

## FRAKTÁLY

S názvem fraktál přišel matematik **B. Mandelbrot** ( IBM, Harvard univ.) kolem roku 1975. Záhy fraktální funkce nacházejí použití v řadě oborů.

### Aplikace v počítačové grafice:

Vizuální modelování přírodních objektů a textur.

### Typické znaky přírodních objektů:

Tvarová komplikovanost a řád v „chaosu“ (fractus).

Nepřehlédnutelná tvarová soběpodobnost nezávislá na měřítku.



Pro výtvarnou bohatost a atraktivnost jsou fraktály velkým tématem Výtvarné informatiky (Mathematic Art).

1

## Studium „divných“ funkcí (1875 - 1925) Cantor, Peano, Sierpinski, Koch, ....

Iterace algebraických transformací

$$T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \quad d \text{ dim. } E. \text{ prostor}$$

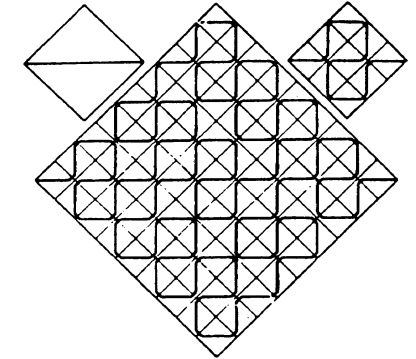
Posloupnost bodů v prostoru

$$x_0 = x, x_1 = T(x), x_2 = T(T(x)), x_3 = T(T(T(x))), \dots$$

Zajímá nás: průběh  $x_i$ , atraktory, atd.

### Zobecníme $x$ a $T$ (iniciátor, generátor)

Př. Peanova křivka ( 1890 ),  
Iterace zobrazení úsečky na plochu vede  
k rozporu v topologických dimenzích.



Fraktální objekt je tvarově nezávislý (invariantní) na měřítku.

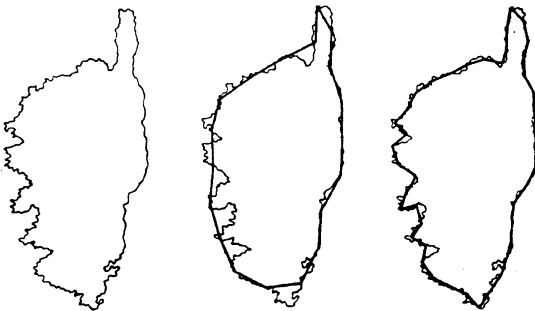
Dimenze fraktálního objektu (Hausdorfova) je ostře větší než jeho dimenze topologická.

2

Jinou cestou se k fraktální závislosti dostal Richardson

### Délka pobřeží Korsiky ( L. F. Richardson, 1961)

$$L = k \cdot a^{1-D} \quad a = 20 \text{ km} \quad a = 10 \text{ km}$$



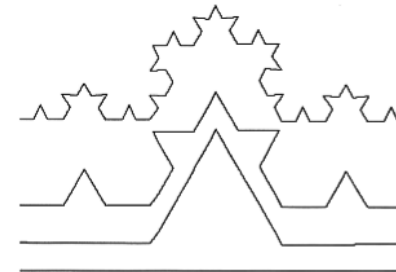
Mandelbrot dává do souvislosti  $D$  a Hausdorfovu dimenzi.

Základní vlastnosti fraktálů si objasníme na tzv. křivkách vyplňujících prostor.

3

## KŘIVKY VYPLŇUJÍCÍ PROSTOR (SFC)

Kochova sněhová vločka jako vzorový příklad fraktální funkce



$$D = \ln N / \ln (1/S)$$

$$D = 1,2618$$

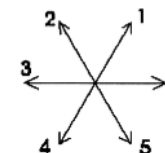
$$S = 1/3 \text{ měřítko}$$

$$N = 4 \text{ počet dílů}$$

$$l_i = 1, 4/3, 16/9 \dots$$

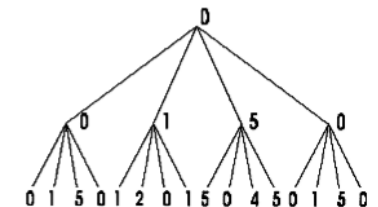
l jde k nekonečnu!

### Genetický kód křivky



0	0	1	5	0
1	1	2	0	1
2	2	3	1	2
3	3	4	2	3
4	4	5	3	4
5	5	0	4	5

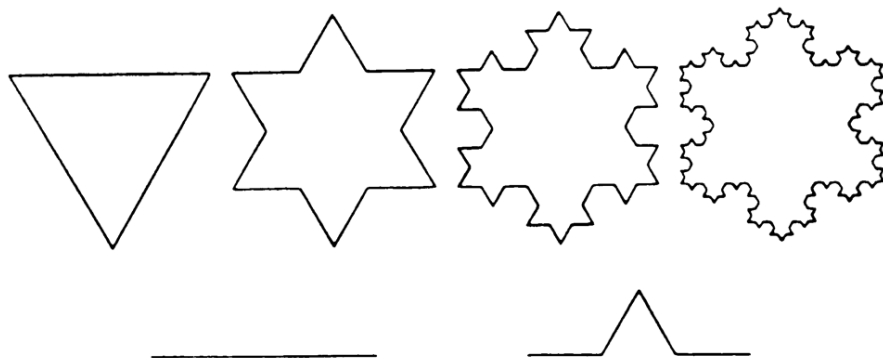
### Strom života



4

Poznámka - rozbor:

### Sněhová vločka Helge von Kocha (1906)



Iniciátor a generátor křivky Kocha

Označme  $l_k$  délku elementární úsečky křivky Kocha  $k$ -tého řádu,  $n_k$  počet těchto elementárních úseček,  $L_k$  obvod křivky Kocha řádu  $k$  a  $V_k$  obsah plochy uzavřené křivkou.

5

Na základě definice můžeme stanovit tyto rekurzivní vztahy:

$$\begin{aligned}
 l_0 &= 1 \\
 l_{k+1} &= \frac{l_k}{3}, \quad k > 0 \\
 n_0 &= 3 \\
 n_{k+1} &= 4n_k, \quad k > 0 \\
 L_k &= l_k n_k \\
 L_0 &= 3 \\
 L_{k+1} &= l_{k+1} \cdot n_{k+1} = \frac{l_k}{3} \cdot 4n_k = \frac{4}{3} L_k, \quad k > 0
 \end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 V_{k+1} &= V_k + n_k \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} l_{k+1}^2, \quad k > 0
 \end{aligned}$$

Sumací vztahů získáme výrazy pro  $l_k$ ,  $n_k$  a  $L_k$ :

$$\begin{aligned}
 l_k &= 1/3^k \\
 n_k &= 3 \cdot 4^k \\
 L_k &= 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k
 \end{aligned}$$

Po dosazení do rekursivního vztahu pro  $V_k$

$$V_{k+1} = V_k + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{4^k}{3^k \cdot 3^{k+1}}, \quad k > 0$$

$$V_k = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{4^i}{3^i \cdot 3^{i+1}} \right)$$

7

Což je ovšem vzorec pro výpočet geometrické posloupnosti s kvocientem  $q = 4/9$  a počáteční hodnotou  $S_0 = 1/3$ . Po dosazení do známého vzorce  $S_k = S_0(q^{k+1} - 1)/(q - 1)$  a úpravách dostaneme

$$V_k = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( 1 + \frac{3}{5} \left( 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^k \right) \right)$$

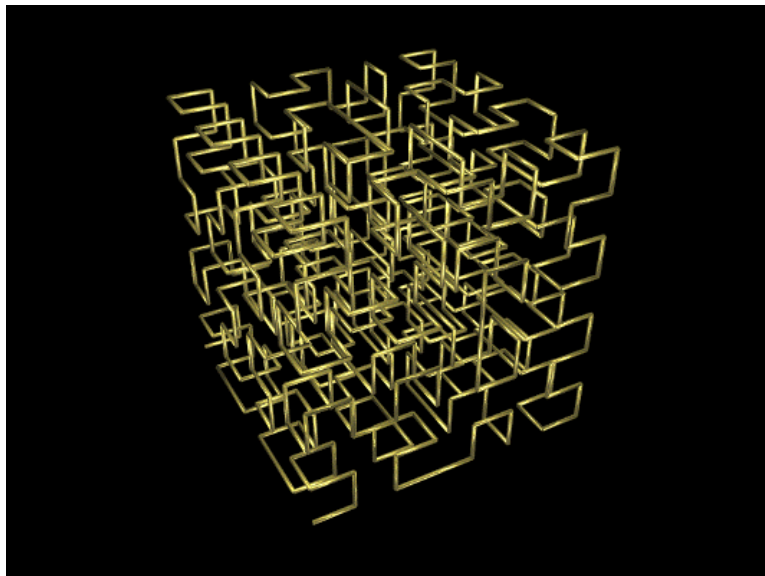
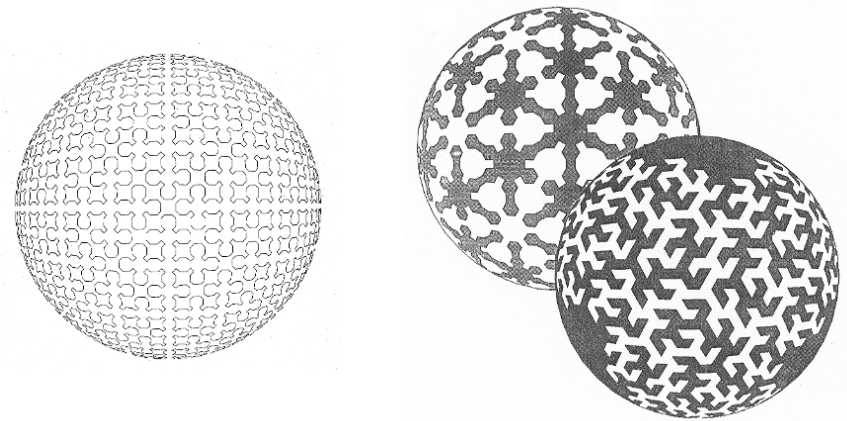
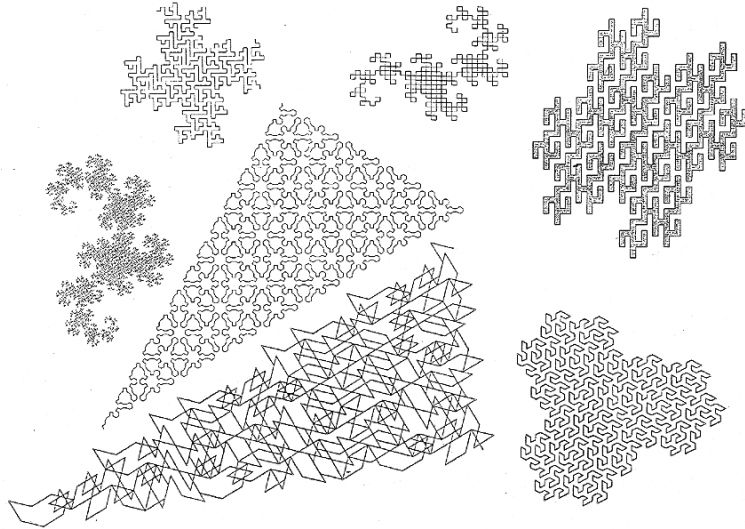
tedy platí:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} L_k = \infty$$

$$V = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k = \frac{\sqrt{12}}{5} \approx 0.692820323028 \quad !!!$$

JDE NEPOCHYBNĚ O DIVNOU FUNKCI („MATEMATCKÉ MONSTRUM“)!

