6 Vlastnosti funkcí a Skládání relací

Vraťme se nyní k látce Lekce 3. Z jejího pokročilého obsahu jsme doposud velmi detailně probírali relace a jejich jednotlivé vlastnosti. Nyní se podívejme, jak lze relace mezi sebou „skládat“, což je například základní technika práce s relačními databázemi.

datum	let	letadlo
5.11.	OK535	ČSA
5.11.	AF2378	ČSA
5.11.	DL5457	ČSA
6.11.	OK535	AirFrance
6.11.	AF2378	AirFrance

$\circ$

pasažér	datum	let
Petr	5.11.	OK535
Pavel	6.11.	OK535
Jan	5.11.	AF2378
Josef	5.11.	DL5457
Alena	6.11.	AF2378

$=$

pasažér	letadlo
Petr	ČSA
Josef	ČSA
...	...

□

Je však i jiné místo, kde jste se zajisté se skládáním relací setkali – jedná se o skládání funkcí. Jak například spočítáte na kalkulačce výsledek složitějšího vzorce? □

Stručný přehled lekce

* Přehled základních vlastností funkcí.
* Inverzní relace a skládání (binárních) relací, příklady.
* Skládání funkcí (coby relací), speciálně aplikováno na permutace.
* Induktivní definice množin a funkcí.

Zopakování relací a funkcí

- *Relace* mezi množinami $A_1, \cdots, A_k$, pro $k \in \mathbb{N}$, je libovolná podmnožina kartézského součinu
$$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_k .$$
Pokud $A_1 = \cdots = A_k = A$, hovoříme o *k-ární relaci R na A*. □

- *(Totální) funkce* z množiny A do množiny B je relace f mezi A a B taková, že pro každé $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$.□
  - Množina A se nazývá *definiční obor* a množina B *obor hodnot* funkce f. Funkcím se také říká *zobrazení*.
  - Místo $(x, y) \in f$ píšeme obvykle $f(x) = y$. Zápis
  $$f : A \to B$$
  říká, že f je funkce s def. oborem A a oborem hodnot B. □

- Pokud naší definici funkce upravíme tak, že požadujeme pro každé $x \in A$ nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$, obdržíme definici *parciální funkce* z A do B.

6.1 Vlastnosti funkcí

Definice: Funkce $f : A \to B$ je

– *injektivní* (nebo také prostá) právě když pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$ platí, že $f(x) \neq f(y)$;□

– *surjektivní* (nebo také „na“) právě když pro každé $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$;□

– *bijektivní* (vzáj. jednoznačná) právě když je injektivní a souč. surjektivní.□

Ukázky vlastností funkcí.

- Funkce $plus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je surjektivní, ale není prostá.□
- Funkce $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ daná předpisem

$$g(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{jestliže } x < 0, \\ 2x & \text{jinak} \end{cases}$$

je bijektivní.□

- Funkce $\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ je bijektivní.□
- Funkce $\emptyset : \emptyset \to \{a, b\}$ je injektivní, ale není surjektivní.

6.2 Inverzní relace a skládání relací

Definice: Nechť $R \subseteq A \times B$ je binární relace mezi A a B. *Inverzní relace k relaci* R se značí R^{-1} a je definována takto:

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

(R^{-1} je tedy relace mezi B a A.) $\square$

Příklady inverzí pro relace–funkce.

- Inverzí bijektivní funkce $f(x) = x + 1$ na $\mathbb{Z}$ je funkce $f^{-1}(x) = x - 1$. $\square$
- Inverzí prosté funkce $f(x) = e^x$ na $\mathbb{R}$ je parciální funkce $f^{-1}(x) = \ln x$. $\square$
- Funkce $g(x) = x \bmod 3$ není prostá na $\mathbb{N}$, a proto její inverzí je „jen“ relace $g^{-1} = \{(a,b) \mid a = b \bmod 3\}$.
  Konkrétně $g^{-1} = \{(0,0),(0,3),(0,6),\ldots,(1,1),(1,4),\ldots,(2,2),(2,5),\ldots\}$. $\square$

Tvrzení 6.1. *Mějme funkci $f : A \to B$. Pak její inverzní relace f^{-1} je*

a) parciální funkce právě když f je prostá, $\square$

b) funkce právě když f je bijektivní.

