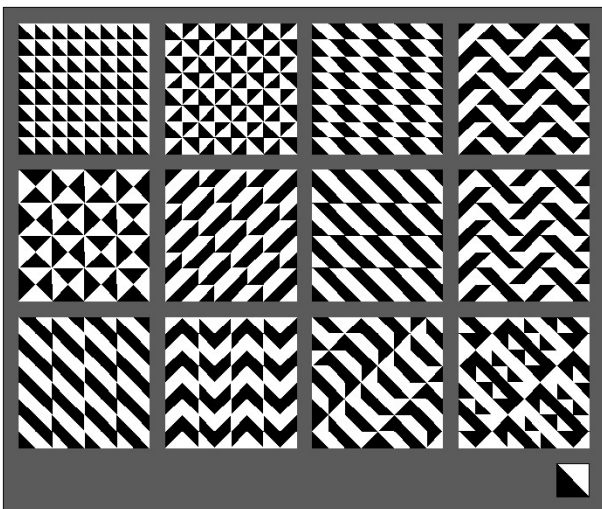


Modulární mozaikové vzory

Modul je vytvářen spojením několika dlaždic s jednoduchým motivem.



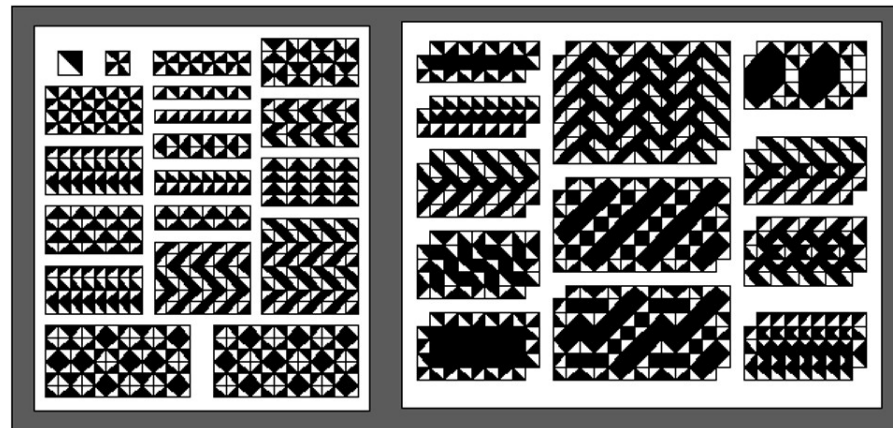
S. Truchet (1657 – 1729)



Dlaždice Trucheta má extrémně jednoduchý motiv a přesto vytváří bohaté vzory.

1

Takové vzory jsou známe z různých částí světa již z doby předhistorické (viz Jablan).

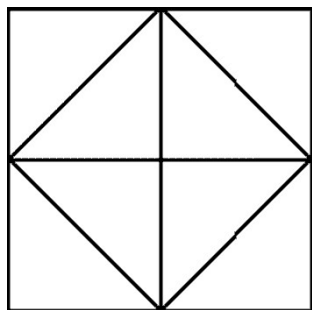


Hledáme vhodný algoritmus pro generování modulů.

2

V roce 1976 přichází S. H. Cullinane s teorií kosočtverce, který zajímal pro svoji bohatost symetrií již Platóna.

Platónův kosočtverec

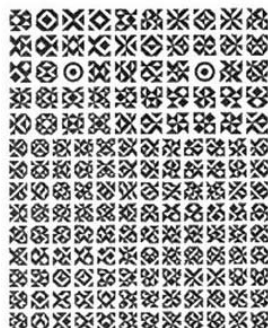


Teorie kosočtverce se stává základem pro řešení řady úloh.

Obálka knihy
S. H. Cullinana

Diamond Theory

Steven H. Cullinane



Copyright © 1976 by Steven H. Cullinane.
All rights reserved.
preliminary edition

3

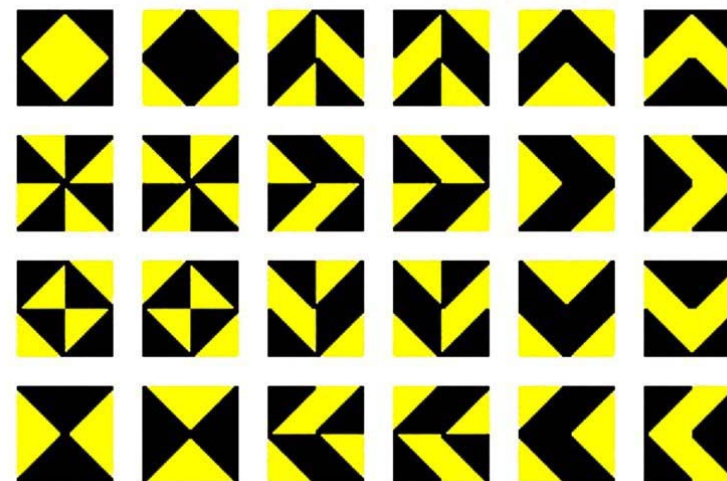
Generování modulů transpozicí

Základem je Platónův kosočtverec, resp. matice 2x2 dlaždic s diagonálním motivem

D 2x2



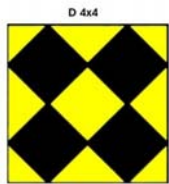
Permutace
transpozicí
čtverců
vytvoří
24 modulů.



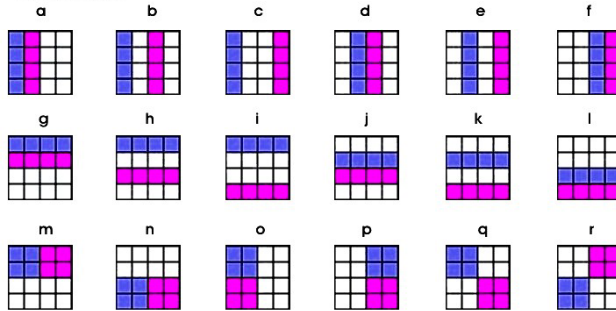
4

Permutace matice 4x4 jsou bohatší, protože jsou dány 18 možnými transpozicemi řádků, sloupců a kvadrantů základního vzoru.

Základní vzor

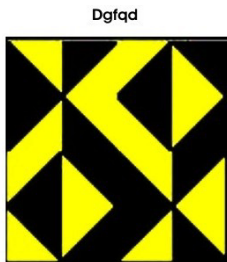


Transpozice:



Permutace v matici 4x4 vytvářejí 322 560 modulů.

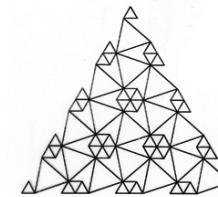
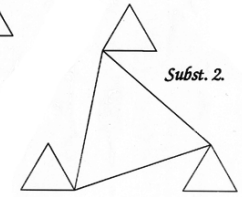
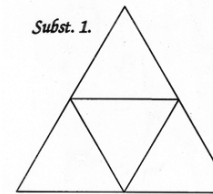
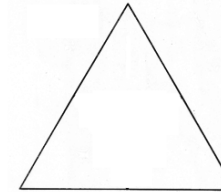
Př. Modul sekvence gfqd



Mozaiky konstruované geometrickou substitucí

Geometrickou substitucí budeme rozumět nahrazení geometrického primitivního prvku jinými geometrickými primitivami.

Jednoduchá substituce:



Algoritmy geometrických substitucí

(A. Glassner a další)

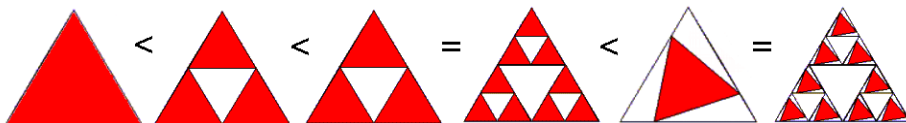
Substituce klonováním nahrazuje vstupní geometrický objekt (př. n -úhelník) jedním nebo více objekty - primitivy, které jsou geometricky podobné vstupnímu objektu.

Substituce mutací nahrazuje vstupní objekt geometrickým objektem jiného typu.

Nový (výstupní) tvar není nutně podobný vstupnímu tvaru.

Substituční pravidla (primitivy)

Substituční pravidla určují geometrii výstupního mnohoúhelníka P' jako funkci vstupního mnohoúhelníka P . Současně definují „mrtvé a živé oblasti“ a orientaci mapování.



Mapování primitiva do cílového trojúhelníku i s trojúhelníky obsaženými v primitivu.

Algoritmy - funkce pro konstrukci substitučních pravidel

Konstrukce vycházejí z vrcholů cílového n -úhelníka:

Pro každý vrchol V_i existuje jeho předchůdce V_{i-1} a následník V_{i+1} , podle dohodnutého pořadí.

Vytvoření nového vrcholu na hraně (resp. na straně ve 2D) - **funkce EV()**

Funkce EV (edge-vertex) určuje umístění nového vrcholu $V_{\alpha i}$ na hraně n -úhelníka na základě dvou sousedních vrcholů V_i, V_{i+1} a koeficientu α .