8



### Hausdorfova dimenze

Významný německý matematik Hausdorff zobecnil v roce 1919 definici topologické dimenze. Hausdorff definoval dimenzi jako zobrazení do množiny reálných čísel, takže některé množiny mohou mít dimenzi, která není celočíselná. Takový objekt není pak ani rovinný, ani prostorový. Hausdorfova dimenze se někdy nazývá fraktální dimenzí.

Na Hausdorffovu práci navázal v roce 1935 A.S. Besicovitch a původní definici zpřesnil. Proto je v některé literatuře používán termín Hausdorfova-Besicovitchova dimenze. Pro stručnost zůstaneme u původního pojmenování.

**Definice** Uvažujme euklidovský prostor  $n$ -tic reálných čísel  $\mathbb{R}^n$ , kde vzdálenost bodů  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  a  $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  definujeme vzorcem

$$\sigma(x, y) = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)^2}$$

Průměr podmnožiny  $U$  prostoru  $\mathbb{R}^n$ , pak označíme  $\text{diam}(U)$  a budeme jím rozumět číslo

$$\text{diam}(U) = \sup\{\sigma(x, y); x, y \in U\}$$

$$\text{diam}(U) = \sup\{\sigma(x, y); x, y \in U\}$$

diam je největší vzdálenost bodů z  $U$  - je-li např.  $U$  kruh o průměru  $d$ , pak  $\text{diam}(U) = d$ , je-li  $U$  čtverec o straně  $d$  pak  $\text{diam}(U) = d\sqrt{2}$ . Dále definujeme  $\delta$ -pokrytí množiny  $E$  jako takový systém množin  $\{U_i; i = 1, 2, \dots, m\}$  pro který platí:

- (i)  $E$  je podmnožinou sjednocení množin  $U_i: E \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$
- (ii) Všechny množiny mají poloměr menší než  $\delta: \text{diam}(U_i) < \delta$

Nechť nyní  $E$  označuje množinu, jejíž dimenze nás zajímá. Zvolme libovolně nějaké  $s > 0$  a označme

$$H(E, s, \delta, \{U\}) = \sum_{1 \leq i \leq m} [\text{diam}(U_i)]^s$$

kde  $\{U\}$  je nějaké  $\delta$ -pokrytí množiny  $E$ .

13

Uvažujme dále všechna možná  $\delta$ -pokrytí množiny  $E$  a označme  $H(E, s, \delta)$  největší dolní hranici všech čísel  $H(E, s, \delta, \{U\})$  tj.

$$H(E, s, \delta) = \inf(H(E, s, \delta, \{U\}), \{U\})$$

Jestliže budeme nyní zjemňovat pokrytí množiny  $E$ , tj. budeme zmenšovat parametr  $\delta$ , hodnoty  $H(E, s, \delta)$  porostou k nějaké limitní veličině (ne nutně konečné), kterou označíme  $H(E, s)$ , tedy

$$H(E, s) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H(E, s, \delta)$$

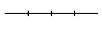
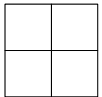
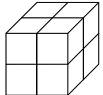
je možno dokázat, že existuje jediné číslo  $\text{dim}(E)$  pro které platí

$$\begin{aligned} H(E, s) &= +\infty & \text{pro } 0 \leq s < \text{dim}(E) \\ H(E, s) &= 0 & \text{dim}(E) \leq s \leq \infty \end{aligned}$$

Číslo  $\text{dim}(E)$  se nazývá Hausdorfovou dimenzí množiny  $E$ .

14

## Dimenze a soběpodobnost

Dimenze	$D$	Dělení	Měřítka
	1	N dílů	$s = \frac{1}{N}$ $Ns^1 = 1$
	2	N dílů	$s = \frac{1}{\sqrt{N}}$ $Ns^2 = 1$
	3	N dílů	$s = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$ $Ns^3 = 1$

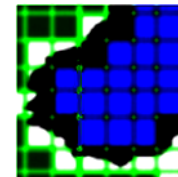
Obecně  $Ns^D = 1$

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}}$$

Velichinu  $D$  nazveme fraktální dimenzí. Přesně je fraktální dimenze definována Hausdorffem (Hausdorff – Besicovitchova dimenze).

15

## Experimentální určení fraktální dimenze - "počítání čtverečků"



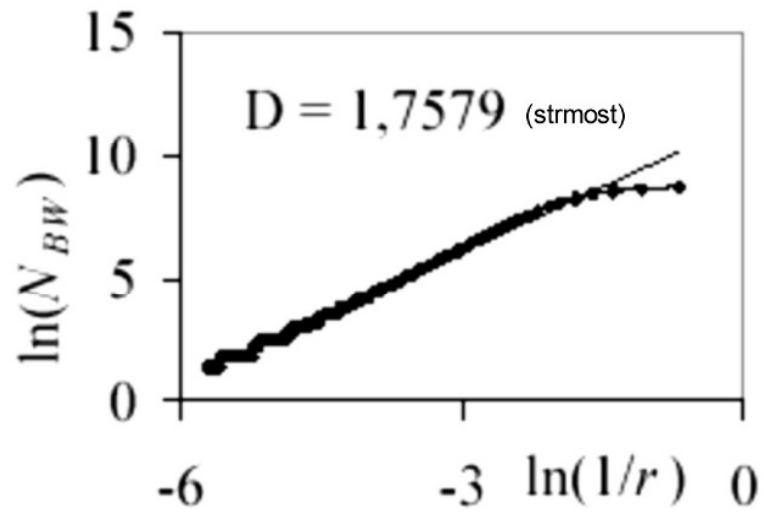
Určíme počet černobílých čtverců ( $N_{BW}$ ) pro různé velikosti čtverce pokládáné sítě  $\epsilon = 1/r$ . Vyneseme závislost logaritmu počtu čtverců ( $N_{BW}$ ) na reciproké hodnotě logaritmu velikosti sítě  $\ln(1/r)$ .

$$N_B(\epsilon) = K_B \cdot \epsilon^{-D_B}$$

$\epsilon$  je velikost strany čtverce

$K_B$  je tzv. fraktální míra (úsek na ose y)

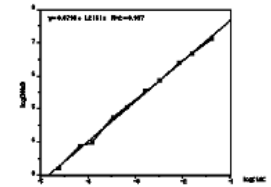
16



Paul Bourke - 1993  
 experimentální určení fraktální dimenze křivky Kocha

$\log(4)/\log(3) = 1.262$

s	log(1/s)	N(s)	log(N(s))
4	-1.38629	1234	7.11802
6	-1.79176	798	6.68211
8	-2.07944	597	6.39192
12	-2.48491	358	5.88053
16	-2.77259	251	5.52545
24	-3.17805	159	5.0689
32	-3.46574	115	4.74493
50	-3.91202	54	3.98898
64	-4.15888	49	3.89182
100	-4.60517	25	3.21888



1.22 (3.6%)

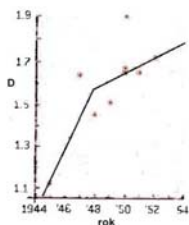
Chyba počítání čtverečků je přijatelná !

Př 1:  
 Fraktální analýza obrazů  
 Jacksona Pollocka

Po separaci barev  
 počítáme čtverečky.



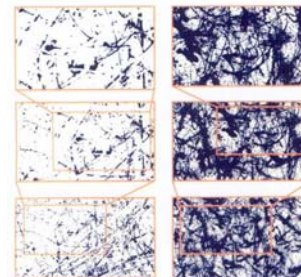
Výsledek:



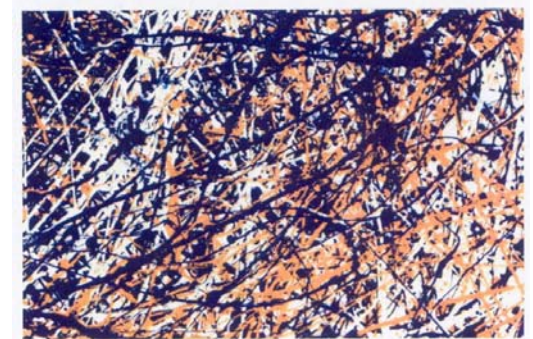
Př 2. Test pravosti

Soběpodobnost

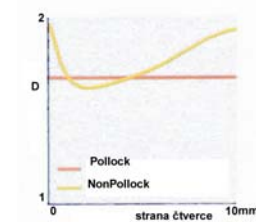
NonPollock: Pollock:



NonPollock:



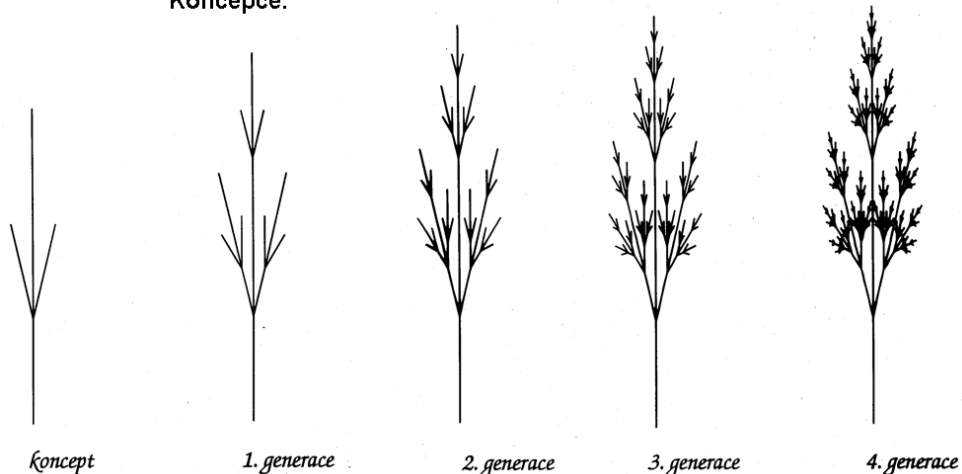
Výsledek



# ESTETIKA VĚTVENÍ (výstupem BIOART, metodou FRAKTÁLY)

## Graftály - algoritmy větvení (algoritmy násobící data)

Koncepce:

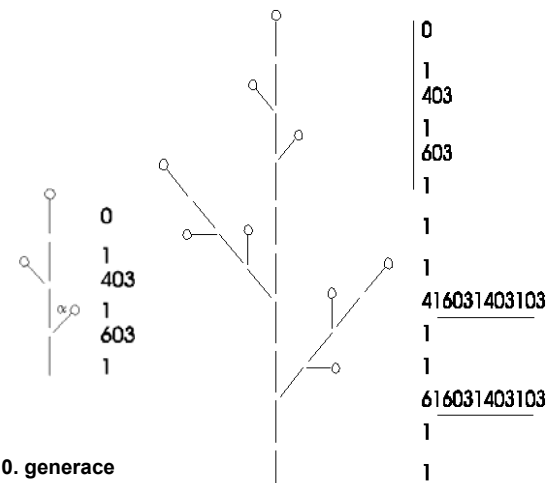


## ALGORITMY VĚTVENÍ

Primitivní kódování větvení:

Příklad jednoduchého zápisu:

- 0 koncový úsek (pupen)
- 1 větvíčka (elementární úsek)
- 2 ...
- 3 návrat do místa větvení
- 4 místo větvení L
- 5 místo náhodného směru větvíčky
- 6 místo větvení R
- atd



Zákon růstu - kód větvíčky:

0      0. generace  
1 6 0 3 1 4 0 3 1 0      1. generace  
1 1 6 3 1 4 0 3 1 0      2. generace  
atd.