Důkaz vyplývá přímo z definic funkce a inverze relace. $\square$

Definice 6.2. Složení (kompozice) relací R a S.
Nechť $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$ jsou binární relace. *Složení* relací R a S (v tomto pořadí!) je relace $S \circ R \subseteq A \times C$ definovaná takto:

$$S \circ R = \{(a,c) \mid \text{existuje } b \in B \text{ takové, že } (a,b) \in R, (b,c) \in S\}$$ □

Složení relací čteme „R složeno s S" nebo (pozor na pořadí!) „S po R". □

Příklady skládání relací.

- Je-li
  - $A = \{a,b\}, \quad B = \{1,2\}, \quad C = \{X\},$
  - $R = \{(a,1),(b,1),(b,2)\}, \quad S = \{(1,X)\},$

  pak složením vznikne relace
  - $S \circ R = \{(a,X),(b,X)\}$. □
- Složením funkcí $h(x) = x^2$ a $f(x) = x + 1$ na $\mathbb{R}$ vznikne funkce

$$f \circ h\,(x) = f(h(x)) \; = \; x^2 + 1.$$ □

- Složením těchže funkcí „naopak" ale vznikne funkce $h \circ f\,(x) = h(f(x)) = (x+1)^2$. □

Poznámka: Nepříjemné je, že v některých oblastech matematiky (například v algebře při skládání zobrazení) se setkáme s právě opačným zápisem skládání, kdy se místo $S \circ R$ píše $R \cdot S$ nebo jen RS.

6.3 Skládání relací „v praxi“

Příklad 6.3. *Skládání v relační databázi studentů, jejich předmětů a fakult.*

Mějme dvě binární relace – jednu R přiřazující studentům MU kódy jejich zapsaných předmětů, druhou S přiřazující kódy předmětů jejich mateřským fakultám.

R :

student (učo)	předmět (kód)
121334	MA010
133935	M4135
133935	IA102
155878	M1050
155878	IB000

S :

předmět (kód)	fakulta MU
MA010	FI
IB000	FI
IA102	FI
M1050	PřF
M4135	PřF

Jak z těchto „tabulkových“ relací zjistíme, kteří studenti mají zapsané předměty na kterých fakultách (třeba na FI)?

Jedná se jednoduše o složení relací $S \circ R$. V našem příkladě třeba:

$S \circ R$:

student (učo)	fakulta MU
121334	FI
133935	FI
133935	PřF
155878	FI
155878	PřF

□

Zobecněné skládání relací

Fakt (**skládání relací vyšší arity**): Mějme relace $T \subseteq K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_k$ a $U \subseteq L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_\ell$, přičemž pro nějaké $m < \min(k, \ell)$ platí $L_1 = K_{k-m+1}, L_2 = K_{k-m+2}, \ldots, L_m = K_k$. □Pak relaci T lze *složit* s relací U na zvolených m složkách $L_1, \ldots, L_m$ („překrytí“) s použitím Definice 6.2 takto:

- Položme $A = K_1 \times \ldots \times K_{k-m}$, $B = L_1 \times \ldots \times L_m$ a $C = L_{m+1} \times \ldots \times L_\ell$.
- Příslušné relace pak jsou
  - $R = \{(\vec{a}, \vec{b}) \in A \times B \mid (a_1, \ldots a_{k-m}, b_1, \ldots b_m) \in T\}$ a
  - $S = \{(\vec{b}, \vec{c}) \in B \times C \mid (b_1, \ldots b_m, c_{m+1}, \ldots c_\ell) \in U\}$. □
- Nakonec přirozeně položme $U \circ_m T \simeq A \circ B$, takže vyjde $U \circ_m T =$

$$\left\{(\vec{a}, \vec{c}) \mid \text{ ex. } \vec{b} \in B, \text{ že } (a_1, \ldots a_{k-m}, b_1, \ldots b_m) \in T \text{ a } (b_1, \ldots b_m, c_{m+1}, \ldots c_\ell) \in U\right\}.$$