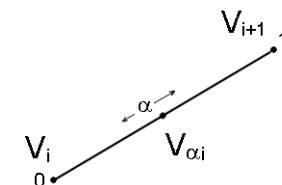
Koeficient α je skalární hodnota v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Vstup : vrchol V_i , vrchol V_{i+1} , koeficient α .

Výstup : nový vrchol $V_{\alpha i}$

$V_{\alpha i} = EV(V_i, V_{i+1}, \alpha)$

$EV(V_i, V_{i+1}, \alpha) = (\alpha V_{i+1}) + ((1 - \alpha)V_i)$



Př. Pro $\alpha = 0,5$

$EV(V_i, V_{i+1}, 0,5) = (0,5V_{i+1}) + ((1 - 0,5)V_i) \Rightarrow$ nový vrchol půli hranu.

Při definici n-úhelníků pomocí funkce EV bude záležet na volbě pořadí vrcholů (první dva parametry funkce).

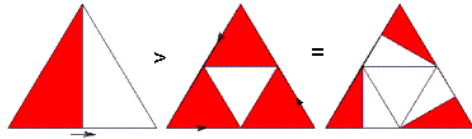
$$EV(V_i, V_{i+1}, \alpha) = (\alpha V_{i+1}) + ((1 - \alpha)V_i)$$

Příklad: $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75$



Namapování primitiva do cílového n-úhelníka bude závislé na určené orientaci hran.

Příklad orientace n-úhelníků v primitivu



9

Definice všech vrcholů primitiva z minulého příkladu:

$$D_1 = A$$

$$E_1 = EV(A, B, \alpha)$$

$$F_1 = EV(A, C, \alpha)$$

$$D_2 = B$$

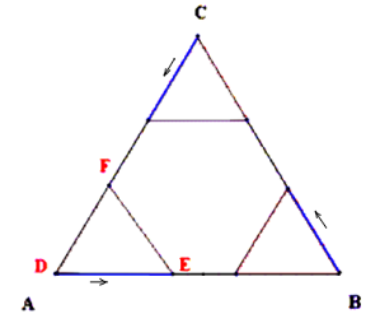
$$E_2 = EV(B, C, \alpha)$$

$$F_2 = EV(B, A, \alpha)$$

$$D_3 = C$$

$$E_3 = EV(C, A, \alpha)$$

$$F_3 = EV(C, B, \alpha)$$



Poznámka: Vrchol A lze definovat pomocí funkce EV jako: $A = EV(A, \text{cokoliv}, 0)$, stejně tak i vrcholy B a C. Funkci EV lze použít pro určení vrcholů obecného polygonu. Zavedeme funkci, která zkonstruuje ze zadaných vrcholů polygon.

10

Funkce konstruuující polygon vpoly (V_1, V_2, \dots, V_N), kde V_i jsou vrcholy tvořící polygon.

Pak definici primitiva z příkladu zapišeme jako:

$$\text{vpoly}(A, EV(A, B, \alpha), EV(A, C, \alpha))$$

$$\text{vpoly}(B, EV(B, C, \alpha), EV(B, A, \alpha))$$

$$\text{vpoly}(C, EV(C, A, \alpha), EV(C, B, \alpha))$$

Přeznačme vrcholy A,B,C jako indexované V_1, V_2, V_3 :

$$\text{vpoly}(V_1, EV(V_1, V_2, \alpha), EV(V_1, V_3, \alpha))$$

$$\text{vpoly}(V_2, EV(V_2, V_3, \alpha), EV(V_2, V_1, \alpha))$$

$$\text{vpoly}(V_3, EV(V_3, V_1, \alpha), EV(V_3, V_2, \alpha))$$

Vrcholy tvoří posloupnost, která je kruhově vázaná.

Této skutečnosti využije další funkce, která postupně vyhodnotí své parametry pro všechny vrcholy V_i v cílových n-úhelnících.

11

Funkce vloop() pro opakování dílčí konstrukce

Funkce vloop(a, b, c, ...) v každém kroku vyhodnotí parametry a zvýší indexy vrcholů, po přetečení pokračuje znovu od prvního indexu a končí po projití všech N indexů.

Příklady pravidel:

$$\text{Výplně rohů} = \text{vloop}(\text{vpoly}(V_i, EV(V_i, V_{i+1}, \alpha), EV(V_i, V_{i-1}, \alpha)))$$

Výplně rohů

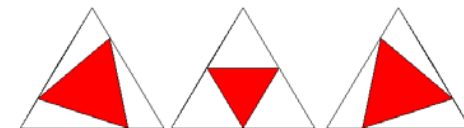
pro $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75$



Vepsání = $\text{vpoly}(\text{vloop}(EV(V_i, V_{i+1}, \alpha)))$

Vepsání

pro $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75$



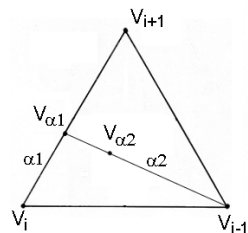
12

Jednoduchými úpravami parametrů dostaneme různé varianty primitivů, aniž bychom museli měnit jejich definici (viz implementace). Zavedeme poslední funkci, která dovolí definici vrcholu n-úhelníka i mimo hranu.

Kombinovaná hranová funkce EC()

Funkce EC je vlastně dvojitou aplikací funkce EV.

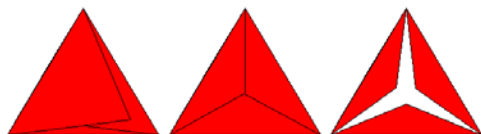
Složená funkce: $V_{\alpha 2} = EC(V_{i-1}, EV(V_i, V_{i+1}, \alpha 1), \alpha 2)$.



Hvězda = $vloop(vpoly(V_i, V_{i+1}, EC(V_{i-1}, EV(V_i, V_{i+1}, 0.5), \alpha))$

Hvězda

pro $\alpha = 0.25, 0.66, 0.75$



Funkce EC definuje bod kdekoliv uvnitř n-úhelníka a nepotřebuje další pomocné body

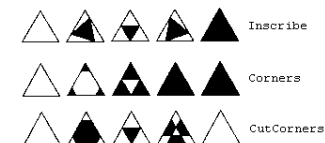
Glassnerovy klonovací substituce

Inscribe, Corners, CutCorners:

Inscribe: $poly(vloop(EV(V_i, V_{i+1}, \alpha)))$

Corners: $vloop(poly(EV(V_i, V_{i-1}, \alpha), V_i, EV(V_i, V_{i+1}, \alpha)))$

Cut Corners: $poly(vloop(EV(V_i, V_{i-1}, \alpha), EV(V_i, V_{i+1}, \alpha)))$



Pravidla pro mnohoúhelníky

Pravidla používají vrcholů mnohoúhelníka V_i , těžiště C a středových bodů M.

Těžiště C je dáno mnohoúhelníkem, středové body M získáme funkcí EV():

Vstup : vrchol V_i , vrchol V_{i+1}

Výstup : vrchol (střední bod hrany)

Zápis : $M_i \leftarrow EV(V_i, V_{i+1}, 0.5)$

Dále Glassner zavádí dva skalární koeficienty α a β pro umístění vrcholů na hranách.

Hodnoty α a β jsou navzájem disjunktní.

Pak definoval množinu funkcí:

$VP_i \alpha \leftarrow EV(V_i, V_{i-1}, \alpha VM)$

$VM_i \alpha \leftarrow EV(V_i, V_{i+1}, \alpha VM)$

$VC_i \alpha \leftarrow EV(V_i, C, \alpha VC)$

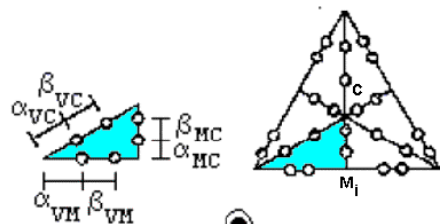
$MC_i \alpha \leftarrow EV(M_i, C, \alpha VC)$

$VP_i \beta \leftarrow EV(V_i, V_{i-1}, \alpha VM + \beta VM)$

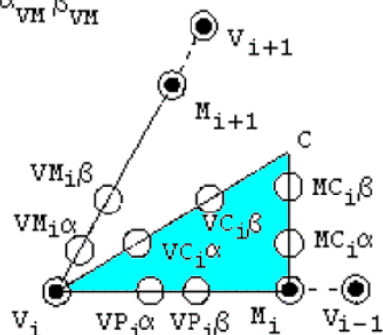
$VM_i \beta \leftarrow EV(V_i, V_{i+1}, \alpha VM + \beta VM)$

$VC_i \beta \leftarrow EV(V_i, C, \alpha VC + \beta VC)$

$MC_i \beta \leftarrow EV(M_i, C, \alpha MC + \beta MC)$



Geometrický význam rovnic:



Využitím uvedených funkcí konstruoval Glassner složitější substituční pravidla:

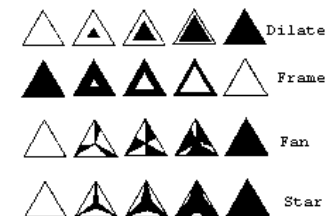
Substituce Dilate, Frame, Fan a Star

Dilate : $poly(vloop(VC_i \alpha))$

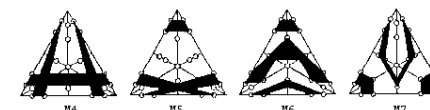
Frame : $vloop(poly(V_i, VC_i \alpha, VC_{i-1} \alpha, V_{i-1}))$

Fan : $vloop(poly(V_i, VM_i \alpha, C))$

Star : $vloop(poly(V_i, VM_i \alpha, C), poly(V_i, MC_{i+1} \beta, C))$



Glassnerovy mutační substituce



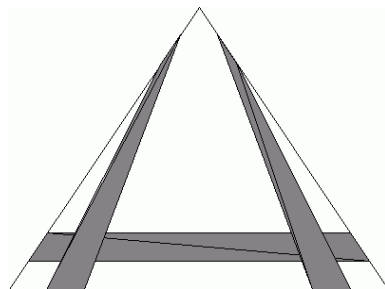
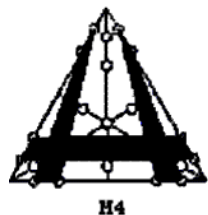
Zařazuje je na konci, protože obecné n-úhelníky nemají triangulační pokračování !!!

Mutační substituce se zachovanou triangulací

Abychom nemuseli dělat dodatečnou triangulaci útvaru vzniklého po aplikaci mutačních pravidel, zavedeme podmínku, že primitiv se musí skládat pouze z trojúhelníků.

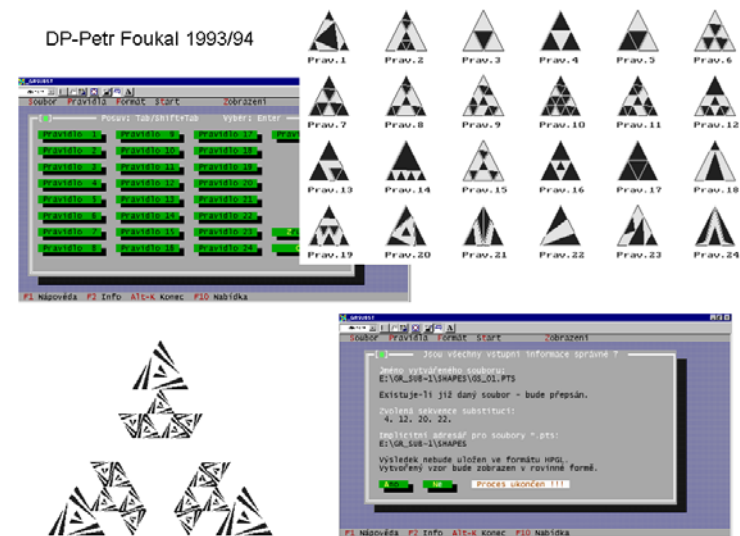
Tato podmínka nepředstavuje žádné omezení:

Př.
Glassnerův
primitiv M4

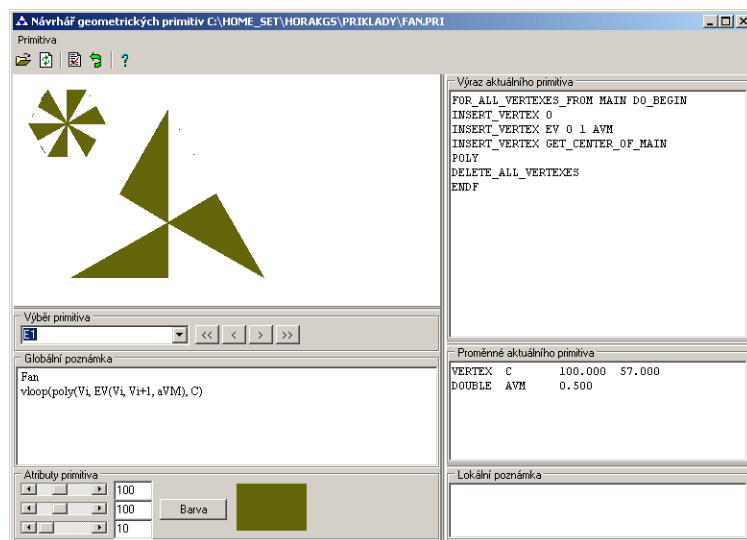


Pokud bude barva čar i výplně stejná, pak trojúhelníky nebude vidět. Nadále bude zachována trojúhelníková síť, na kterou můžeme znovu aplikovat libovolné substituce. Vhodné střídání klonování a mutaci může vytvořit další zajímavé výtvarné efekty.

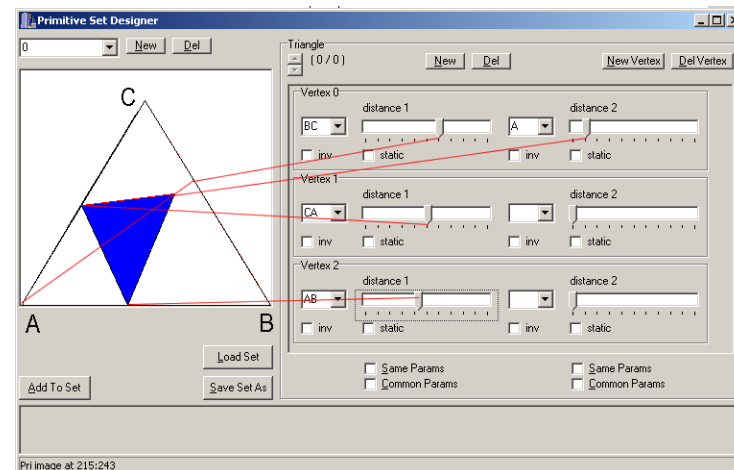
Vytvořené programové vybavení



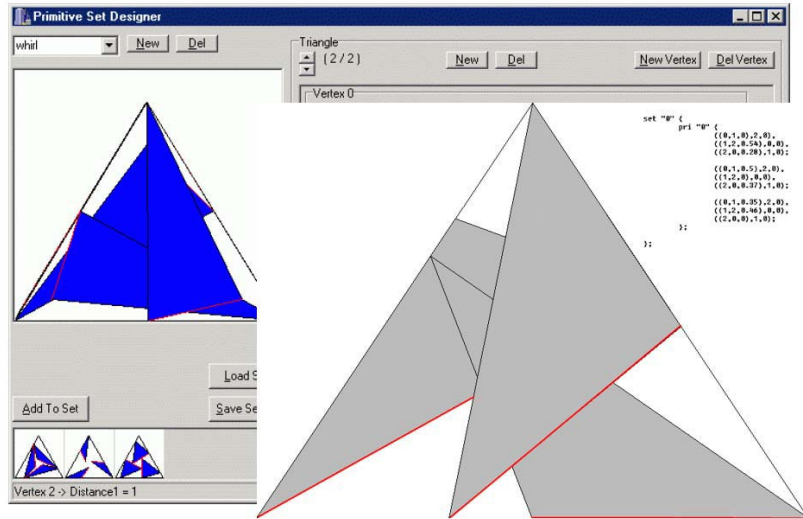
Okno návrháře substitučních primitivů DP – Martin Horák 1999/2000



Okno návrháře substitučních primitivů DP – René Novotný 2000/2001

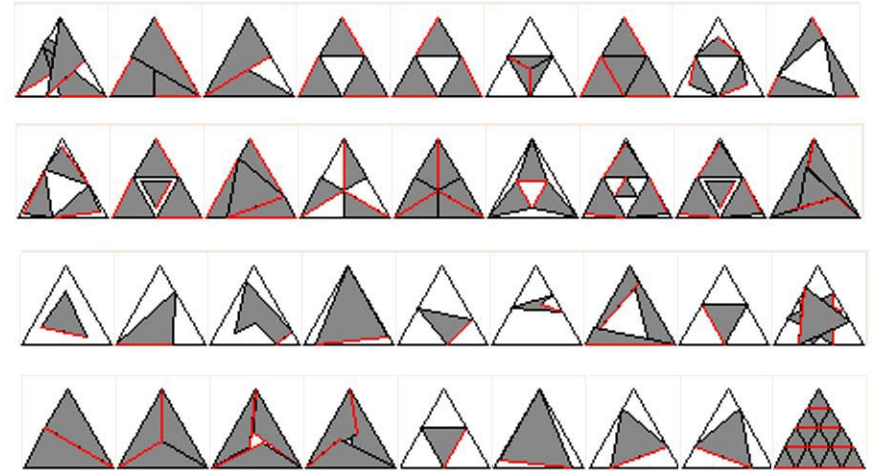


Konstrukce primitiv se třemi trojúhelníky a zápis v programu PRI



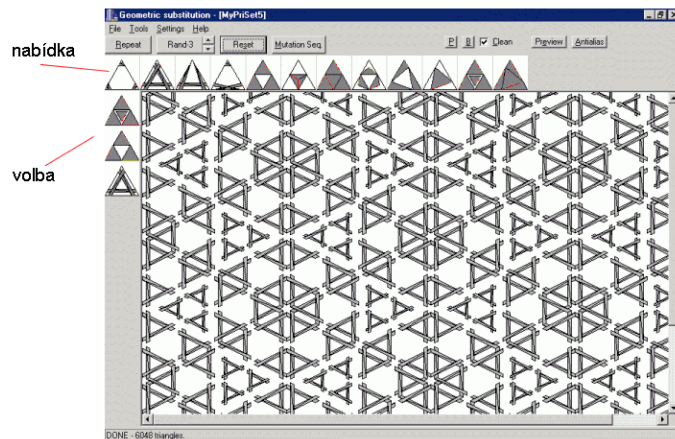
21

Soustava substitučních pravidel R. Novotného:



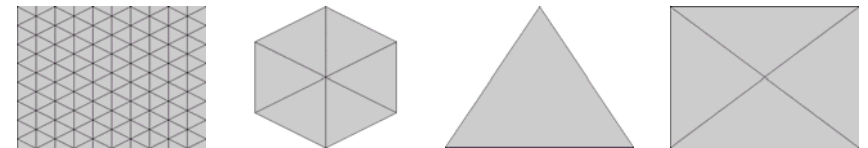
22

Hlavní okno programu R. Novotného

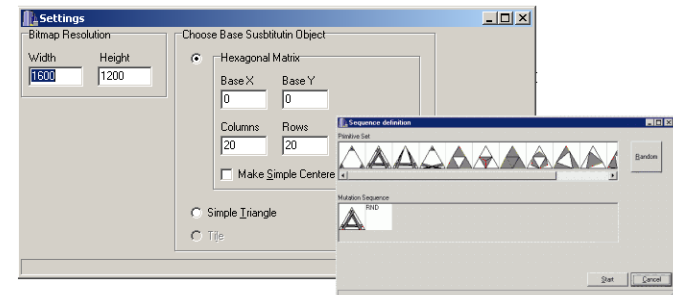


23

Tvary vstupních objektů:



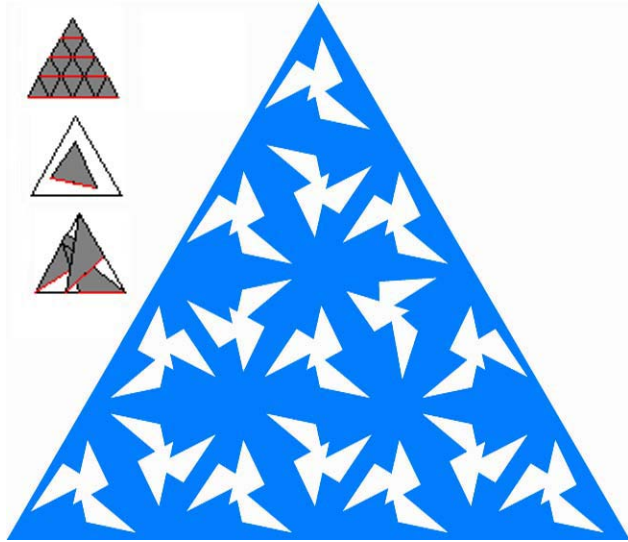
Okno pro definování vstupních a výstupních parametrů.



Okno pro vstup mutačních substitucí a náhodný výběr primitiva.

24

Př. Kombinace substitucí:



Ukázka aplikace substitucí

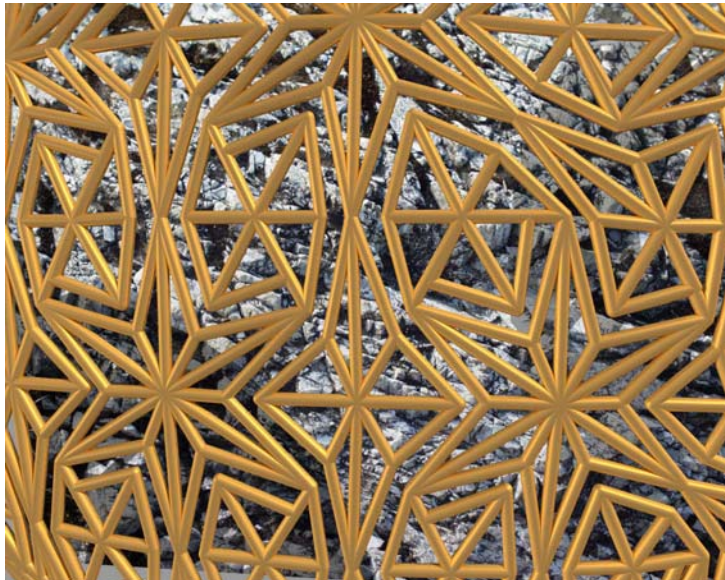
mozaika v rovině



mozaika na kouli

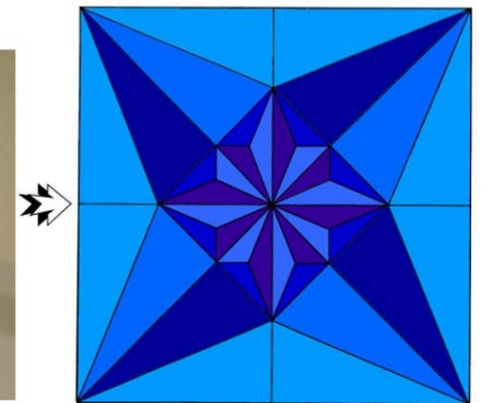


Př. Variace v 3D



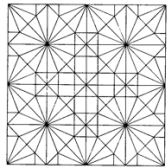
ORIGAMI

diagram skládání jako generátor dělení plochy

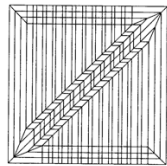


struktura hran
po osmém kroku skládání

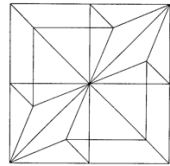
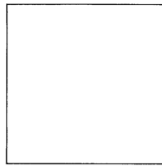
Diagramy známých figur (modelů)



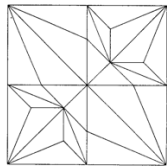
Crab.



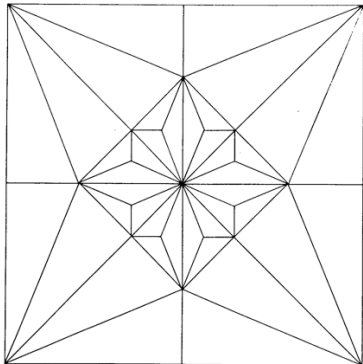
Rattlesnake.



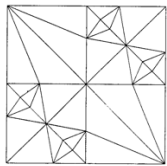
Angelfish.



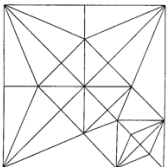
Butterfly Fish.



Kangaroo.

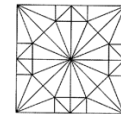
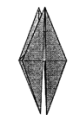
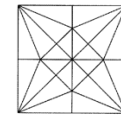
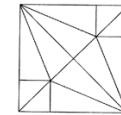
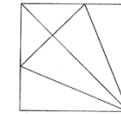


Discus Fish.

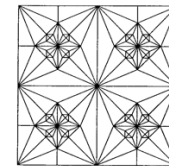


Hummingbird.

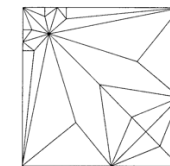
Výchozí figury



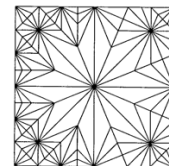
Pokračování diagramů



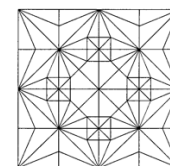
Octopus.



Penguin.

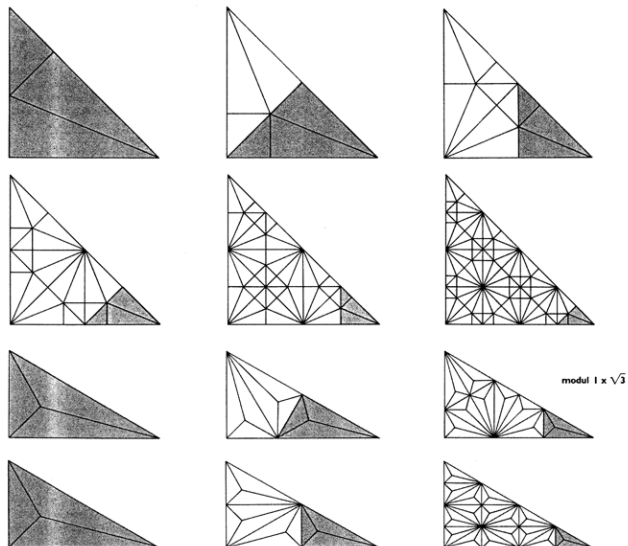


Scorpion.



Eight-Pointed Star.