Moderní grafické interpretace pracují se zápisem větvení prepisovacími gramatikami:

## L-systém a prepisovací gramatiky

A. Lindenmayer, P. Prusinkiewicz, J. Hanan, ... B. Beneš, D. Stuchlík, M. Psota, M. Kolka a další

### Deterministický bezkontextový L-systém

Je dána uspořádaná trojice  $G = [V, P, S]$

- V ... je konečná abeceda symbolů A, B, X ...
- P ... je konečná množina pravidel  $A \rightarrow \alpha$ ;  $A \in V$ ;  $\alpha \in V^*$
- S ... je axiom:  $S \neq \epsilon$ ;  $S \in V^+$

Jestliže je  $A \rightarrow \alpha \in P$ , kde  $\alpha \in V^*$ , pak neexistuje  $A \rightarrow \beta \in P$ :  $\beta \neq \alpha$ ,  $\beta \in V^*$  - determinismus.

Derivace  $\Rightarrow$  řetězce  $\alpha \in V^*$  znamená paralelní přepsání všech symbolů  $X \in \alpha$  řetězci  $\gamma$  z množiny pravidel P, kde  $X \rightarrow \gamma \in P$ .

Derivační hloubka je počet iterací  $\Rightarrow$  (prepisování se většinou omezuje stanovením počtu opakování).

Vygenerovaný řetězec se následně graficky interpretuje (želví grafika - 2D, 3D).

## Želví grafika (2D, 3D)

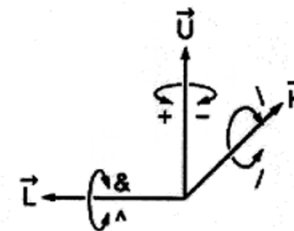
Želva je reprezentována svým stavem  
tj. polohou a orientací v kartézském souřadném systému  
(příp. šířkou a barvou kreslicího pera).

Orientace ve 3D je definována pomocí navzájem kolmých vektorů jednotkové délky  $H$ (eading),  $L$ (eft),  $U$ (p).

Rotace želvy je vyjádřena rovnicí:

$$[H' L' U'] = [H L U] R,$$

kde  $R$  je matice rotace  $3 \times 3$ .



$$R_U(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_H(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$R_L(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

## Deterministický bezkontextový L-systém

Příklad - Kochova vložka:

$G = \{S, F, -, +\}, \{S \rightarrow F--F--F, F \rightarrow F+F--F+F, + \rightarrow +, - \rightarrow -\}, S\}$

1. derivace  $S \Rightarrow F--F--F$

2. derivace  $F--F--F \Rightarrow F+F--F+F--F+F--F+F--F+F--F+F$

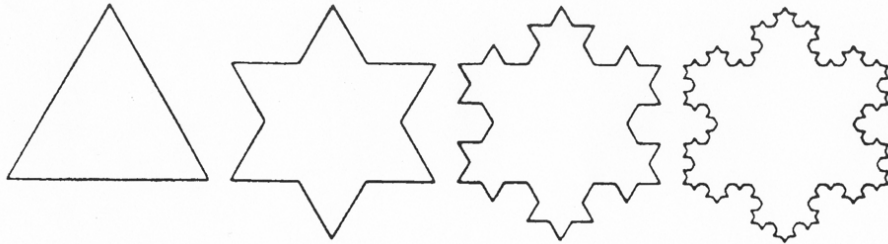
.....

dodefinujeme

+ ... otočení o 60° doprava

- ... otočení o 60° doleva

F ... posun dopředu (o zvolenou délku d)



25

## Závorkové L-systémy (systémy se zásobníkem)

Obohacení L-systému o zásobník, který slouží k uložení pozice želvy.

Zápis:

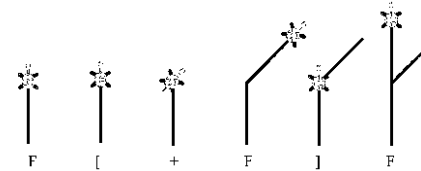
[ ... uložení stavu do zásobníku

] ... vyzvednutí stavu ze zásobníku a následná aktualizace želvy

Příklad 1.

Příklad 2.

Grafická interpretace řetězce  $F[+F]F$ :



Angle

$\theta = 16^\circ$

Axiom

$F+++F$

Rule

$F \rightarrow F+F-[-F+F+F]+[+F-F-F]$



26

## Otevřené L-systémy

Otevřeností rozumíme schopnost obousměrné komunikace „generovaného objektu“ s okolím (př. modelování růstu rostlin).

Tyto systémy jsou rozšířené o tzv. komunikační moduly, které slouží k přenášení informací mezi přepisovaným řetězcem a okolím:

Vstup informace do přepisovacího procesu (detekce kolize rostliny s překážkami, množství dopadajícího světla, kvalita půdy, ...)

Výstup informace ven z přepisovacího procesu (rozložení v prostoru, vylučování látek ...).

## Stochastické L-systémy

V množině pravidel P může být více pravidel se stejnou levou stranou.

Např. pro symbol A platí:

$A \rightarrow \alpha_1 : p_1 ; A \rightarrow \alpha_2 : p_2 ; \dots ; A \rightarrow \alpha_n : p_n ;$  kde  $A \in V, \alpha_i \in V^*, p_i \in \langle 0,1 \rangle$

$p_i$  ... pravděpodobnost, že se použije při přepisování A pravidlo  $A \rightarrow \alpha_i : p_i$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

27

## Parametrické L-systémy

*Parametrický L-systém* pracuje s tzv. *parametrickými slovy*.

Parametrická slova jsou posloupnosti modulů a moduly jsou písmena abecedy rozšířená o parametry.

Modul má syntaktickou podobu  $A(x_1, \dots, x_m)$ . Množina parametrů modulu může být prázdná, ale musí být konečná. Modul má ve své specifikaci formální parametry, které nabývají hodnot – skutečných parametrů z množiny reálných čísel.

Z parametrů je možno tvořit aritmetické a logické výrazy.

Formálně zapsáno:

Parametrický L-systém je uspořádaná čtveřice  $G = (V, \Sigma, \omega, P)$ , kde:

V je abeceda

$\Sigma$  je množina formálních parametrů

P je konečná množina pravidel

$\omega \in (V \times \mathbb{R})^+$  je neprázdné parametrické slovo zvané *axiom* ( $\mathbb{R}$  je množina reálných čísel)

Pravidla  $p \in P$  v parametrických kontextových L-systémech mají tvar:

pred : cond  $\rightarrow$  succ

kde:

pred je levá strana pravidla

cond je logický výraz nabývající hodnoty 1 nebo 0

succ je pravá strana pravidla

28

### Příklad 3.

$$A(t) : t > 5 \rightarrow B(t + 1)CD(t \wedge 0.5, t - 2)$$

pravidlo s levou stranou  $A(t)$ ,

podmínkou  $t > 5$

a pravou stranou

$$B(t + 1)CD(t \wedge 0.5, t - 2).$$

Modul *vyhovuje* danému pravidlu, pokud:

Písmeno v modulu se shoduje s písmenem v *pred*.

Počet parametrů v modulu a počet parametrů na levé straně pravidla jsou si rovny.

Je splněna podmínka *cond*.

Pravidlo vyhovující danému modulu může být použito na „rozbalení“ (nahrazení) modulu řetězcem specifikovaným v části *succ* daného pravidla.

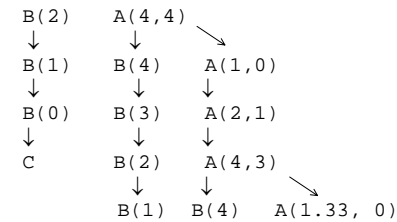
29

### Příklad 4.

Definujme L-systém:

$$\begin{aligned} \omega & : B(2)A(4,4) \\ p1 & : A(a,b) : b < 3 \rightarrow A(a * 2, a + b) \\ p2 & : A(a,b) : b \geq 3 \rightarrow B(a)A(a / b, 0) \\ p3 & : B(a) : a < 1 \rightarrow C \\ p4 & : B(a) : a \geq 1 \rightarrow B(a-1) \end{aligned}$$

Odvození výsledného řetězce modulů z axiomu  $\omega$ :



30

### Kontextový L-systém

Při přepisování symbolu se uvažují posloupnosti symbolů na levé a pravé straně.

Např.

$$lc \langle A \rangle rc \rightarrow \alpha, \text{ kde } \alpha, lc, rc \in V^*, A \in V$$

Symbol  $A$  se přepíše na  $\alpha$ , jestliže se vyskytuje v levém kontextu  $lc$  a v pravém kontextu  $rc$ .

### Kombinované L-systémy

Pravidla  $p \in P$  v parametrických kontextových stochastických L-systémech mají tvar:

$$id : lc \langle A \rangle rc : cond \rightarrow \alpha : p$$

kde je:

- id číslo pravidla
- rc,lc pravý a levý kontext
- A symbol, který se bude přepisovat
- cond logický výraz nabývající hodnoty 0 nebo 1
- $\alpha$  na co se  $A$  přepíše
- p pravděpodobnost použití daného pravidla

31

### Příklad 5.

Definujme L-systém

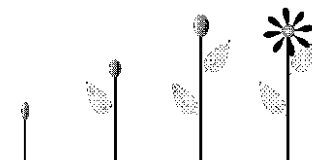
$$\begin{aligned} \omega & : A(0) \\ p_1 & : A(x) : x = 0 \rightarrow FA(x+1) \\ p_2 & : F < A(x) : x = 1 \rightarrow [-L]FA(x+1) \\ p_3 & : F < A(x) : x = 2 \rightarrow [+L]FA(x+1) \\ p_4 & : A(x) : x = 3 \rightarrow B \end{aligned}$$

Dodefinujme:

- F posun dopředu
- A(x) vrcholový pupen,  $x$  je jeho stáří
- B květ
- L list

- $p_1$  probudí vrchol
- $p_2, p_3$  růst a vyrašení listů
- $p_4$  přechod ve květ

Grafická interpretace:



32



**Příklady podle D. Stuchlíka:**

**Notace symbolů:**

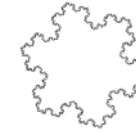
- f (a)** Posun dopředu o krok délky *a*.
- F (a)** Posun dopředu o krok délky *a*; mezi původní a novou pozicí se vykreslí čára.
- + (a)** Rotace želvy kolem vektoru *U* o úhel *a*.
- & (a)** Rotace želvy kolem vektoru *L* o úhel *a*.
- / (a)** Rotace želvy kolem vektoru *H* o úhel *a*.
- [** Uložení současného stavu na zásobník.
- ]** Vybrání stavu ze zásobníku.
- ; (a)** Nastavení barvy kreslicího pera na *a*.
- # (a)** Nastavení tloušťky kreslicího pera na *a*.