Schematicky pro snažší orientaci:

$$\begin{array}{rllll}
T \subseteq & K_1 \times \ldots \times K_{k-m} \times & K_{k-m+1} \times \ldots \times K_k & & \\
U \subseteq & & L_1 \times \ldots \times L_m & \times L_{m+1} \times \ldots \times L_\ell & \\
U \circ_m T \subseteq & \underbrace{K_1 \times \ldots \times K_{k-m}}_{A} \times & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{B} & \times \underbrace{L_{m+1} \times \ldots \times L_\ell}_{C} &
\end{array}$$

Příklad 6.4. *Skládání v relační databázi pasažérů a letů u leteckých společností.*

Podívejme se na příklad hypotetické rezervace letů pro cestující, relace T. Jak známo (tzv. codeshare), letecké společnosti si mezi sebou „dělí“ místa v letadlech, takže různé lety (podle kódů) jsou ve skutečnosti realizovány stejným letadlem jedné ze společností. To zase ukazuje relace U.

T :

pasažér	datum	let
Petr	5.11.	OK535
Pavel	6.11.	OK535
Jan	5.11.	AF2378
Josef	5.11.	DL5457
Alena	6.11.	AF2378

U :

datum	let	letadlo
5.11.	OK535	ČSA
5.11.	AF2378	ČSA
5.11.	DL5457	ČSA
6.11.	OK535	AirFrance
6.11.	AF2378	AirFrance

Ptáme-li se nyní, setkají se Petr a Josef na palubě stejného letadla? Případně, čí letadlo to bude? Odpovědi nám dá zase složení relací $U \circ_2 T$, jak je posáno výše.

$U \circ_2 T$:

pasažér	letadlo
Petr	ČSA
Josef	ČSA
...	...

Zkuste se zamyslet, lze tyto dvě relace skládat ještě jinak? Co by pak bylo významem? □

6.4 Skládání funkcí, permutace

Fakt: Mějme zobrazení (funkce) $f : A \to B$ a $g : B \to C$. Pak jejich *složením* coby relací v tomto pořadí vznikne zobrazení $(g \circ f) : A \to C$ definované

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \,.\square$$

- Jak například na běžné kalkulačce vypočteme hodnotu funkce $\sin^2 x$? $\square$
  Složíme (v tomto pořadí) „elementární" funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x^2$. $\square$
- Jak bychom na „elementární" funkce rozložili aritmetický výraz $2\log(x^2 + 1)$? $\square$
  Ve správném pořadí složíme funkce $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = \log x$ a $f_4(x) = 2x$. $\square$
- A jak bychom obdobně vyjádřili složením funkcí aritmetický výraz $\sin x + \cos x$?
  Opět je odpověď přímočará, vezmeme „elementární" funkce $g_1(x) = \sin x$ a $g_2(x) = \cos x$, a pak je „složíme" další funkcí $h(x, y) = x + y$. $\square$
  Vidíme však, že takto pojaté „skládání" už nezapadá hladce do našeho formalismu skládání relací.

Skládání permutací

Definice: Nechť *permutace* π množiny $[1,n]$ je určena seřazením jejích prvků $(p_1,\ldots,p_n)$. Pak π je zároveň bijektivním zobrazením $[1,n]\to[1,n]$ definovaným předpisem $\pi(i)=p_i$. □

Tudíž lze permutace *skládat jako relace* podle Definice 6.2. □

Poznámka: Všechny permutace množiny $[1,n]$ spolu s operací skládání tvoří grupu, zvanou symetrická grupa S_n.

