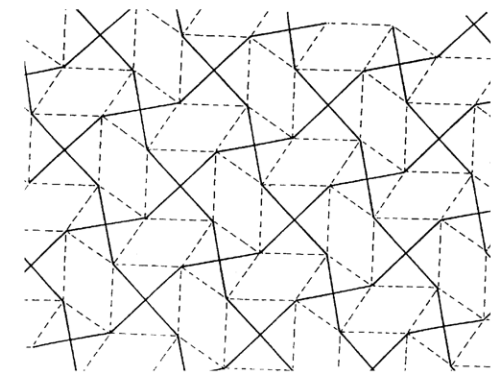
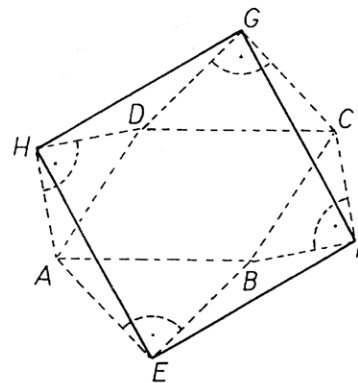
Př.



87

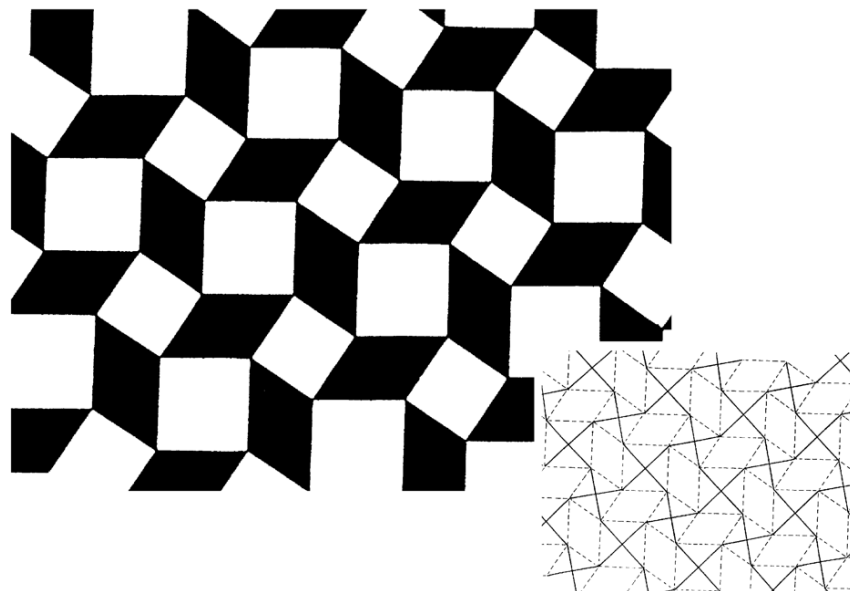
Pavel PECH: Můžeme též vyslovit obdobu Escherovy věty:

1. Je dán čtverec $EFGH$ a bod A . Sestrojme bod B tak, že platí $|AE|=|EB|$ a $\angle AEB = 90^\circ$. Dále postupně sestrojme body C a D , pro něž platí $|BF|=|FC|$, $\angle BFC = 90^\circ$ a $|CG|=|GD|$, $\angle CGD = 90^\circ$. Potom $|DH|=|HA|$ a $\angle DHA = 90^\circ$.
2. Shodné osmiúhelníky $AEBFCGDH$ pokrývají rovinu.
3. Spojnice protilehlých vrcholů osmiúhelníka $AEBFCGDH$ se protínají v jednom bodě ve středu rovnoběžníka $ABCD$.



88

Př.



89

Členěné dláždění (dissection tiling)

Wallace – Bolyai – Gerweinův teorém:

Dva libovolné mnohoúhelníky (nebo skupinu mnohoúhelníků) o stejné ploše (obsahu) můžeme rozdělit na menší mnohoúhelníky, ze kterých lze složit oba původní obrazce.

Z tohoto podnětného teorému vyšly další zajímavé studie. Např. Laczkovich dokázal, že každý rovinný obrazec ohraničený hladkou křivkou můžeme rozčlenit tak, že z dílků lze složit čtverec (kružnici lze přeměnit ve čtverec rozdělením na cca 10^{50} dílků).