**Příklad „Vločka Kocha“  
(derivační hloubka 10)**

```
#define J 4
#define LEN 2

{ axiom: }
B(J)

{ pravidla: }
B(t):*:V(t)+(120)V(t)+(120)V(t)
V(t):t = 0: A(LEN)
V(t):t > 0:V(t-1)+(-60)V(t-1)+(120)V(t-1)+(-60)V(t-1)
A(t):*:F(t)
```



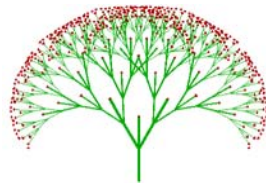
**Kochova vločka**

**Příklad „Květ černého bezu“  
(derivační hloubka 10)**

```
#define ANG 3

;(2)T(10)

T(t):t>0:#(t/3)F(t*5)[&(ANG*t)T(t-1)][&(-1*ANG*t)T(t-1)]F(t*5)T(0)
T(t):t=0:[#(3);(4)F(1)]
L(t):*:[&(25)T(t)]
R(t):*:[&(-25)T(t)]
```



**Květ černého bezu**

**Příklad „Přeslička ve větru“  
(derivační hloubka 12)**

```
#define DELAY 1
#define RATE 1.5
#define ANG 30
#define WIND 10

;(0)/(90)A(0)

A(d):d>0:A(d-1)
A(d):d=0:F(0.5)+(WIND)[+(ANG)A(DELAY)][+(-1*ANG)A(DELAY)]F(1)A(0)
F(1):*:F(1*RATE)
```



**Přeslička ve větru**

**Příklad „Strom“  
(derivační hloubka 6)**

```
#define DA 137.5
#define BA 40
#define BR 1.432
#define LR 1.155
#define WR 1.052
  #(10)F(50)A(10)
A(w):*:#(w)F(30)[&(BA)A(w/BR)]/(DA)[&(BA)A(w/BR)]/(DA)[&(BA)A(w/BR)]
F(l):*:#F(l*LR)
#(w):*:#(w*WR)
```



**Strom**

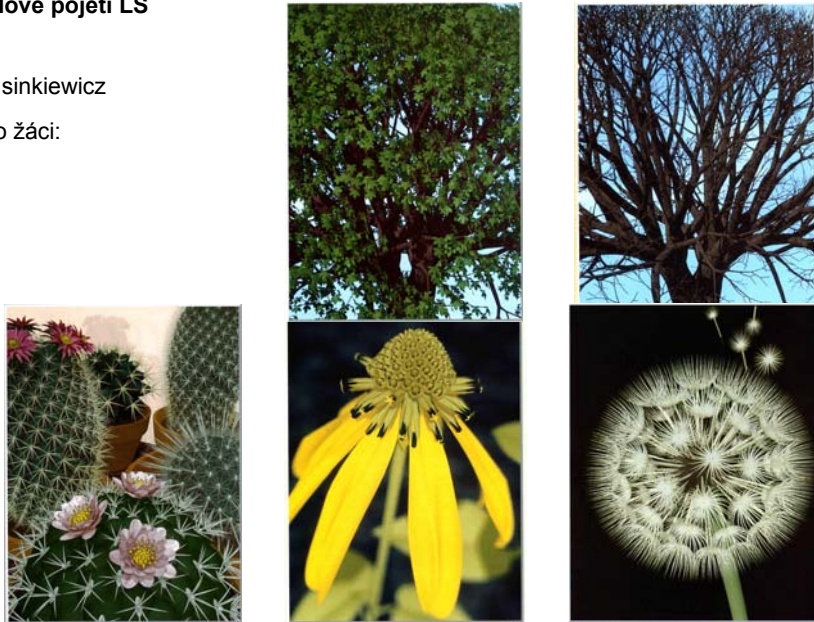
**Atraktivnější jsou kreace ve 3D.**

**Příklad výtvarného pojetí LS:**



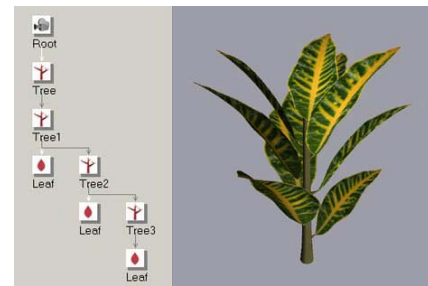
**Modelové pojetí LS**

P. Prusinkiewicz  
a jeho žáci:



Kvalita programu pro modelování je dána i kvalitou jeho komunikační vrstvy

**Př.**  
Greenworks Organic Software  
jazyk Xfrog



# SYSTÉMY AFINNÍCH TRASFORMACÍ (IFS - BARNSELEY, DEMKO)

IFS {T,P}

$T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$   
 $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$

Podmínky - transformace měřítka < 1,  $\sum_{j=1}^n P_j = 1$

$$Z_{i+1} = T_j(Z_i), Z_0$$

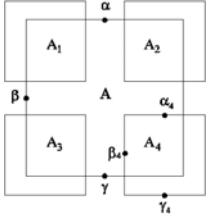
|  
P<sub>j</sub>

## KOLÁŽNÍ TEORÉM (ATRAKTORU)

$$A = T_1(A) \cup T_2(A) \cup \dots \cup T_n(A)$$

## INVERZNÍ PROBLÉM $T_1, T_2, \dots, T_n = ?$

Př. :



$A_1 = T_1(A)$   
 $A_2 = T_2(A)$   
 $A_3 = T_3(A)$   
 $A_4 = T_4(A)$

$$T_j : \begin{cases} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{cases} = \begin{cases} ax_i + by_i + e \\ cx_i + dy_i + f \end{cases}$$

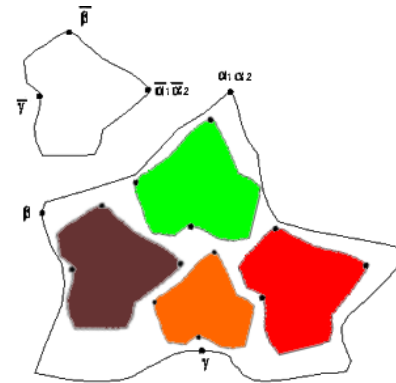
$$P_j = \frac{A_j}{A}$$

Transformaci definuje šest rovnic:  $T_j \{a_j, b_j, c_j, d_j, e_j, f_j\} \leq \alpha \beta \gamma \alpha_j \beta_j \gamma_j$

Poznámka: REDUKCE DAT (> 1 : 10 000)



# URČENÍ KOEFICIENTŮ AFINNÍ TRANSFORMACE



$$\begin{aligned} \alpha_1 a + \alpha_2 b + e &= \bar{\alpha}_1 \\ \beta_1 a + \beta_2 b + e &= \bar{\beta}_1 \\ \gamma_1 a + \gamma_2 b + e &= \bar{\gamma}_1 \end{aligned}$$

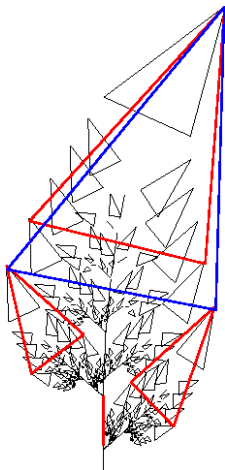
$$\begin{aligned} \alpha_1 c + \alpha_2 d + f &= \bar{\alpha}_2 \\ \beta_1 c + \beta_2 d + f &= \bar{\beta}_2 \\ \gamma_1 c + \gamma_2 d + f &= \bar{\gamma}_2 \end{aligned}$$

$$P_i = \frac{a_i d_i - b_i c_i}{\sum_{k=1}^n |a_k d_k - b_k c_k|}$$

Pozn.  $a = r \cdot \cos\theta$      $b = -s \cdot \sin\Phi$      $r$  - měř. x     $\Phi$  - rot. y  
 $c = r \cdot \sin\theta$      $d = s \cdot \cos\Phi$      $s$  - měř. y     $\theta$  - rot. x

## Pro stanovení dílčích transformací T vlastně stačí „zastupující“ trojúhelníky

Pro koeficienty  $a, b, c, d, e, f$  potřebujeme trojice bodů

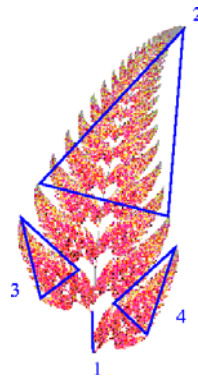


$$P_1 = (x_1, y_1) \quad Q_1 = (u_1, v_1)$$

$$P_2 = (x_2, y_2) \quad Q_2 = (u_2, v_2)$$

$$P_3 = (x_3, y_3) \quad Q_3 = (u_3, v_3)$$

$$T(P_1) = Q_1 \quad T(P_2) = Q_2 \quad T(P_3) = Q_3$$

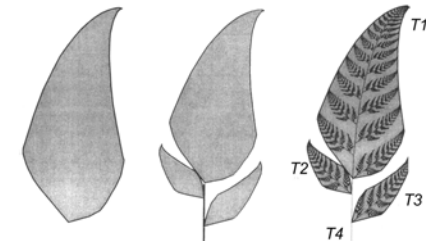


## Poznámka: neúplné pokrytí a překrytí vylepšuje výtvarný efekt

### Barnseleyho kapradina



### Efekt neúplného pokrytí

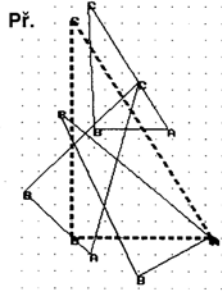


	e	f	φ	ψ	r	s
1	0.0	1.6	-2.5	-2.5	0.85	0.85
2	0.0	1.6	49	49	0.3	0.34
3	0.0	0.44	120	-50	0.3	0.37
4	0.0	0.0	0	0	0.0	0.16

Práce s trojúhelníky je však náročnější na představivost:



### Systémy transformací IFS



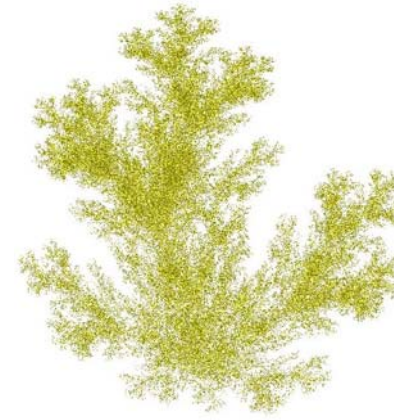
$$x_{i+1} = ax_i + by_i + e$$

$$y_{i+1} = cx_i + dy_i + f$$

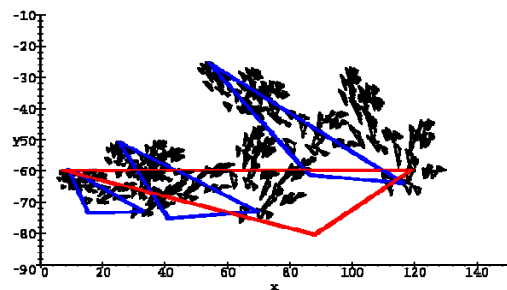
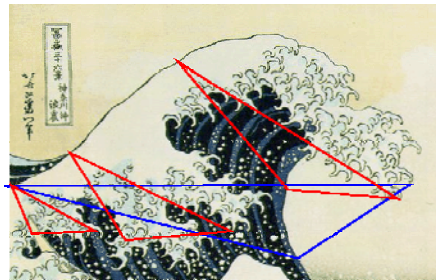
$P_i$

$a_i$	$b_i$	$c_i$	$P_i$
0.5159	0.3550	-0.2857	0.3879
0.5238	0.0250	0.0000	0.2393
0.4762	-0.5150	0.4444	0.3728
$d_i$	$e_i$	$f_i$	
0.7500	89.9775	219.6551	
0.5750	146.8259	0.2563	
0.5050	257.0102	-0.9989	

### Různá provedení IFS (textury)



### IFS – nic nového pod sluncem:



### Podstatné vylepšení kreací pomocí IFS přinesl Scott Draves

- iteracemi vypočítané hodnoty podrobují nelineárním transformacím
- jas (resp. barvu) pixelů řídí logaritmem počtu jeho „navštívení n“ během výpočtu
- výsledek filtruje (rozmazává)
- dovoluje prolínání obrazů
- atd.