Permutační grupy (podgrupy symetrické grupy) jsou velice důležité v algebře, neboť každá grupa je vlastně isomorfní některé permutační grupě. □

Příkladem permutace vyskytujícím se v programátorské praxi je třeba zobrazení $i\mapsto(i+1)\bmod n$. □

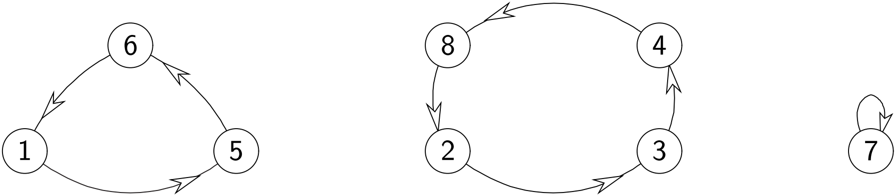
Často se programátor setkává (aniž si to mnohdy uvědomuje) s permutacemi při indexaci prvků polí.

V kontextu pohledu na funkce a jejich skládání coby relací si zavedeme jiný, názornější, způsob zápisu permutací – pomocí jejich cyklů. □

Definice: Nechť π je permutace na množině A. *Cyklem v* π rozumíme posloupnost $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ různých prvků A takovou, že $\pi(a_i) = a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k-1$ a $\pi(a_k) = a_1$. □

Jak název napovídá, v zápise cyklu $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ není důležité, kterým prvkem začneme, ale jen dodržení cyklického pořadí. Cyklus v permutaci může mít i jen jeden prvek (zobrazený na sebe).

Například permutaci $(5, 3, 4, 8, 6, 1, 7, 2)$ si lze obrázkem nakreslit takto:



Věta 6.5. *Každou permutaci π na konečné množině A lze zapsat jako složení cyklů na disjunktních podmnožinách (rozkladu) A.* □

Důkaz: Vezmeme libovolný prvek $a_1 \in A$ a iterujeme zobrazení $a_2 = \pi(a_1)$, $a_3 = \pi(a_2)$, atd., až se dostaneme „zpět“ k $a_{k+1} = \pi(a_k) = a_1$. Proč tento proces skončí? Protože A je konečná a tudíž ke zopakování některého prvku a_{k+1} musí dojít. Nadto je π prostá, a proto nemůže nastat $\pi(a_k) = a_j$ pro $j > 1$. Takto získáme první cyklus $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$. □

Induktivně pokračujeme s hledáním dalších cyklů ve zbylé množině $A \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$, dokud nezůstane prázdná. □ □

Značení permutací cykly: Nechť se permutace π podle Věty 6.5 skládá z cyklů $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$, $\langle b_1, \ldots, b_l \rangle$ až třeba $\langle z_1, \ldots, z_m \rangle$. Pak zapíšeme

$$\pi = (\langle a_1, \ldots, a_k \rangle \langle b_1, \ldots, b_l \rangle \ldots \langle z_1, \ldots, z_m \rangle) \square\, .$$

Primitivní pseudonáhodné generátory v počítačích iterují z náhodného počátku permutaci danou vztahem $i \mapsto (i + p) \bmod q$. Je pochopitelné, že tato permutace nesmí obsahovat krátké cykly, lépe řečeno, měla by se skládat z jediného (dlouhého) cyklu.