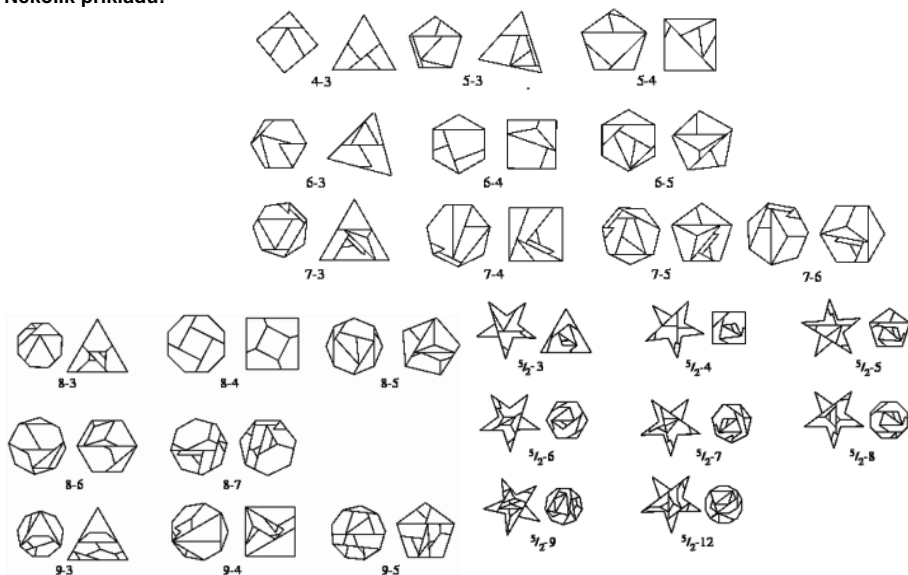
Převod není jednoznačný a je charakterizován počtem dělení. Řada geometrů hledala nejmenší možný počet dělení pro převod mnohoúhelníků. Např. G. Theobald (Frederickson 1997) našel nejmenší dělení pro konvexní n -úhelníky, kde $n=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ a 12 :



Každý n -úhelník lze převést na čtverec, který může být translační jednotkou (razítkem) mozaiky.

90

Několik příkladů:

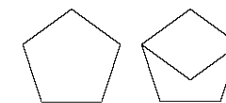


91

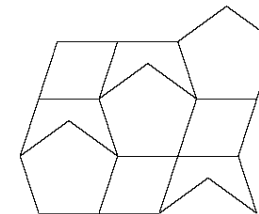
Zajímavější mozaiky dostaneme, vyjdeme-li z několika vstupních n -úhelníků a dílků po dělení.

Úloha je opět nejednoznačná a charakterizuje ji číslo k , poměr počtu dílků k počtu polygonů.

Př. Dva pětiúhelníky mohou být rozděleny na tři díly, $k = 1,5$.



Z dílků lze vytvořit razítko:

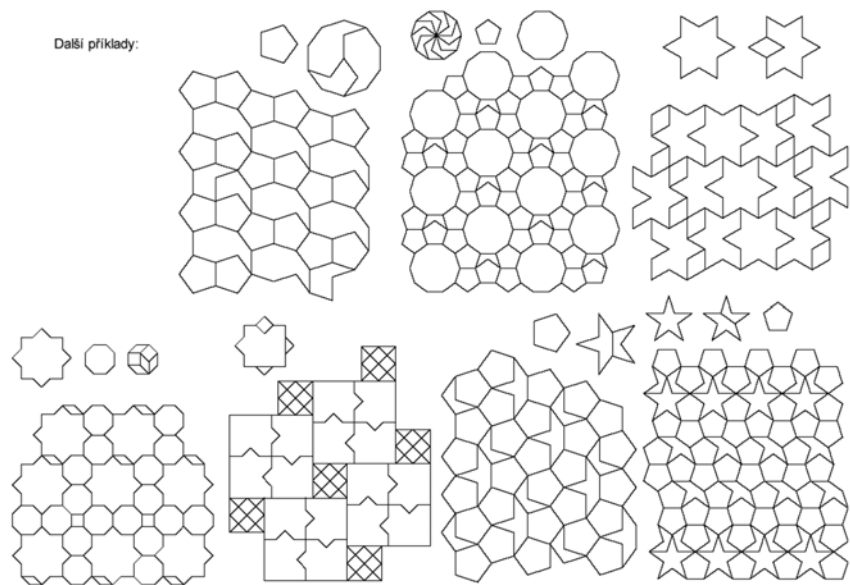


Výtvarně lepších výsledků docílíme s různými vstupními mnohoúhelníky a jejich dílky.

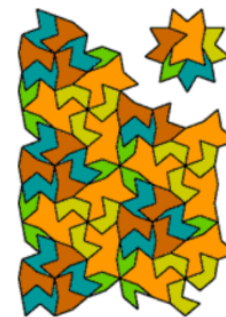
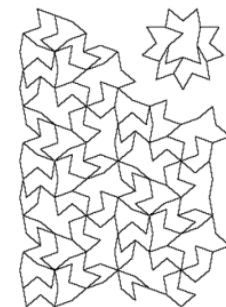
Frekvence dílku v mozaice at' odpovídá ploše dílku!

92

Další příklady:



Mozaika Davida Eppsteina používá členění z knihy Grunbauma a Shepharda



Označení hvězdy 9/3