Př. Nelineární Transformace

$$V_0(x,y) = (x,y)$$

$$V_1(x,y) = (\sin x, \sin y)$$

$$V_2(x,y) = (x/r^2, y/r^2)$$

$$V_3(x,y) = (r \cos(\theta + r), r \sin(\theta + r))$$

$$V_4(x,y) = (r \cos(2\theta), r \sin(2\theta))$$

$$V_5(x,y) = (\theta/\pi, r-1)$$

$$V_6(x,y) = (r \sin(\theta + r), r \cos(\theta - r))$$

$$V_7(x,y) = (r \sin(\theta r), -r \cos(\theta r))$$

$$V_8(x,y) = (\theta \sin(\pi r)/\pi, \theta \cos(\pi r)/\pi)$$

$$V_9(x,y) = ((\cos \theta + \sin r)/r, (\sin \theta - \cos r)/r)$$

$$V_{10}(x,y) = ((\sin \theta)/r, (\cos \theta)r)$$

$$V_{11}(x,y) = ((\sin \theta)(\cos r), (\cos \theta)(\sin r))$$

$$V_{12}(x,y) = (r \sin^3(\theta + r), r \cos^3(\theta - r))$$

$$V_{20}(x,y) = (\cos(\pi x) \cosh(y), -\sin(\pi x) \sinh(y))$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

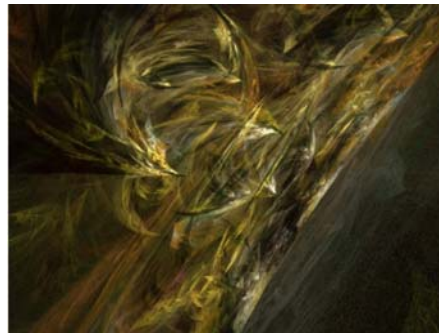
$$\theta = \arctan(y/x)$$

Podle těchto zlepšení realizoval Scott Draves program FLAME.

Př. Kreece S. Dravese:



Další vylepšení v programu AOPHYSIS Marka Townsenda.



## Fraktály v komplexní rovině

Mandelbrotova množina (Julia, Fatou, 1925, Mandelbrot, Douady,...1980)

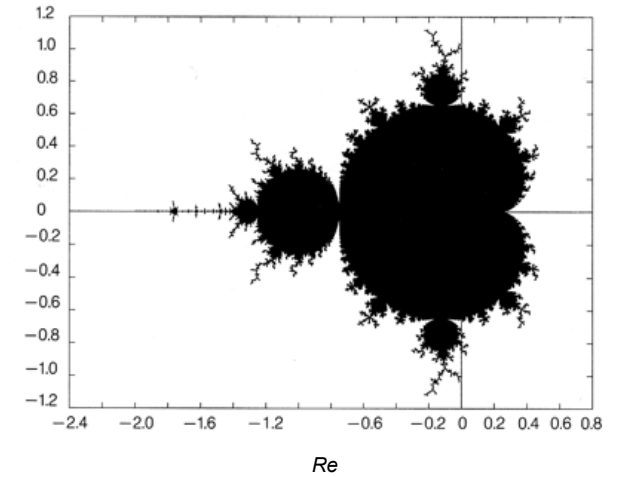
$$Z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c,$$

$z, c$  jsou komplexní čísla

Př. At'  $c = 0,$   
 $z_0 \rightarrow z_0^2 \rightarrow z_0^4 \dots$   $Im$

atraktor:

0	pro	$ z_0  < 1$
nekonečno	pro	$ z_0  > 1$
kružnice	pro	$ z_0  = 1$



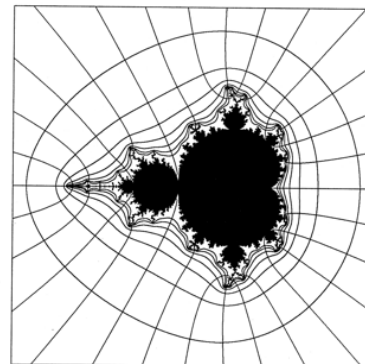
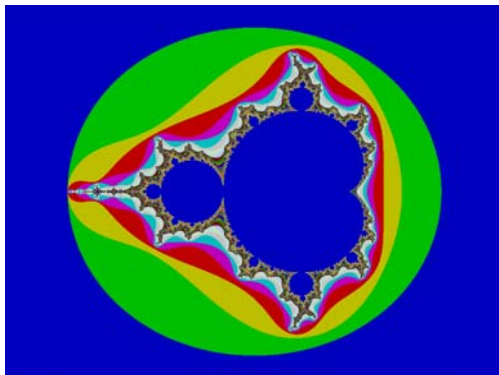
B. Mandelbrot  $c \neq 0, z_0 = 0, c$  var. G. Julia  $c \neq 0, c$  fix.  $z_0$  var.

Hledáme hranici Mandelbroty množiny

Únikový potenciál

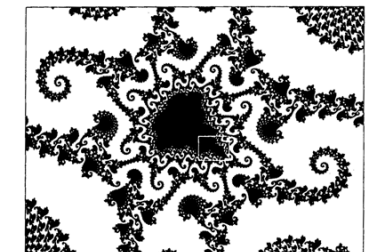
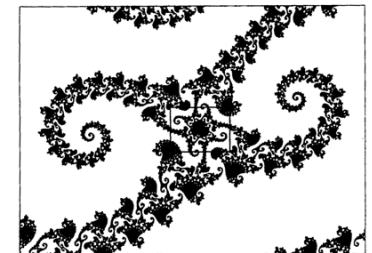
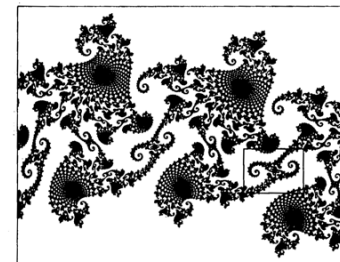
Únikový počet iterací vyznačíme barvou

„Pracovní nekonečno“  $|z_n| = |c| + 2$



analogie kondenzátoru

Efekt vnořování:

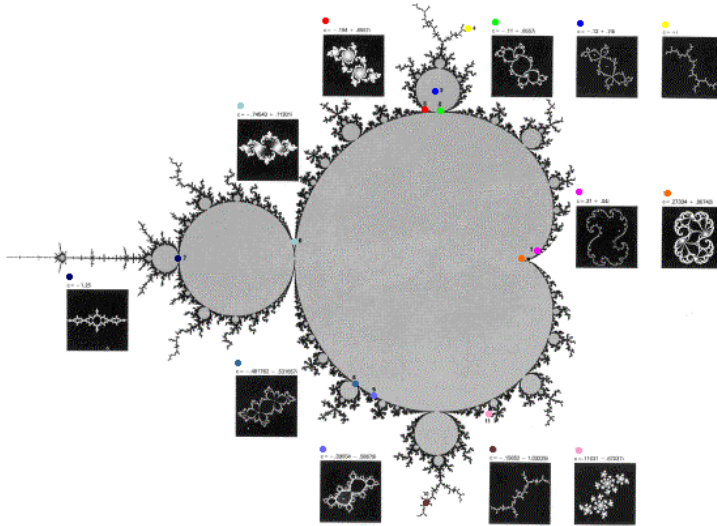


Poznámka:

**Fraktály jsou extrémně a "nespojité" citlivé na parametry.**

Připomeňme: **B. Mandelbrot**  $c \neq 0$ ,  $z_0 = 0$ ,  $c$  var. **G. Julia**  $c \neq 0$ ,  $c$  fix.  $z_0$  var.

Juliovy množiny jako „atraktivní souputníci“ :



53

### Výpočet Mandelbrotovy a Juliovy množiny

```
FOR EACH pixel:
  REPEAT
    CALCULATE  $Z(n) = Z(n-1)^2 + C$ 
    iterations = iterations + 1
  UNTIL value = infinite OR iterations > max_iterations
  SET COLOR = iterations
```

$$C = a + bi$$

$$Z_{(0)} = 0$$

$$Z_{(1)} = a + bi$$

$$Z_{(2)} = (a + bi)^2 + a + bi$$

$$Z_{(3)} = ((a + bi)^2 + a + bi)^2 + a + bi \dots \quad \text{pomůcka : } (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + bi^2$$

$$Z(n).real = (Z(n-1).real)^2 - (Z(n-1).imaginary)^2 + C.real$$

$$Z(n).imaginary = 2 * Z(n-1).real * Z(n-1).imaginary + C.imaginary$$

$$\text{Délka vektoru} = \text{SQRT}(a^2 + b^2).$$

54

### Barvení fraktálů – barevné gradienty

V každém bodě komplexní roviny (pixelu) je generována řada  $f(z_i) = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ .

Délku řady jsme omezili únikovým počtem iterací  $i = n$ , kdy  $|z_n| > R$ . Zpravidla  $R = 2$ .

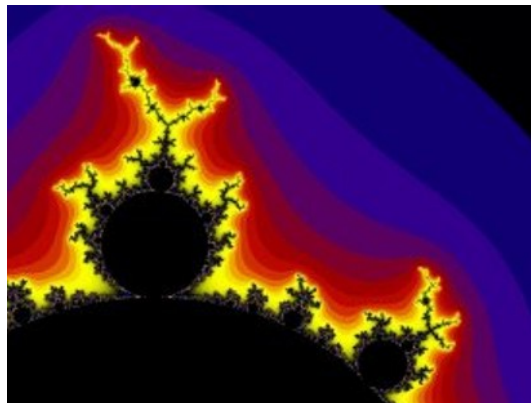
#### • Základní kolorování

je nejjednodušší a proto časté.

$$color = g(n)$$

Funkce  $g$  kvantuje rozsah R, G, B podle použité palety. Palety můžeme vázat (opakovat).

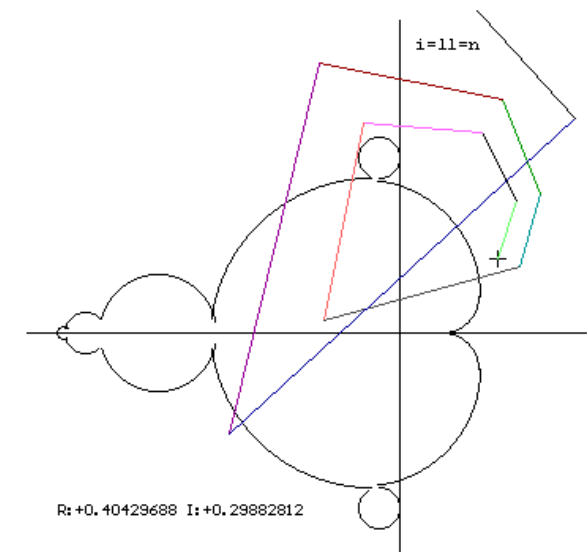
Stačí 256 barev, nevýhodou je „proužkování“.



55

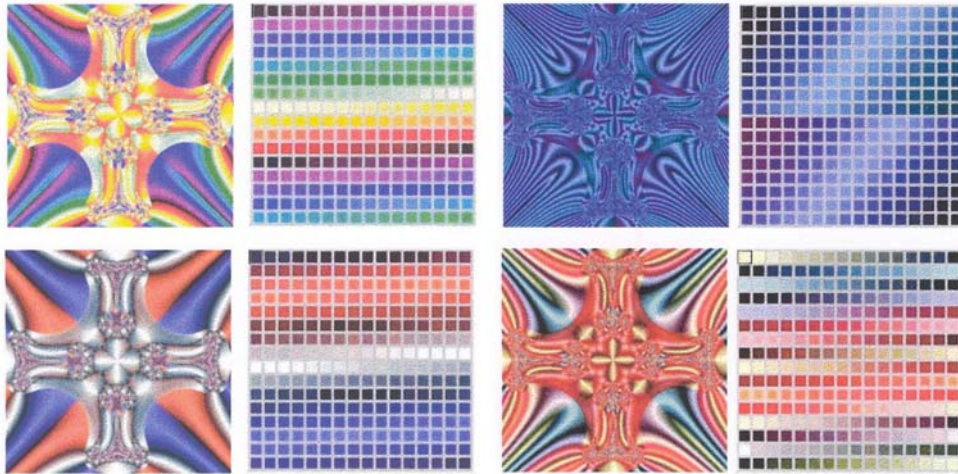
**Základní princip barvení**  
- využití počítaných hodnot  $z_i = z_n$

Pixel + zastupující bod  $C(Re, Im)$   
dostane barvu  $col(n)$  pro  $n = 11$ .