Příklad 6.6. *Ukázka skládání permutací daných svými cykly.*

Vezměme 7-prvkovou permutaci $(5,3,4,2,6,1,7)$. Ta se rozkládá na tři cykly $\langle 1,5,6\rangle$, $\langle 2,3,4\rangle$ a $\langle 7\rangle$. Jiná permutace $(3,4,5,6,7,1,2)$ se skládá z jediného cyklu $\langle 1,3,5,7,2,4,6\rangle$. □

Nyní určíme složení těchto dvou permutací (zápisem cykly):

$$(\langle 1,5,6\rangle\langle 2,3,4\rangle\langle 7\rangle) \circ (\langle 1,3,5,7,2,4,6\rangle) = (\langle 1,4\rangle\langle 2\rangle\langle 3,6,5,7\rangle)$$

(Nezapomínejme, že první se ve složení aplikuje pravá permutace!) □

Postup skládání jsme použili následovný:

- 1 se zobrazí v permutaci vpravo na 3 a pak vlevo na 4. □
- Následně 4 se zobrazí na 6 a pak na 1. Tím „uzavřeme“ první cyklus $\langle 1,4\rangle$. □
- Dále se 2 zobrazí na 4 a pak hned zpět na 2, tj. má samostatný cyklus. □
- Zbylý cyklus $\langle 3,6,5,7\rangle$ určíme analogicky.

□

6.5 Induktivní definice množin a funkcí

Přímým zobecněním rekurentních definic je následující koncept.

Definice 6.7. **Induktivní definice** množiny.
Jedná se obecně o popis (nějaké) množiny M v následujícím tvaru:

- Je dáno několik pevných (*bázických*) prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$. □
- Je dán soubor *induktivních pravidel* typu

Jsou-li (libovolné prvky) $x_1, \ldots, x_\ell \in M$, pak také $y \in M$.

V tomto případě je y typicky funkcí $y = f_i(x_1, \ldots, x_\ell)$. □

Pak naše *induktivně definovaná množina* M je určena jako nejmenší (inkluzí) množina vyhovující těmto pravidlům.

Vidíte podobnost této definice s uzávěrem relace? (Věta 5.7.) □

Pro nejbližší příklad induktivní definice se obrátíme na množinu všech přirozených čísel.

- $0 \in \mathbb{N}$
- Je-li $i \in \mathbb{N}$, pak také $i + 1 \in \mathbb{N}$.

Pro každé $y \in \mathbb{N}$ můžeme definovat jinou množinu $M_y \subseteq \mathbb{N}$ induktivně takto:

- $y \in M_y$.
- Jestliže $x \in M_y$ a $x+1$ je liché, pak $x+2 \in M_y$.

Pak například $M_3 = \{3\}$, nebo $M_4 = \{4+2i \mid i \in \mathbb{N}\}$. □

Definice: Řekneme, že daná induktivní definice množiny M je *jednoznačná*, právě když každý prvek M lze odvodit z bázových prvků pomocí induktivních pravidel právě jedním způsobem. □

Definujme množinu $M \subseteq \mathbb{N}$ induktivně takto:

- $2, 3 \in M$.
- Jestliže $x, y \in M$, pak také $x^2 + y^2$ a $x.y$ jsou prvky M.

Proč tato induktivní definice není jednoznačná? □Například číslo $8 \in M$ lze odvodit způsobem $8 = 2 \cdot (2 \cdot 2)$, ale zároveň zcela jinak $8 = 2^2 + 2^2$.

V čem tedy spočívá důležitost jednoznačných induktivních definic množin?

Definice 6.8. **Induktivní definice funkce** z induktivní množiny.
Nechť množina M je dána jednoznačnou induktivní definicí. Pak říkáme, že funkce $\mathcal{F} : M \to X$ je definována *induktivně* (vzhledem k induktivní definici M), pokud je řečeno:

- Pro každý z bázických prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$ je určeno $\mathcal{F}(a_i) = c_i$. □
- Pro každé induktivní pravidlo typu

  "Jsou-li (libovolné prvky) $x_1, \ldots, x_\ell \in M$, pak také $f(x_1, \ldots, x_\ell) \in M$"

  je definováno

$$\mathcal{F}(\, f(x_1, \ldots, x_\ell)\,) \text{ na základě hodnot } \mathcal{F}(x_1), \ldots, \mathcal{F}(x_\ell). \square$$