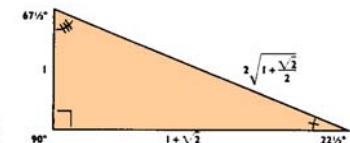
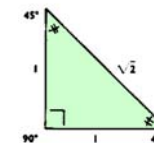
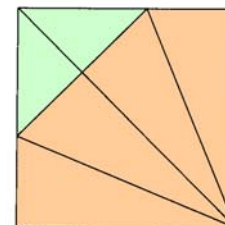
Efekt opakování modulu



Mozaika origami je geometricky určena několika základními trojúhelníky

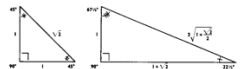
Př. Dvojice pravoúhlých trojúhelníků čtvercového modulu „startovacího papíru“

modul 1×1

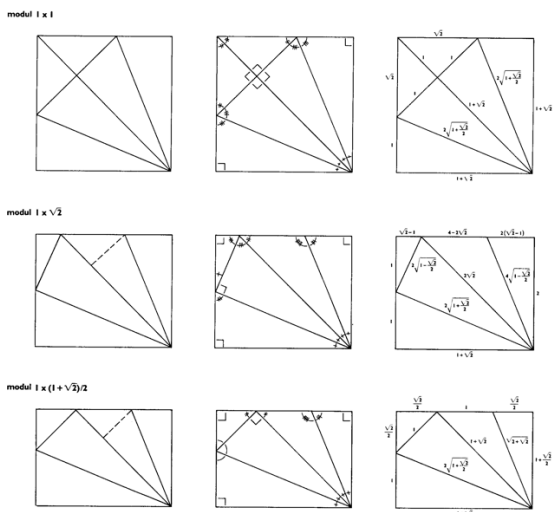


Poznámka: Podobně můžeme dekomponovat ostatní startovací moduly

Téměř všechny figury lze vytvořit pomocí dvou pravouhlých trojúhelníků



Tři typické moduly:



Nová (neeuclidovská) geometrie – kolem r. 1825

Otcové: Karl Friedrich Gauss, Janos Bolyai a Nikolaj Lobačevskij

Hlavní „novoty“:

Součet úhlů v trojúhelníku je menší než 180°.

Bodem lze vést nekonečně množství rovnoběžek k dané přímce atd.

Připomeňme: Existují jen tři regulární dláždění v Euklidově rovině $\{4, 4\}$; $\{3, 6\}$; $\{6, 3\}$, $\{p, q\}$ je Schläfliho symbol – q p -úhelníků se dotýká ve společném vrcholu.

Podmínky geometrií: $1/p + 1/q = 1/2$ - Euklidova

$1/p + 1/q < 1/2$ - hyperbolická

$1/p + 1/q > 1/2$ - eliptická

Poznámka:

Pro vrcholový úhel p -úhelníka platí $\alpha = 360^\circ/q$, součet vnitřních úhlů je tedy $p \cdot 360^\circ/q$.

Rozložíme-li p -úhelník na trojúhelníky, pak pro součet úhlů platí $(p - 2)180^\circ$

a odtud $p \cdot 360^\circ/q = (p - 2)180^\circ$. Dělíme $p \cdot 360^\circ$ a přidáme $1/p$, dostaneme podmínku geometrií.

Podmínkou konstrukce hyperbolických mozaik je znalost příslušných grup symetrií a jejich transformačních matic (nic nového!).

Poincarého disk

Hyperbolický prostor neumíme přímo reprezentovat v Euklidově prostoru. Tento problém řeší několik modelů.

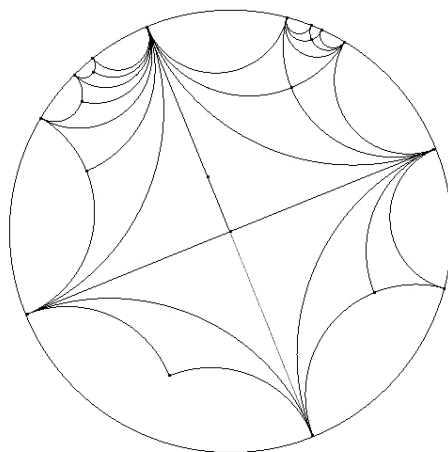
Poincaré modeluje hyperbolický prostor konformním zobrazením dovnitř kruhového disku.

Objekty v obou prostorech jsou si „zhruba podobné“.

Přímky se deformují v kruhové oblouky protínající disk pod pravým úhlem.

Rovnoběžky se protínají na obvodovém disku, ...atd.

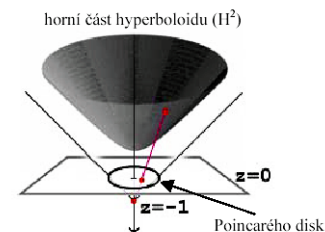
$$\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$$



Tato geometrie přináší mozaikám nové výtvarné možnosti.

Poincaré-Minkowského zobrazení

Weierstrassův (Minkowského) model hyperbolického prostoru



Bod X v trojdimenzionálním souřadném systému je definován jako $X = [x_1, x_2, x_3]$. Na X se dá pohlížet jako na vektor z počátku souřadnic $O = (0, 0, 0)$ do $X = [x_1, x_2, x_3]$.

Definujeme hyperbolický skalární součin vektorů X a Y jako $\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$. Hyperbolický prostor je reprezentován množinou bodů X, Y , pro které platí $\langle X, X \rangle = -1$, což dává v euklidovském prostoru E^3 dvojdílný rotační hyperboloid o rovnici $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ pro $x_3 >= 1$.

Hyperbolický bod X navíc splňuje $x_3 > 0$, takže každý hyperbolický bod bude ležet na horním dílu hyperboloidu označeném H^2 .

Trojdimenzionální Weierstrassův model můžeme projekcí převést na na Poincarého kruhový model středovou projekcí hyperboloidu do bodu [0,0,-1], při níž jako průmětna slouží rovina xy.

Každý bod *A* hyperboloidu při promítání protne rovinu xy a tento průsečík *B* je odpovídajícím bodem Poincarého disku.

Souřadnice *B* ze souřadnic *A* získáme pomocí Poincaré-Minkowského zobrazení:

$$(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right)$$

Pro zpětnou projekci bodu $B = [x, y]$ ležícího uvnitř Poincarého disku na hyperboloid platí:

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{2x}{s}, \frac{2y}{s}, \frac{1+x^2+y^2}{s} \right) \text{ pro } s = 1 - x^2 - y^2$$

Existence uvedených převodních vztahů je základním předpokladem pro konstrukci hyperbolických mozaik.

37

Konstrukce hyperbolického dláždění (D. Dunham, R. Charvát a další)

Nejdříve musíme zapsat vrcholy, hrany a pomocné geometrické entity *p-úhelníkových* dlaždic pomocí funkcí, které budou mít v argumentech hodnoty *p* a *q*.

Poznámka: Pro zjednodušení zápisu zavedeme substituce.

$$\begin{aligned} \csc p &= \csc\left(\frac{\pi}{p}\right), & \sin p &= \sin\left(\frac{\pi}{p}\right), & \csc q &= \csc\left(\frac{\pi}{q}\right), & \sin q &= \sin\left(\frac{\pi}{q}\right), & \cos 2p &= \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right), \\ \sin 2p &= \sin\left(\frac{2\pi}{p}\right), & \cosh q &= \frac{\csc q}{\sin q}, & \sinh q &= \sqrt{\cosh^2 q - 1}, & \cosh 2q &= 2 \cdot \cosh^2 q - 1, \\ \sinh 2q &= 2 \cdot \sinh q \cdot \cosh q, & \cosh 2 &= \frac{1}{\left(\frac{\sin p}{\csc p}\right) \cdot \left(\frac{\sin q}{\csc q}\right)}, & \sinh 2 &= \sqrt{\cosh^2 2 - 1}, & \text{rad} 2 &= \frac{\sinh 2}{\cosh 2 + 1} \end{aligned}$$

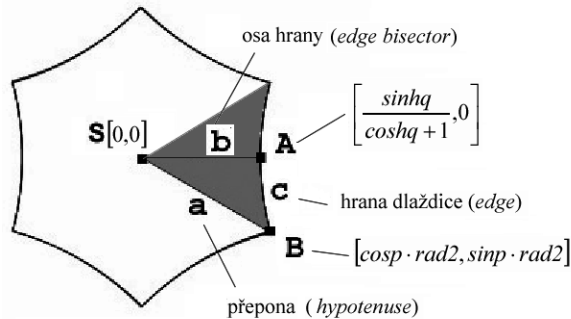
Pak sestavíme transformační matice pro manipulaci s dlaždicemi. Užitá transformace definuje stejně jako u Eulerových mozaik vzor mozaiky, tedy příslušná grupa symetrií.

Jako dříve u tapetových mozaik budou dlaždice dekomponovatelné na fundamentální oblasti.

Fundamentální oblasti jsou manipulačně omezeny stejně jako celé dlaždice, vybranou grupou symetrií (vzorem mozaiky). S výhodou je využijeme pro definování transformací.