56

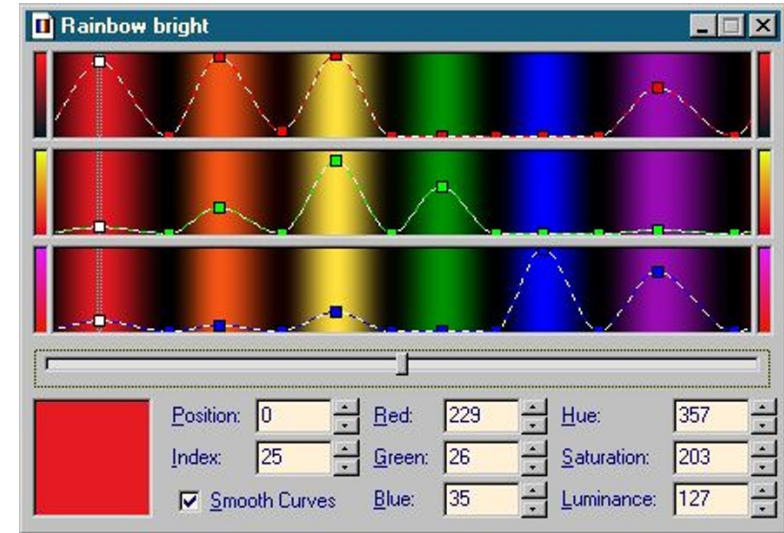
Př. Editor barev Programu FRACTINT.



Pro plný počet barev (true color) lze vytvářet barevný gradient prokládáním křivkou.

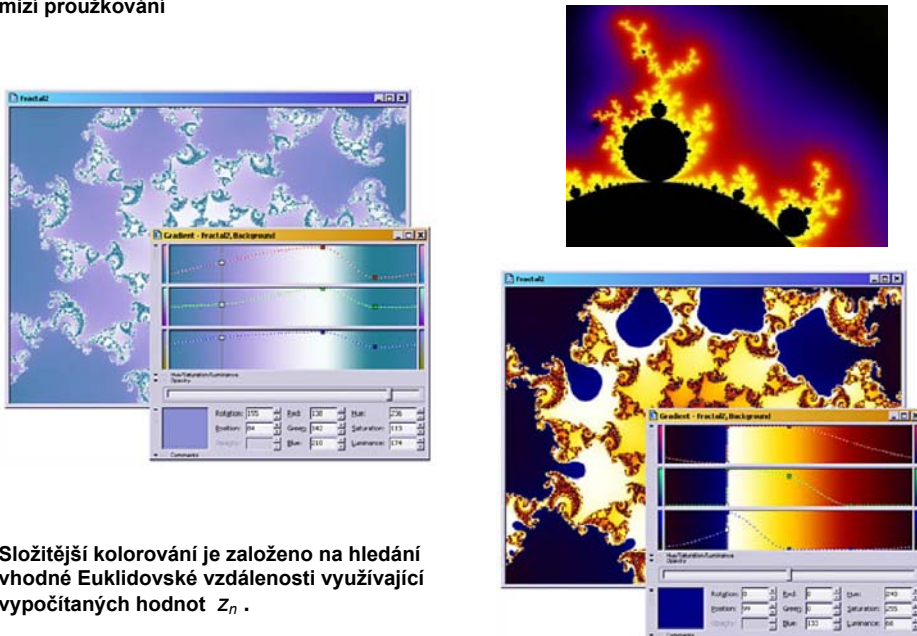
57

Př. Editor programu ULTRA FRACTAL



58

mizí proužkování



Složitější kolorování je založeno na hledání vhodné Euklidovské vzdálenosti využívající vypočítaných hodnot  $Z_n$ .

59

Výpočetně náročnější kolorovací algoritmy (J. Barallo, D.M. Jones: Math Art 2001)

• Odhad vzdálenosti

$$\frac{2 |z_n| |\log |z_n||}{|z'_n|}$$

• Spojitý potenciál („v kondenzátoru“)

$$\frac{\log |z_n|}{2^n}$$

Pro  $R=b$

$$n + \frac{\log(\log b) - \log(\log |z_n|)}{\log 2}$$

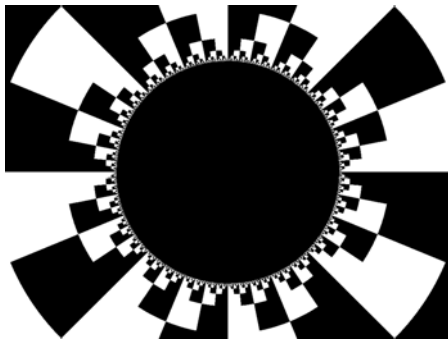
Můžeme zavést vyhlazovací funkci  $n = e^{-|z|}$

60

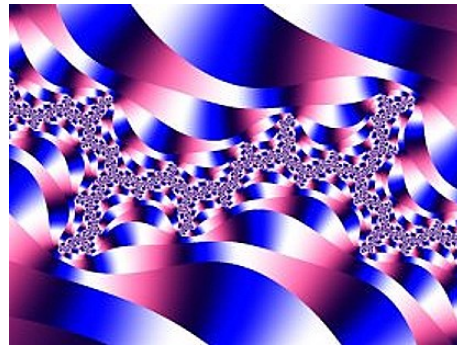
• Výpočet únikového úhlu

Řadu  $z_i$  vyhodnocujeme v polárních souřadnicích a sledujeme  $\alpha_i$ .

Binární dekompozice



Spojité dekompozice



Poznámka: Podobně lze pracovat i s odvěsnami vzniklého trojúhelníka.

61

• Výpočet „křivosti řady“

Počítáme ze tří následujících hodnot:

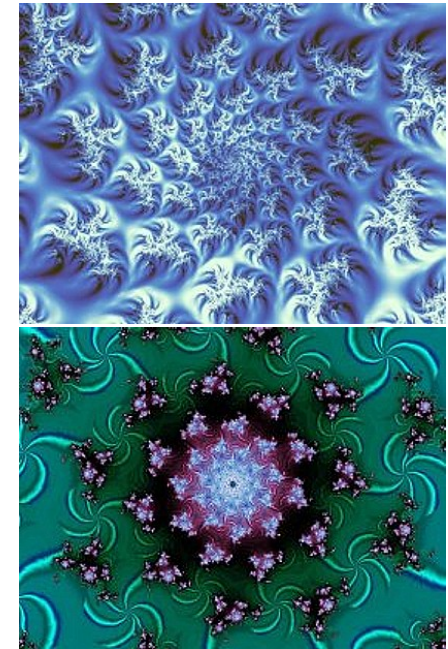
$$\left| \frac{z_n - z_{n-1}}{z_{n-1} - z_{n-2}} \right|$$

• Výpočet statistických charakteristik apod.

Průměry, rozptyl, ...

Výpočetně náročnější je fraktální dimenze, Ljapunovův exponent apod.

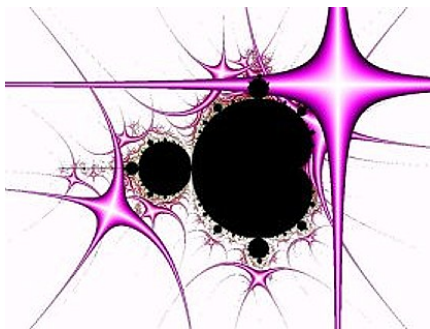
Někdy je výhodné počítat inverzní hodnoty (jsou ohraničené).



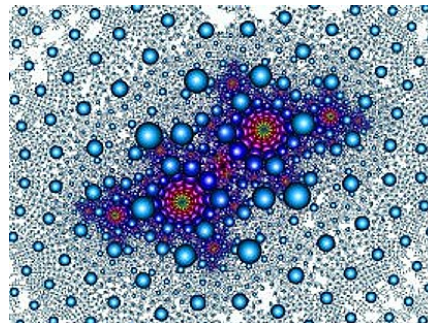
62

• Výpočet pomocí řídicích oblastí – pastí (orbit traps)

V komplexní rovině vymežíme oblasti (body, úsečky, kružnice, n-úhelníky apod. ) Padne-li  $z_i$  do této oblasti, pak  $z_i = z_n$ . Oblasti s výhodou centrujeme k počátku. Tato metoda dovoluje řadu variant barvení.



Gaussova čísla mohou vytvořit pravoúhlu síť pastí.



63

• Vytváření 3D efektů

Současně počítáme tři „sousední body“, tyto určí rovinu a k ní pak vypočítáme normálu. Podle polohy zdroje světla určíme Gouraudovo stínování.



Poznámka: S výhodou umístíme světelný vektor  $L$  do reálné nebo imaginární osy. Pak stačí paralelní výpočet jen dvou bodů.

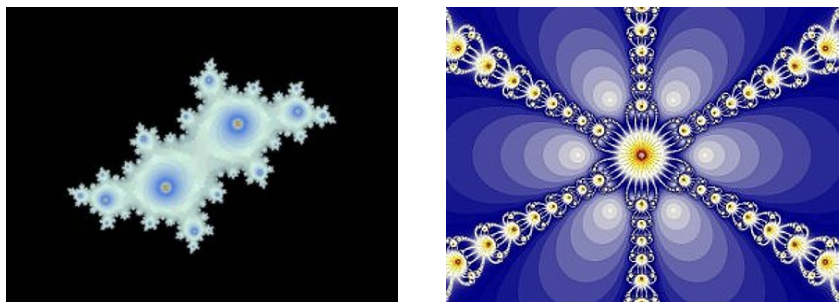
64



Doplnění:

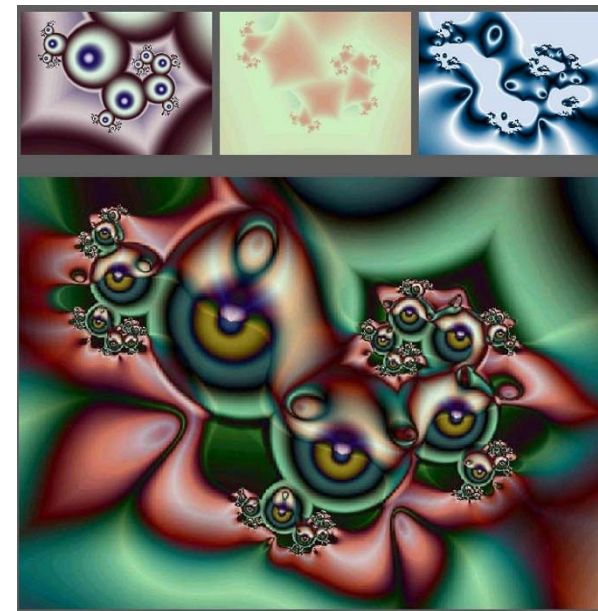
„Konečné atraktory“ počítáme stejně!