Pro příklad se podívejme třeba do manuálu unixového příkazu `test EXPRESSION`:

```
EXPRESSION is true or false and sets exit status.  It is one of:
  ! EXPRESSION                    EXPRESSION is false
  EXPRESSION1 -a EXPRESSION2      both EXPRESSION1 and EXPRESSION2 are true
  EXPRESSION1 -o EXPRESSION2      either EXPRESSION1 or EXPRESSION2 is true
  [-n] STRING                     the length of STRING is nonzero
  STRING1 = STRING2               the strings are equal
     ......
```

Induktivní definice se „strukturální“ indukcí

Příklad 6.9. *Jednoduché aritmetické výrazy*

Nechť (abeceda) $\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\odot,\oplus,(,)\}$. Definujme množinu *jednoduchých výrazů* $SExp \subseteq \Sigma^*$ induktivně takto:

- Dekadický zápis každého přirozeného čísla **n** je prvek $SExp$.
- Jestliže $x, y \in SExp$, pak také $(x) \odot (y)$ a $(x) \oplus (y)$ jsou prvky $SExp$. □

(Jak vidíme, díky „závorkování“ je tato induktivní definice jednoznačná.)

Pro „vyhodnocení“ výrazu pak definujme funkci $\mathit{Val} : SExp \to \mathbb{N}$ induktivně:

- Bázické prvky: $\mathit{Val}(\mathbf{n}) = n$, kde **n** je dekadický zápis přirozeného čísla n. □
- První induktivní pravidlo: $\mathit{Val}((x) \oplus (y)) = \mathit{Val}(x) + \mathit{Val}(y)$.
- Druhé induktivní pravidlo: $\mathit{Val}((x) \odot (y)) = \mathit{Val}(x) \cdot \mathit{Val}(y)$. □

(Tímto způsobem jsme našim výrazům vlastně přiřadili jejich „význam“, sémantiku.) □

Příklad 6.10. *Důkaz správnosti přiřazeného „významu“ $\mathit{Val} : \mathit{SExp} \to \mathbb{N}$.*

> **Věta**. *Pro každý výraz $s \in \mathit{SExp}$ je hodnota $\mathit{Val}(s)$ číselně rovna výsledku vyhodnocení výrazu s podle běžných zvyklostí aritmetiky.* □

Matematickou indukcí: Na rozdíl od dříve probíraných příkladů zde nevidíme žádný celočíselný „parametr n“, a proto si jej budeme muset nejprve definovat. □

Naši indukci tedy povedeme podle „délky ℓ odvození výrazu s“ definované jako počet aplikací induktivních pravidel potřebných k odvození $s \in \mathit{SExp}$.

Takto aplikované matematické indukci se často říká **strukturální indukce**. □

Důkaz: V bázi indukce ověříme vyhodnocení bázických prvků, což jsou zde dekadizké zápisy přirozených čísel. Platí $\mathit{Val}(\mathbf{n}) = n$, což skutečně odpovídá zvyklostem aritmetiky.

V indukčním kroku se podíváme na vyhodnocení $\mathit{Val}((x) \oplus (y)) = \mathit{Val}(x) + \mathit{Val}(y)$. Podle běžných zvyklostí aritmetiky by hodnota $\mathit{Val}((x) \oplus (y))$ měla být rovna součtu vyhodnocení výrazu x, což je podle indukčního předpokladu rovno $\mathit{Val}(x)$ (x má zřejmě kratší délku odvození), a vyhodnocení výrazu y, což je podle indukčního předpokladu rovno $\mathit{Val}(y)$. Takže skutečně $\mathit{Val}((x) \oplus (y)) = \mathit{Val}(x) + \mathit{Val}(y)$. Druhé pravidlo $\mathit{Val}((x) \odot (y))$ se dořeší analogicky. □