38

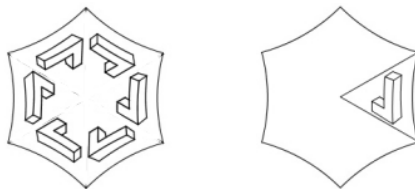
Obecná trojúhelníková fundamentální oblast dlaždice



Př. Celý motiv hyperbolické dlaždice a jeho fundamentální oblast:

Bod $S[0,0]$ je střed Poincarého disku

Dlaždice se středem $S[0,0]$ se nazývá centrální *p-úhelník*.



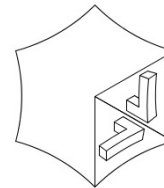
39

Transformační matice fundamentální oblasti

Reflexe:

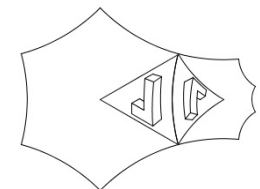
$$\text{reflectEdgeBisector} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámka: Zrcadlení podle osy *x*.



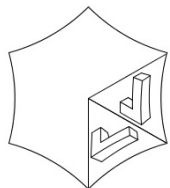
$$\text{reflectHypotenuse} = \begin{pmatrix} \cos 2p & \sin 2p & 0 \\ \sin 2p & -\cos 2p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{reflectPgonEdge} = \begin{pmatrix} -\cosh 2q & 0 & \sinh 2q \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh 2q & 0 & \cosh 2q \end{pmatrix}$$



40

Rotace skládáme z reflexí:

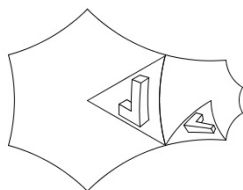


$$\text{rotate}P = \text{reflectHypotenuse} \cdot \text{reflectEdgeBisector} \quad \begin{matrix} \text{úhel rotace} \\ \frac{2\pi}{p} \end{matrix}$$

úhel rotace

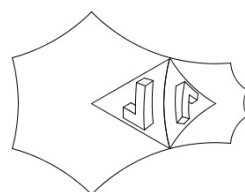
$$\text{rotate}Q = \text{reflectPgonEdge} \cdot \text{reflectHypotenuse} \quad \frac{2\pi}{q}$$

$$\frac{2\pi}{q}$$



$$\text{rotateEdge} = \text{reflectEdgeBisector} \cdot \text{reflectPgonEdge} \quad \pi$$

úhel rotace



41

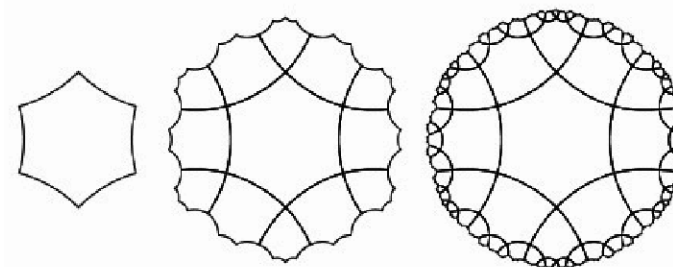
Vrstvy mozaiky

Nultá vrstva mozaiky obsahuje pouze centrální p -gon.

Mozaika je rozšířena z k -té vrstvy do vrstvy $k+1$ zrcadlením nebo rotací motivu (dle příslušné grupy symetrií) podél hran a vrcholů společných oběma vrstvám.

Proces může teoreticky trvat donekonečna, prakticky stačí čtyři až pět vrstev.

Příklad vrstev mozaiky {6,4}:

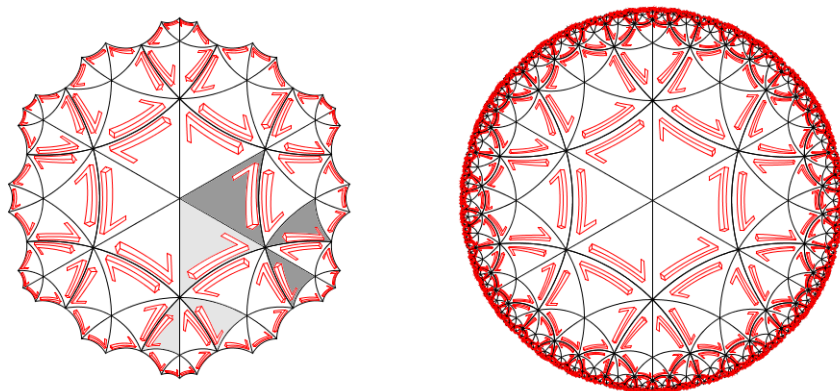


42

Replikační algoritmus

Chceme-li vykreslit k dané dlaždice jejího souseda z vyšší vrstvy, musíme nejdříve fundamentální oblast přemístit transformacemi k hraně, ve které spolu obě dlaždice sousedí.

Pro jednoduchost vykresleme dlaždice s motivem obsahujícím jen zobrazení fundamentální oblasti.



mozaika {6,4}

43

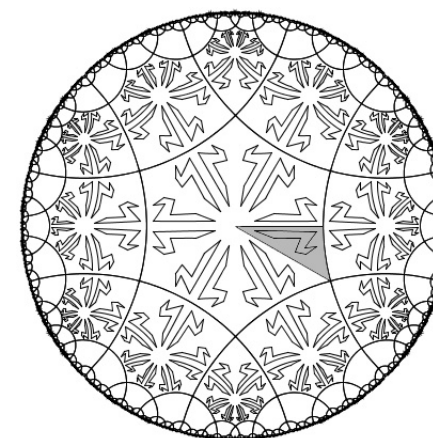
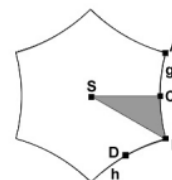
Fundamentální oblasti a grupy symetrií podle D. Dunhama (Autor ukázek R. Charvát)

Grupa symetrií $[p, q]$

Fundamentální oblast tvoří pravouhlý hyperbolický trojúhelník SCB .

Grupu symetrií $[p, q]$ tvoří transformace:

- zrcadlení podle hrany dlaždice (AB)
- zrcadlení podle osy hrany (SC)
- zrcadlení podle spojnice (SB)



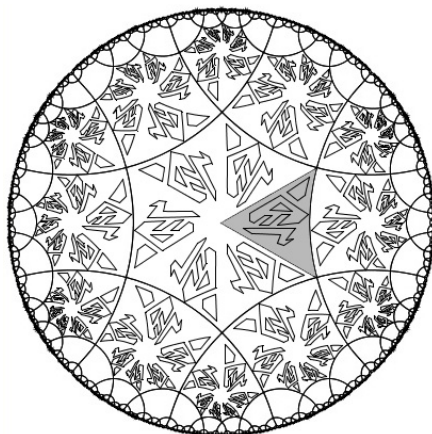
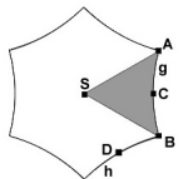
44

Grupa symetrií $[p, q]^+$

Fundamentální oblast tvoří hyperbolický trojúhelník SBA .

Grupu symetrií $[p, q]^+$ tvoří transformace:

- rotace řádu p kolem středu dlaždice o úhel $2\pi/p$ stupňů
- rotace řádu q kolem vrcholu dlaždice o úhel $2\pi/q$ stupňů
- rotace kolem středu hrany dlaždice o úhel $2\pi/2$.



45

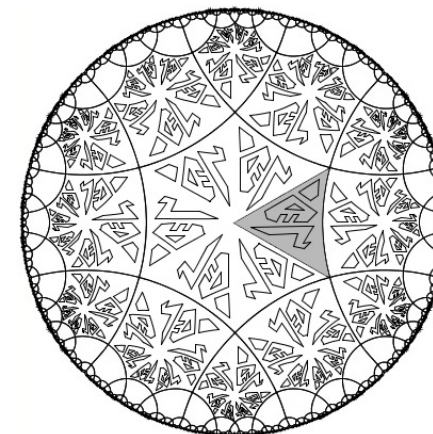
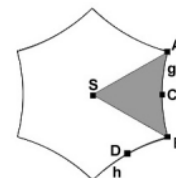
Grupa symetrií $[p^+, q]$

Fundamentální oblast tvoří opět hyperbolický trojúhelník SBA .

Aby se mozaika vykreslovala správně, musí být u této grupy symetrií q sudé.

Grupu symetrií $[p^+, q]$ tvoří transformace:

- rotace kolem středu dlaždice o úhel $2\pi/p$ stupňů
- zrcadlení podle hrany dlaždice AB .