Sledujeme rozdíl dvou po sobě následujících členů řady  $z_i$ . Klesne-li pod určenou hodnotu, výpočet řady ukončíme a bod obarvíme.



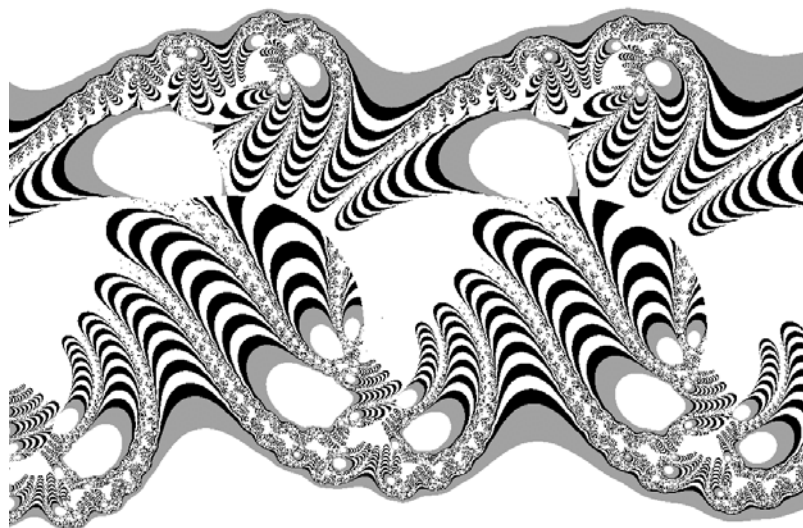
65

Skládání obrazů s různými výřezy a průsvity vytváří další výtvarné efekty.



66

Příklad monotónního vybarvení (3 tóny)



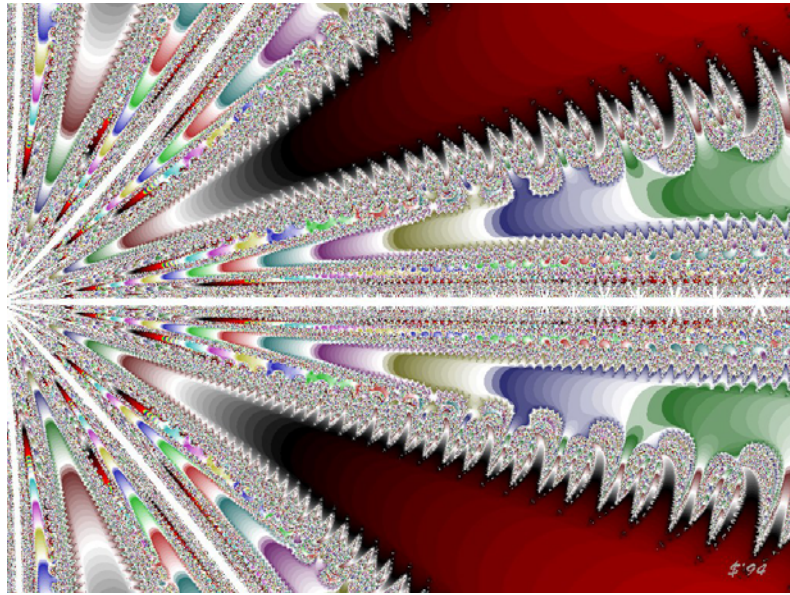
67

Příklad základního vybarvení (256 barev)



68

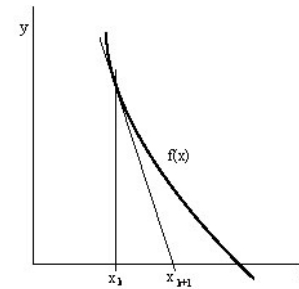
Opět jen  
256 barev:



69

Známe více než sto fraktálních rovnic a objevují se další cesty a možnosti.

**Př. NEWTONOVA METODA TĚČEN JAKO FRAKTÁLNÍ ROVNICE (?!)**



$$y(x) = f(x) + f'(x_k)(x - x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) / f'(x_k)$$

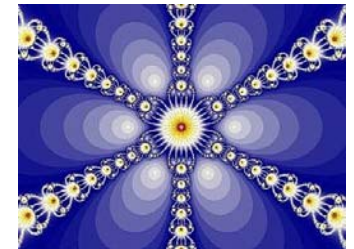
**Př 1:**  
 $f(z) = z^4 - 1 \Rightarrow$  kořeny  $+1, -1, +i, -i$

$$z_{k+1} = (4z_k^3 + 1) / (3z_k^4)$$

$$z_0, z_1, z_2, \dots$$

Správná startovací hodnota ?

**Př 2:**  $f(z) = z^5 - 1$



**Podobně další výrazy:**

$$z_{k+1} = \lambda \sin z_k^n$$

$\lambda, z$  ..... komplexní čísla

$$z_{k+1} = \lambda (1 - z_k)^2$$

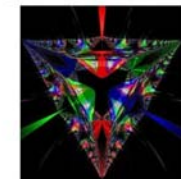
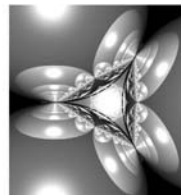
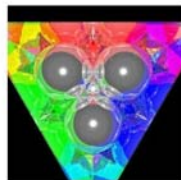
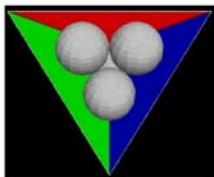
$n$  ..... reálné číslo

70

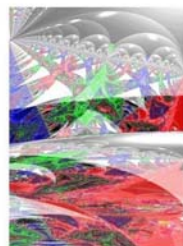
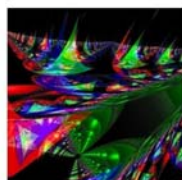
Hry P. Bourkeho:

"Vánoční fraktály"

P. Bourke: Wada basins (Jap. 1917)



pyramida čtyř lesklých koulí v doteku



71

**Inverzní výpočet Juliovy množiny (Inverse Iteration Method)**

Dopředný výpočet  $z = z^2 + c$ .

Připomeňme:  $z$  a  $c$  jsou komplexní čísla

Inverzní výpočet: iterace  $z = \pm \sqrt{z - c}$ .

Program startuje z pevného bodu výrazu  $F(z) = z^2 + c$

$$z = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - c}$$

Poznámka: Odmocnina odpovídá obecnému zápisu  $\sqrt{z - c}$  pro  $z = 1/4$ .

Dostáváme dvě řešení, náhodně vybíráme jedno.

Úloha odpovídá IFS  $\{t_i, p_i: i = 1, 2\}$   $t_1 = +\sqrt{z - c}$ ,  $t_2 = -\sqrt{z - c}$ ,

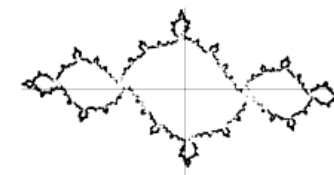
$$p_1 = p_2 = 0,5$$

Body „skáčou“ po hranici množiny s nestejnou hustotou,

řešení je pomalé.

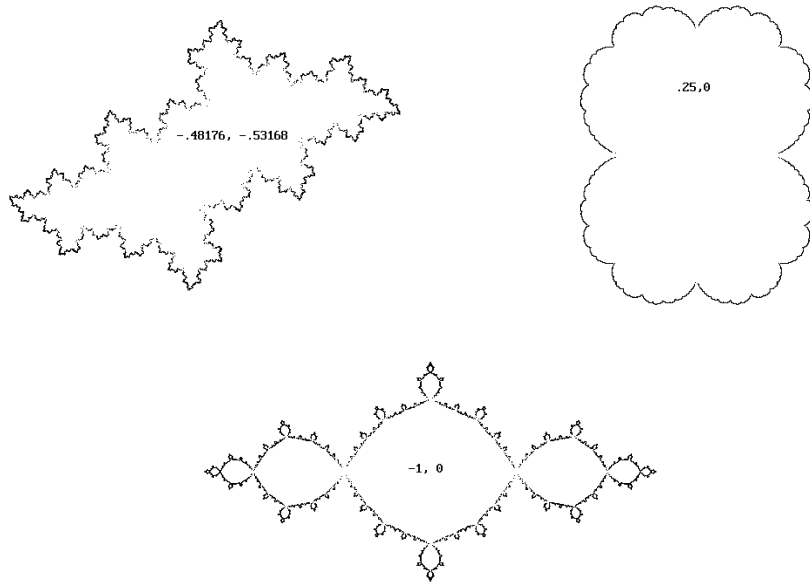
Př.  $|c| = konst.$

Př.  $c = -1, i$  :



72

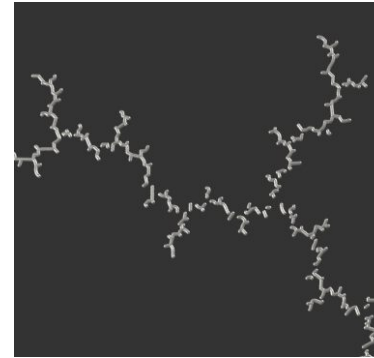
Př. Několik voleb ( $cr, ci$ ), počet iterací  $n = 5\ 000$



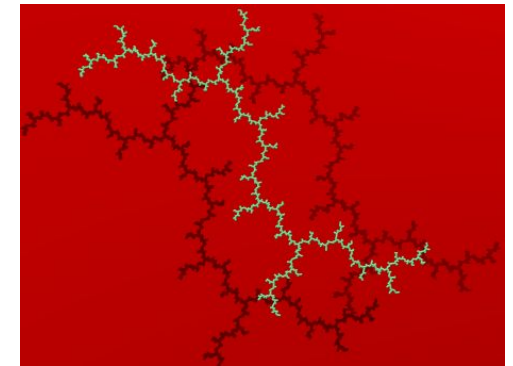
73

Př. Juliova množina počítaná inverzní metodou jako objekt 3D

Počet iterací 3 000



Počet iterací 20 000



Poznámka: Výpočet je často prováděn v polárních souřadnicích.

74

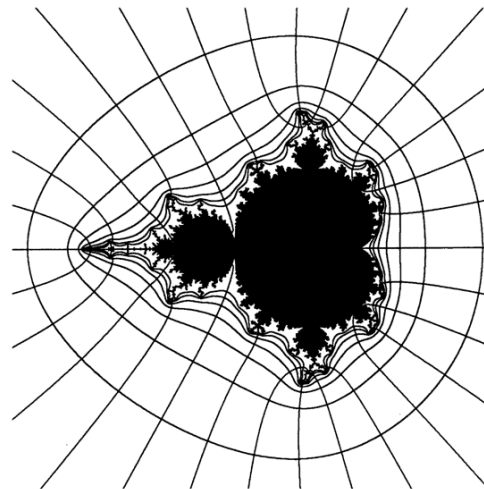
## EXPANZE DO 3D

a) Analogie rozložení potenciálu v prstencovém poli

výška  $h =$  hodnota potenciálu

Výsledkem je řádná plochá "krajina" mající charakteristické rysy M množiny.

A. Duady, J. Hubbard (1983)



75

## b) Juliovy množiny kvaternionů

Kvaterniony jsou podobné komplexním číslům mají 1 reálnou a 3 imaginární části,  $C=(a, bi, cj, dk)$ , nejsou komutativní  $bi*cj$  se nerovná  $c*bi$ .

Juliova množina kvaternionů má stejnou rovnici,  $Z(n)=Z(n-1)^2+C$ .

