10 Dekompozice grafů, minory a algoritmy

Další autorův výběr tématu nás zavede blíže ke strukturální teorii grafů, k různým jejich dekompozicím, grafovým minorům a navazujícím efektivním algoritmům pro jinak těžké problémy.

Vrcholem této lekce je formulace hlavního výsledku takzvané „Graph Minors Theory“ od Robertsona a Seymoura, který lze bez nadsázky prohlásit za asi největší výsledek, kterého dosud teorie grafů dosáhla (i v porovnání s Větou o čtyřech barvách). □

Stručný přehled lekce

- Stromová šířka grafu ze čtyř stran.
- Některé jiné "šířkové" parametry.
- Ukázky použití dekompozic grafů na efektivní algoritmy.
- Něco o grafových minorech a strukturální teorii.

10.1 Tree-width – čtyři definice

Velikost největší kliky v grafu G označujeme $\omega(G)$.

Definice: *Stromovou šířkou (tree-width)* grafu G nazveme nejmenší přirozené k takové, že exituje chordální graf H s $\omega(H) = k + 1$ obsahující G jako podgraf ($H \supseteq G$). □

. . . .

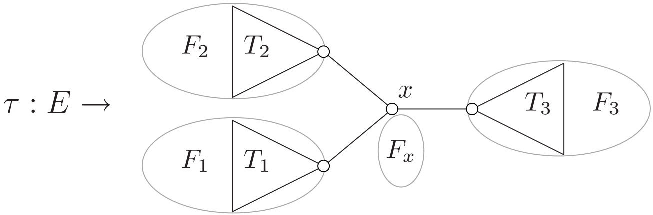
Definice: Vrcholy $V(G)$ grafu G uspořádáme do posloupnosti (permutace) $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Pro $i = 1, 2, \ldots, n$ definujme $\ell(v_i)$ jako počet všech indexů $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ takových, že vrcholy v_i a v_j jsou v G spojeny cestou používající pouze vrcholy z množiny $\{v_j, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$.

Druhou *stromovou šířkou* grafu G nazveme nejmenší hodnotu výrazu $\max_v \ell(v)$ přes všechny permutace vrcholů $V(G)$.

Definice: Pro libovolný strom T uvažujeme (libovolné) zobrazení $\tau : E(G) \to V(T)$. Pro vrchol $t \in V(T)$ označíme $T_1, \ldots, T_d$ jednotlivé komponenty lesa $T - t$ a $F_i = \tau^{-1}\big(V(T_i)\big)$. Označme

$$\ell_\tau(t) = |V(G)| + (d-1) \cdot c(G) - \sum_{i=1}^{d} c(G - F_i),$$

kde $c(H)$ značí počet souvislých komponent grafu H.



Třetí *stromovou šířkou* grafu G pak definujeme jako nejmenší možnou, přes všechny dvojice T, τ, hodnotu výrazu $\max_{t \in V(T)} \ell_\tau(t)$.

Nakonec si uvedeme ještě jednu definici, která se většinou uvádí jako ta první a hlavní (a na ostatní možné definice málokdy přijde řeč).

Definice 10.1. **Stromová dekompozice** grafu G.
Stromovou dekompozicí grafu G nazveme strom T spolu se systémem množin $\mathcal{X}_t$ pro $t \in V(T)$, kde

- $\mathcal{X}_t \subseteq V(G)$ a $\bigcup_{t\in V(T)} \mathcal{X}_t = V(G)$,
- pro každou hranu $e = uv \in E(G)$ je $u, v \in \mathcal{X}_t$ pro nějaké $t \in V(T)$,
- (*interpolační* vlastnost) pro každý vrchol $v \in V(G)$ tvoří podmnožina všech $t \in V(T)$ s $v \in \mathcal{X}_t$ podstrom v T. □

Šířkou dekompozice $T, \mathcal{X}$ rozumíme největší hodnotu $|\mathcal{X}_t| - 1$ pro $t \in V(T)$ a čtvrtou *stromovou šířkou* grafu G nazveme nejmenší možnou šířku stromové dekompozice G.
□

Věta 10.2. *Všechny čtyři výše uvedené definice stromové šířky definují přesně tutéž hodnotu, pokud graf G má neprázdnou množinu hran.*

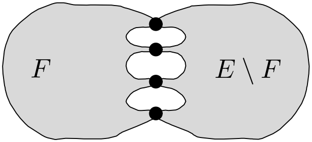
10.2 Některé další parametry

Definice: *Cestní* dekompozici a šířku (path-width) grafu G definujeme stejně jako v Definici 10.1Tree-width – čtyři definicetheorem.10.1, jen požadujeme navíc, aby T byla cesta. □

Definice: Vrcholy $V(G)$ grafu G uspořádáme do posloupnosti (permutace) $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. *Bandwidth* grafu G definujeme jako nejmenší hodnotu výrazu $\max_{v_i v_j \in E(G)} |i - j|$ přes všechny permutace vrcholů $V(G)$. □

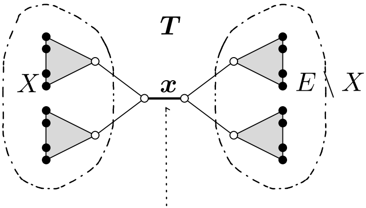
Graf je *kubický*, pokud má všechny vrcholy stupně 3. Strom je *podkubický*, pokud má všechny vrcholy stupně ≤ 3.