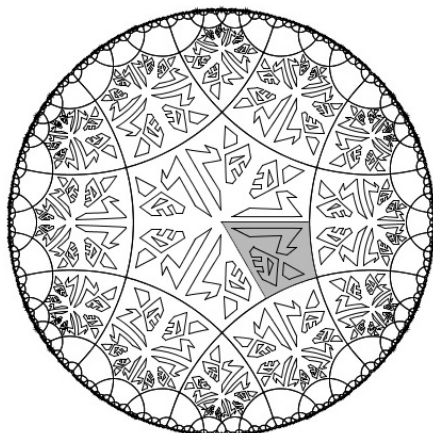
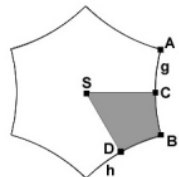
46

Grupa symetrií $[p, q^+]$

Fundamentální oblast je tvaru draka, tvoří ji dva malé pravouhlé hyperbolické trojúhelníky přilehlé k témuž vrcholu dlaždice ($SDBC$). U této grupy symetrií musí být p sudé.

Grupu symetrií $[p, q^+]$ tvoří transformace:

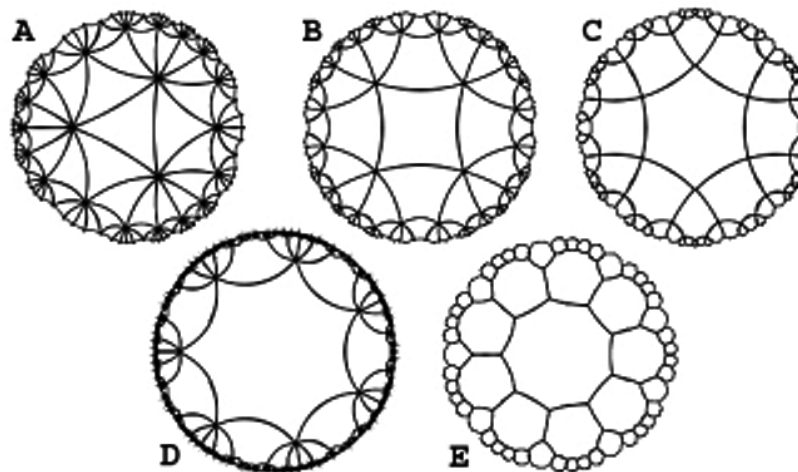
- zrcadlení podle osy hrany dlaždice SC
- rotace kolem vrcholu dlaždice o úhel $2\pi/q$ stupňů



47

Příklady 1: Regulární mozaiky pro různé hodnoty p, q - nevybarvené

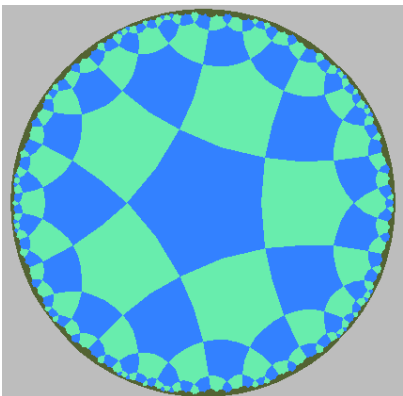
$$A = \{3, 9\}, B = \{4, 6\}, C = \{6, 4\}, D = \{7, 7\}, E = \{9, 3\}$$



48

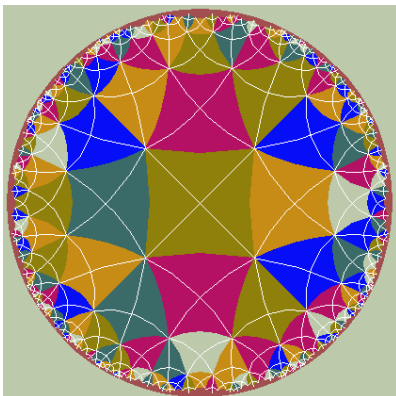
Příklady 2: Regulární hyperbolické dláždění – vybarvené dlaždice

Př. {5,4}



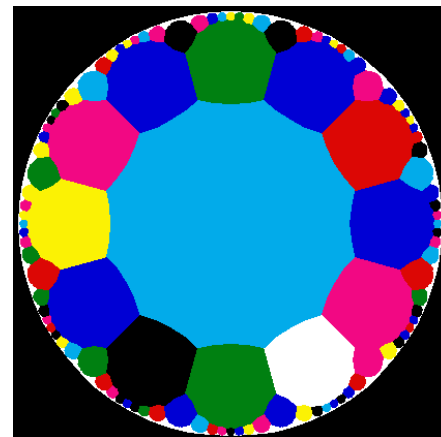
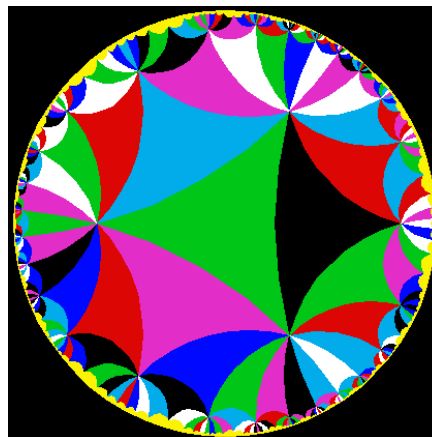
Duální hyperbolické dláždění

Př. {4,5}



Příklady 3: {3,12}

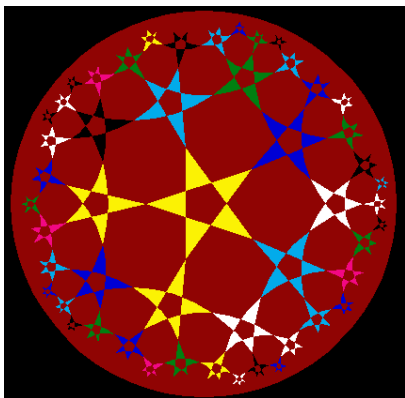
{12,3}



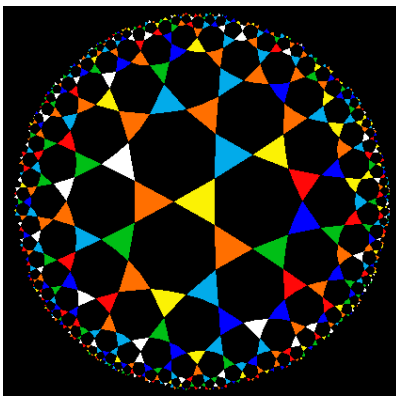
Kvaziregulární hyperbolické dláždění

Podobně jako v Euklidově rovině můžeme spojováním středů stran p-úhelníků regulárního dláždění vytvořit kvaziregulární dláždění.

Př. kvazi-{5,4}



Př. kvazi-{3,7}



Různé vybarvení (nevybarvení) p-úhelníků dává další možnosti.

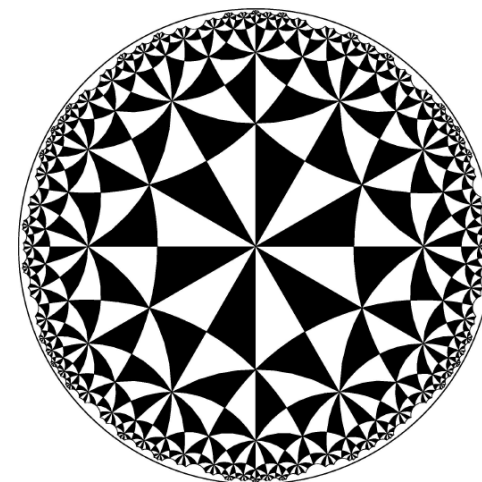
KRUHOVÉ LIMITY M. C. ESCHERA (studuje a doplňuje je D. Dunham 1981)

Největší reklamu hyperbolickým mozaikám udělal M.C. Escher „kruhovými limitami“.

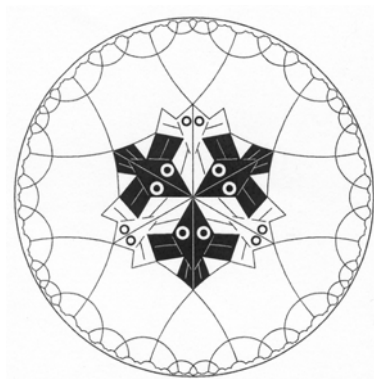
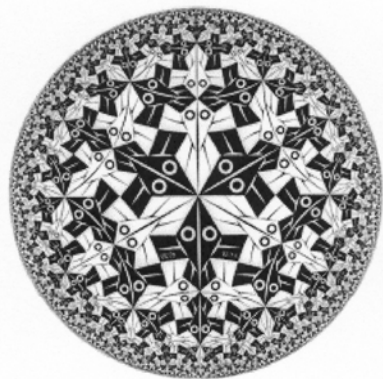
Podnícen setkáním v roce 1954 s H. S. M Coxeterem vAmsterdamu, a článkem „Crystal Symmetry and Its Generalisations“.

Eschera zaujal obrázek trojúhelníkového dláždění v hyperbolické rovině.

trojúhelníky 30 – 45 –90.