U komplexních čísel platí  
 $(a, bi)^2_{real} = a^2 - b^2$   
 $(a, bi)^2_{imaginary} = 2*a*bi$

U kvaternionů platí obdobně  
 $(a, bi, cj, dk)^2_{real} = a^2 - b^2 - c^2 - d^2$   
 $(a, bi, cj, dk)^2_{imaginary(i)} = 2*a*bi$   
 $(a, bi, cj, dk)^2_{imaginary(j)} = 2*a*cj$   
 $(a, bi, cj, dk)^2_{imaginary(k)} = 2*a*dk$

Juliova množina kvaternionů je nalezena stejným způsobem jako komplexní Juliova množina.

Poznámka: 3D objekty získáme projekcí ze 4D, obraz generujeme pomocí metody Ray Casting (paměti hloubky). Vhodné umístění zdroje světla může zjednodušit výpočet normál pro stínování.

76

Připomeňme: Analogicky bude platit  $|z|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + dk^2$

Výpočet subprostoru kvaternionu (3D objektu) bude respektovat zvolené natočení „scény“:

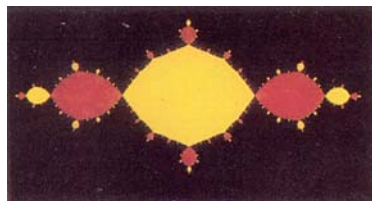
$$f(z) = e^{-i\theta} z^2 + e^{i\theta} c$$

kde  $\theta$  je úhel a  $c \in \mathbb{C}$

parametr  $c$  nemusí být kvaternion

parametr  $\theta$  specifikuje rotaci komplexní Juliovy množiny  
(rotace mění průsečíky s imaginárními osami)

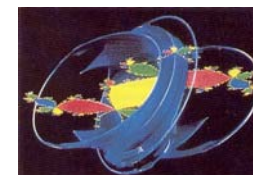
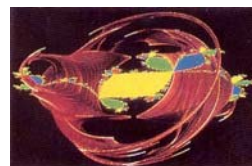
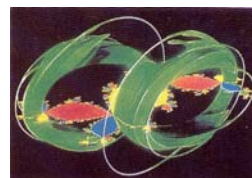
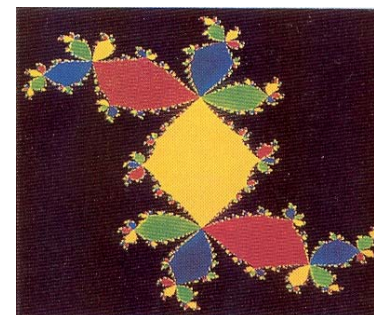
Př. 1. Expanze Juliovy množiny  $f(z) = z^2 - 1$  a její 3D obraz po rotaci kolem reálné osy



77

Př. 2. Oblastí planární Juliovy množiny v 3D subprostoru kvaternionu.

$$F(z) = z^2 + 0.2809 - 0.53i$$



Jiná pozice téže množiny:



78

Kvaterniony Juliovy množiny často počítáme inverzně a průsečík paprsku s plochou iterujeme).  
Postup A. Nortona:

Hledáme hranici fraktální množiny v prostorové síti

Podmínky existence hraničního voxelu P:

- 1) P je uvnitř uvažované plochy
- 2) nejméně jeden soused je vně plochy
- 3) P je spojen s množinou startovacích bodů (ležících na ploše) souvislou cestou vedoucí po hraničních voxelích.

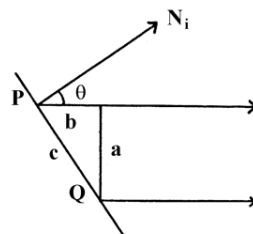
Strategie:

Body, které mohou být kandidáty, jsou umísťovány do zásobníku, prověřovány a úspěšné P vytvářejí seznam povrchových voxelů.

Antialiasing lze provádět polopropustností vnější vrstvy.

Fraktální plocha je nediferencovatelná,  
pro stínování počítáme pomocí paměti hloubky pseudonormály:

Alan Norton (1982)



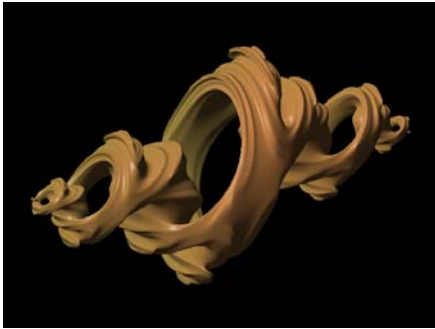
79

Kvaterniony A. Nortona



80

### Zobrazení kvaternionů metodou Ray Casting (QUAT)

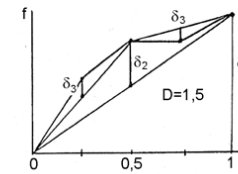


81

### Pseudofraktály 3D (nedeterministické!)

#### Metoda přesouvání středního bodu (MPD)

Modely Brownova pohybu (1828, N. Wiener 1920 a jiní později)



1.  $f(0) = 0$     $f(1) = \delta_1$   
 $\delta \leftarrow \text{RNDG}$   
 $\mu_1 = 0, \quad \sigma_1^2$
2.  $f(1/2) = (f(1/2) + f(1))/2 + \delta_2$   
 $\mu_2 = 0, \quad \sigma_2^2 = \sigma_1^2/4$
- n. další půlení  
 $\mu_n = 0, \quad \sigma_n^2 = \sigma_1^2/2^{n+1}$

Mandelbrotova modifikace

přirozené objekty mají  $D = \text{top. dim.} + H$

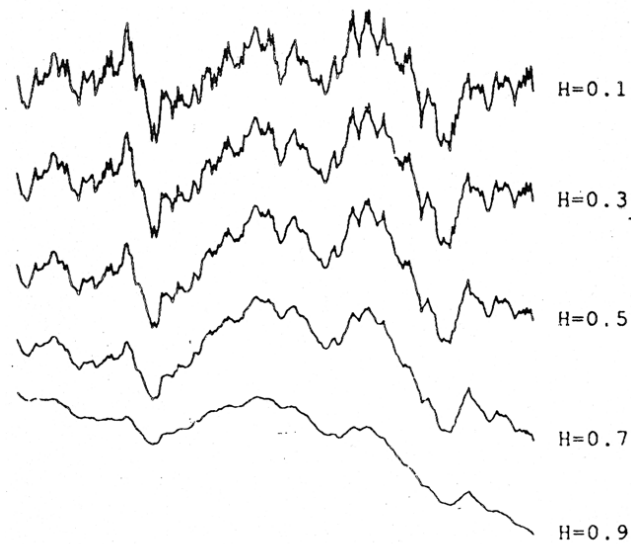
$H = 0,2$  až  $0,3$

$$\sigma_n^2 = \sigma_1^2 (1 - 2^{2H-2}) / 2^{2Hn}$$

Lákavá možnost rozšíření na trojúhelníky, čtyřúhelníky (rovinné i sférické plošky), hodnotám fce  $f$  lze přiřadit barvy ...

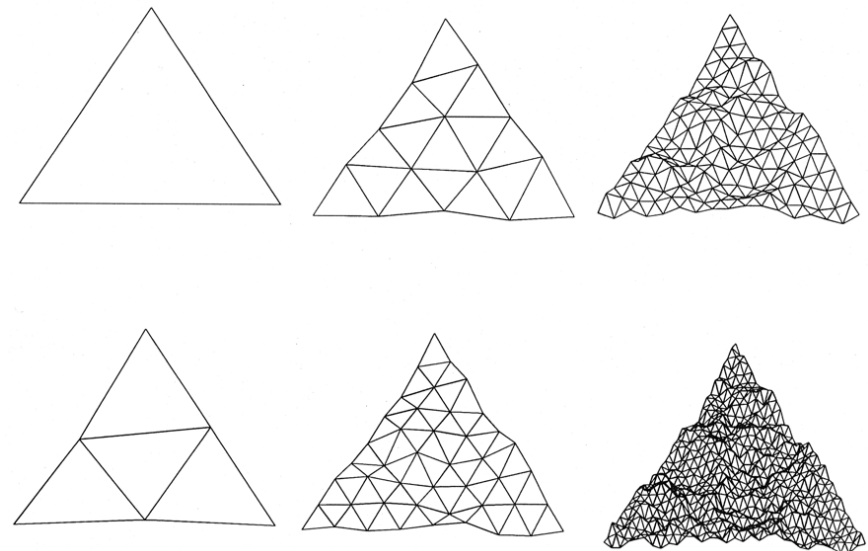
82

### Efekt parametru $H$ :



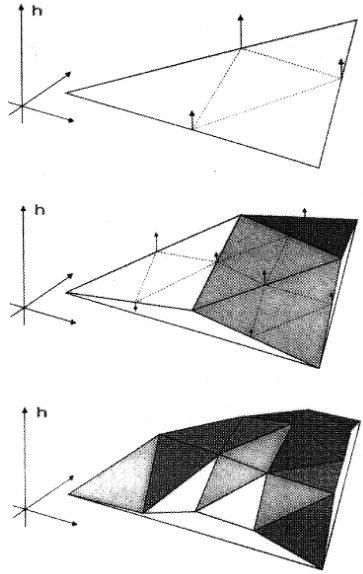
83

### Metoda MPD aplikovaná na trojúhelník ve 2D

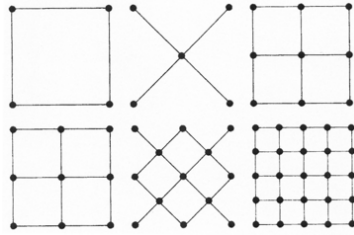


84

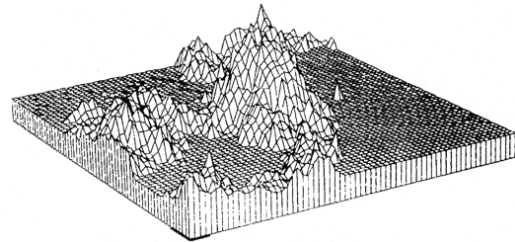
### Metoda MPD aplikovaná na trojúhelník ve 3D



varianty umístění středního bodu  
ve čtyřúhelníkové síti:

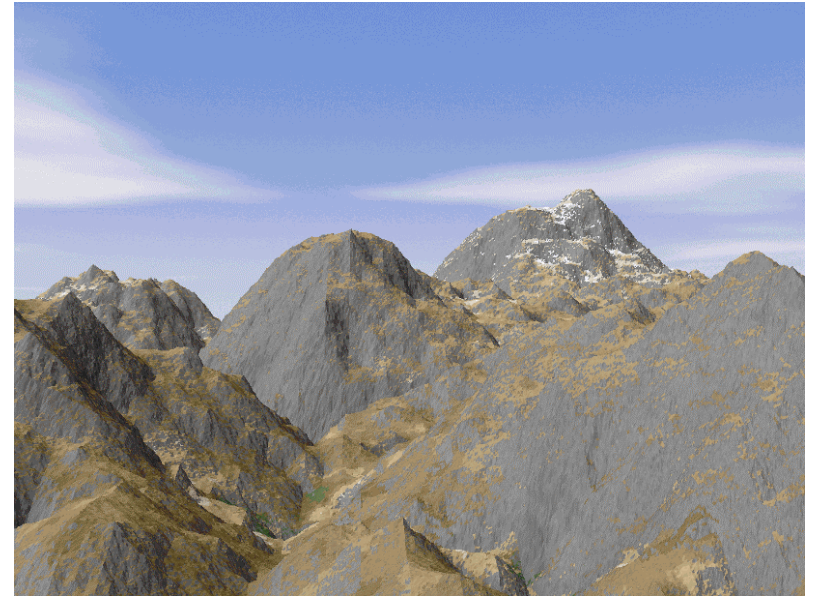


výsledek



85

### Konečný výsledek



86