Pro libovolný graf G a podmnožinu $F \subseteq E(G)$ definujeme *funkci souvislosti* $\lambda_G(F)$ jako počet vrcholů G, které jsou konci některých hran z F i hran z $E(G) \setminus F$.



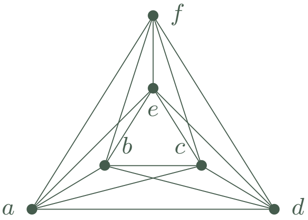
Definice 10.3. Větvená dekompozice grafu G

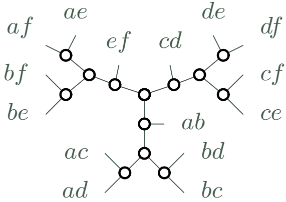
Nechť T je podkubický strom a $\tau : E(G) \to L(T)$ je bijekce hran grafu G do listů $L(T)$ stromu T. Pro každou hranu x stromu T definujeme šířku x jako $\lambda_G(X)$, kde $X = \tau^{-1}\big(V(T_1)\big)$ pro jednu z komponent T_1, T_2 lesa $T - x$.



$$\text{šířka}(x) := \lambda_G(X) = \lambda_G(E \setminus X)$$

Pak šířkou dekompozice T, τ je maximální šířka ze všech hran T a *větvenou šířkou* grafu G je nejmenší možná šířka větvené dekompozice G.





Věta 10.4. (Robertson and Seymour) *Pokud graf G má stromovou šířku t a větvenou šířku $b > 1$, tak*

$$b \leq t + 1 \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\, b \right\rfloor . \square$$

. . . .

Nechť G je graf a $F \subseteq E(G)$. Jako funkci *hodnosti řezu* $\gamma_G(F)$ na množině F označíme hodnost $F \times (E \setminus F)$-matice $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})$ nad binárním tělesem $GF(2)$, kde $a_{u,v} = 1$ pro $u \in F$ a $v \in E \setminus F$, právě když uv je hranou v G. $\square$

Definice 10.5. Ranková dekompozice grafu G

Nechť T je podkubický strom a $\tau : V(G) \to L(T)$ je bijekce vrcholů grafu G do listů $L(T)$ stromu T. Pro každou hranu x stromu T definujeme šířku x jako $\gamma_G(X)$, kde $X = \tau^{-1}\big(V(T_1)\big)$ pro jednu z komponent T_1, T_2 lesa $T - x$.

Pak šířkou dekompozice T, τ je maximální šířka ze všech hran T a *rankovou šířkou* grafu G je nejmenší možná šířka rankové dekompozice G. $\square$

Fakt: Rankovou šířku grafu lze omezit funkcí jeho větvené šířky, ale naopak toto neplatí – třeba úplné grafy mají rankovou šířku 1, kdežto jejich větvená i stromová šířka roste nade všechny meze.

10.3 Efektivní algoritmy na dekompozicích

Jak jistě víte, určení velikosti největší nezávislé množiny v grafu je $\mathcal{NP}$-úplný problém. Stromová dekompozice fixní šířky však tento problém umožňuje řešit velice snadno.

Algoritmus 10.6. Nezávislá množina na stromové dekompozici

□

Problém hledání (maximálního) párování v grafu sice je polynomiálně řešitelný, ale zjišťování počtu všech párování už je #P-úplné, neboli stejně těžké (beznadějné) jako výpočet permanentu matice nebo spočítání všech řešení SAT problému.

Algoritmus 10.7. Počet párování na větvené dekompozici

□

Poslední ukázka řeší problém 3-obarvení grafu s jeho rankovou dekompozicí fixní šířky a představuje netradiční nový přístup k takové problematice...

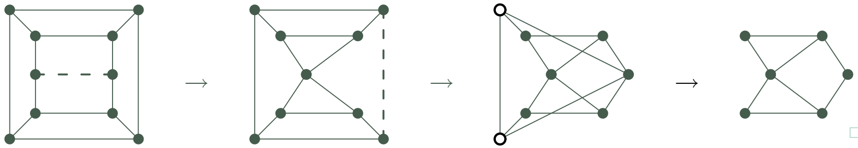
Algoritmus 10.8. 3-obarvení na rankové dekompozici

□

Pro zvídavé čtenáře na závěr zařazujeme následující těžkou otázku: Dokázali byste efektivně nalézt Hamiltonovskou kružnici v grafu na jeho rankové dekompozici fixní šířky?

10.4 Minory v grafech

Definice: Říkáme, že graf G je *minorem* grafu H, pokud lze G získat z H kontrakcemi hran a vypouštěním vrcholů a hran.



$\square$

Robertson–Seymourova věta

Věta 10.9. *Mějme libovolnou grafovou vlastnost ϕ, která je uzavřená na minory (tj. pokud G má ϕ, pak každý minor G má také ϕ).*

Pak existuje konečně mnoho grafů $F_1, \ldots, F_\ell$ (zakázané minory) takových, že G má ϕ právě když G neobsahuje minor isomorfní žádnému z $F_1, \ldots, F_\ell$.

Mimo jiné lze tudíž vlastnost ϕ rozhodnout v čase $O(n^3)$ pro každý n-vrcholový graf G.

$\square$

Poznámka: Tato věta je zcela nekonstruktivní, neboli nepodává žádný návod, jak zmíněný algoritmus sestrojit!