Kruháv limitá – Ryby Circle Limit 1 {6,4} 1958



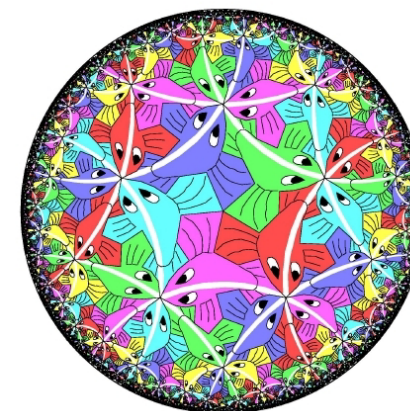
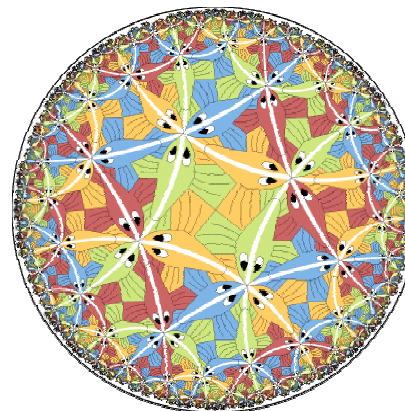
M. C. Escher's "Circle Limit I" © 2003 Cordon Art B. V.-Baarn-Holland. All rights reserved.

Dunhamova rekonstrukce – centrální dlaždice

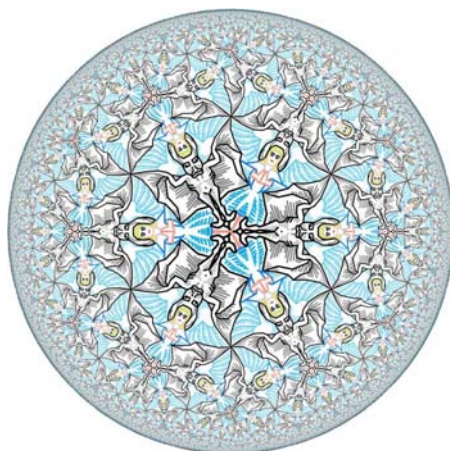
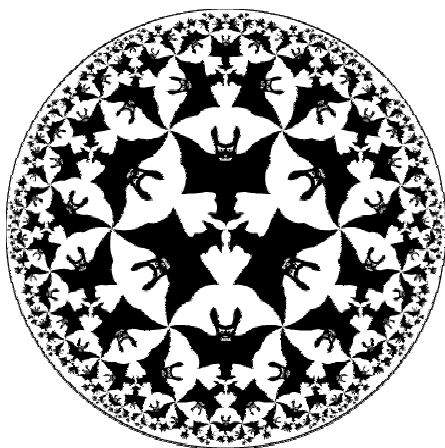
Čtyřbarevná Escherova kruháv limitá – Ryby

Circle Limit 3 {8,3}

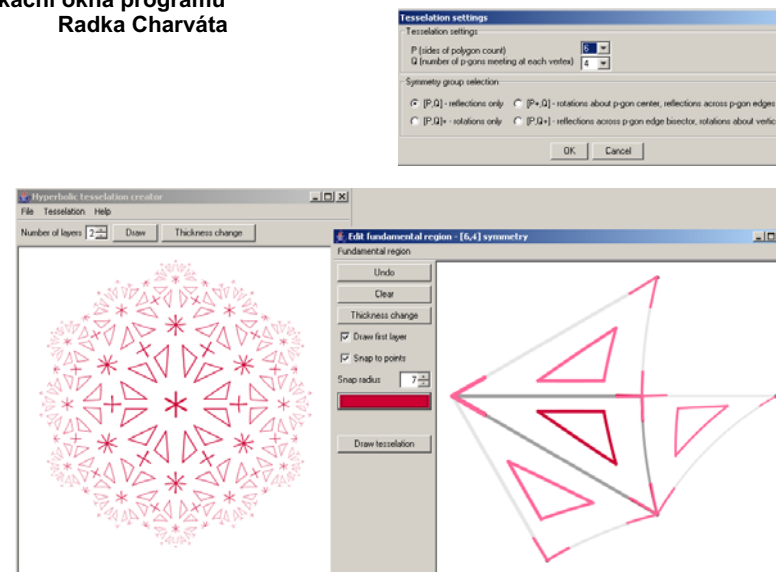
Dunhamova varianta {10,3}



Escherova kruháv limitá IV - Ďáblí a andělé {6,4} varianta Radka Charvátá



Komunikační okna programu Radka Charvátá



M. C. Escher neměl počítač, jak konstruoval své mozaiky?

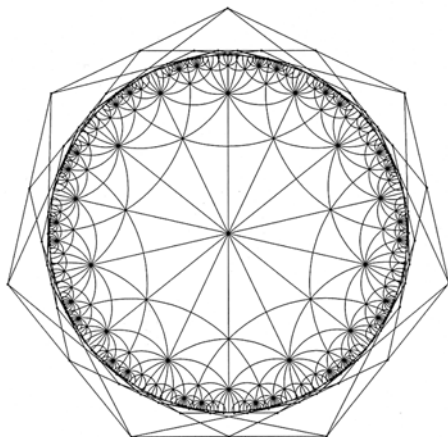
Historická pomocná konstrukce pomocí kružítka a pravítka

Podrobný rozbor viz. lit.:

Chaim Goodman–Strauss:
„Compass and Straightedge in the
Poincaré Disk“
The Mathematical Association
of America, January 2001,
pp. 38 – 49.

Pomocná konstrukce H. S. M. Coxetera,
(scaffolding),
která inspirovala Eschera.

Poznámka:
Chce to velký arch papíru a trpělivost!!!

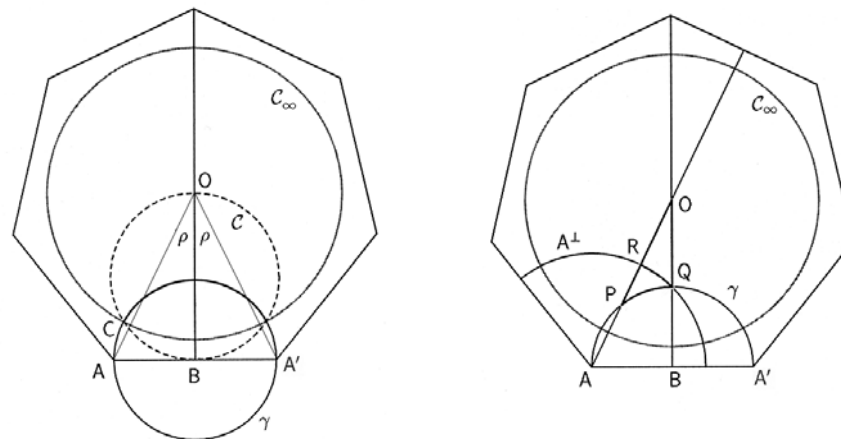


57

Př. Konstrukce regulární hyperbolické mozaiky tvořené trojúhelníky $(p, q, 2)$,

Zadejme trojúhelník o vnitřních úhlech $\pi/7, \pi/4, \pi/2$

Začínáme středem Poincarého disku O , vrcholem pomocného p -úhelníka A a úhlem $\rho = \pi/7$.
Limitní kružnice vyplyne z konstrukce.



trojúhelníky OQP a PQR mají vnitřní úhly $\pi/7, \pi/4, \pi/2$

58

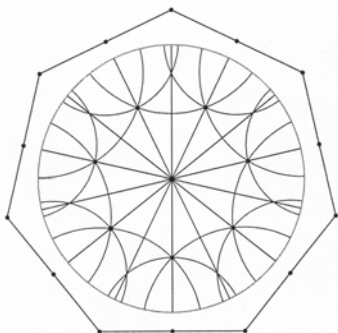
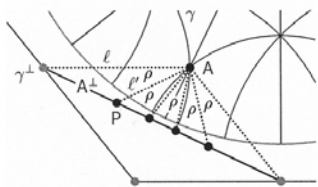
Využijeme symetrie:

Získali jsme první vrstvu mozaiky

Připomeňme:

Póly hyperbolických přímek
(kružnic uvnitř disku), které se protínají
v jednom bodě, mají společnou poláru
(leží na jedné přímce vně disku).

Další vrstvu získáme násobnou rotací
kolem A o $\pi/7$:



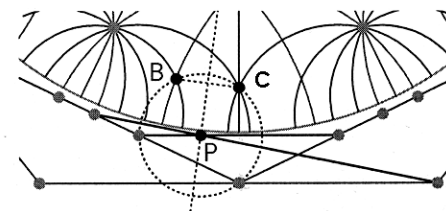
Získali jsme druhou vrstvu:

59

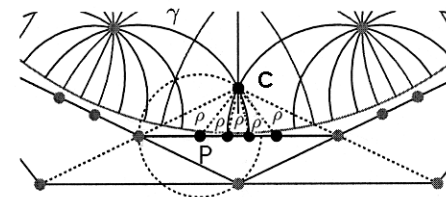
Nyní potřebujeme hyperbolickou úsečku BC .

Hledáme její pól P .

Konstrukci průsečíku zlepšit
skutečností, že P leží na symetrále
úhlu $\rho = \pi/7$.



Stejně jako dříve
pokračujeme rotací kolem bodu C :



Získali jsme třetí vrstvu:
atd. ...

Zobecnění - viz. Ch. Goodman–Strauss.

60