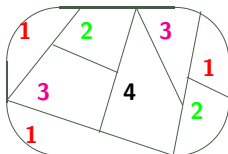


8 Rovinnost a kreslení grafů

V přímé návaznosti na předchozí lekci se zaměříme na druhý důležitý aspekt slavného problému čtyř barev, který byl původně formulován pro barevné rozlišení států na politické mapě:



Jak tedy taková obarvovaná politická mapa souvisí s kreslením grafů? Jednoduše – souvislé státy můžeme reprezentovat jako vrcholy grafu a hranami pak zaznamenat „sousednost“ mezi státy. Důležité je, že takto vzniklý graf můžeme zřejmě zakreslit v rovině **bez křížení hran** a nazýváme jej proto *rovinným grafem*.

Stručný přehled lekce

- Kreslení grafů, definice rovinného grafu a základní vlastnosti.
- Rozpoznávání rovinných grafů (Kuratowského věta).
- Barvení map a rov. grafů - problém čtyř barev a nástin jeho řešení.
- Kreslení grafů s křížením hran – průsečíkové číslo.

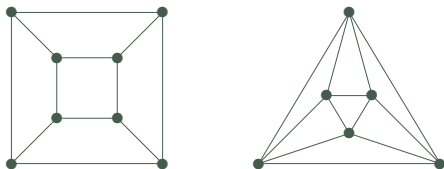
8.1 Rovinné kreslení grafu

Definice 8.1. Rovinným nakreslení grafu G

myslíme zobrazení, ve kterém jsou vrcholy znázorněny jako různé body v rovině a hrany jako oblouky spojující body svých koncových vrcholů. Přitom hrany se nesmí nikde křížit ani procházet jinými vrcholy než svými koncovými body.

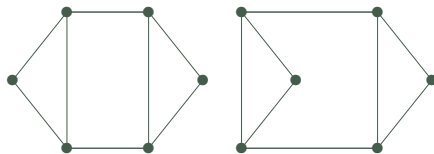
Graf je **rovinný** pokud má rovinné nakreslení. \square

Důležitým příkladem rovinných grafů jsou grafy (třírozměrných Euklidovských) mnohostěnů, třeba graf čtyřtěnu, krychle, osmistěnu, dvanáctistěnu, atd.



Platí, že grafy mnohostěnů jsou vždy rovinné a 3-souvislé. Naopak každý rovinný 3-souvislý jednoduchý graf je grafem nějakého mnohostěnu. (Důkaz tohoto tvrzení je obtížný.)

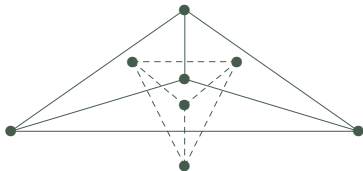
Definice: *Stěnami* rovinného nakreslení grafu nazýváme (topologicky) souvislé oblasti roviny ohraničené tímto nakreslením grafu.



Rovinný graf může mít více *podstatně různých* nakreslení, ale 3-souvislý rovinný graf má ve všech svých rovinných nakresleních “stejně stěny” (Důsledek 8.11 **Jednoznačnost rovinného nakreslení** theorem.8.11). □

Definice. *Duální graf* rovinného nakreslení grafu G získáme tak, že stěny nahradíme vrcholy duálu a hranami spojíme sousedící dvojice stěn.

Duální graf k rovinnému grafu je vždy rovinný, což je snadné dokázat.



Nyní si uvedeme zajímavý a vlastně “jediný rozumný” kvantitativní vztah o rovinných nakresleních grafů. Jedná se o slavný **Eulerův vztah**, který říká:

Věta 8.2. *Nechť rovinné nakreslení souvislého grafu G má f stěn. Pak*

$$|V(G)| + f - |E(G)| = 2. \square$$

Důkaz: Nechť počet vrcholů v G je v a hran h .

- Pokud je G strom, tj. nemá kružnice, má ve svém nakreslení jedinou stěnu a dle Věty 4.3 má přesně $h = v - 1$ hran. Potom platí $v + f - h = v + 1 - (v - 1) = 2$.
 \square
- Pokud G obsahuje kružnici C , pak vypustíme jednu její hranu e . Tím se počet hran sníží o 1, ale zároveň se sníží o 1 počet stěn, protože kružnice C původně oddělovala (viz Jordanova věta o kružnici) dvě stěny přilehlé k hraně e od sebe, ale nyní tyto dvě stěny „splynou“ v jednu. Počet vrcholů se nezmění. Proto se nezmění hodnota $v + f - h = v + (f - 1) - (e - 1) = 2$.

Tvrzení tak plyne z principu matematické indukce. \square

Poznámka: Všimněte si dobře, že Eulerův vztah vůbec nezávisí na tom, jak je graf G nakreslený, je to vlastnost grafu jako takového.

Tento jednoduše vypadající vztah má mnoho aplikací a důsledků.

Důsledek 8.3. *Jednoduchý rovinný graf na $v \geq 3$ vrcholech má nejvýše $3v - 6$ hran. Jednoduchý rovinný graf na $v \geq 3$ vrcholech a bez trojúhelníků má nejvýše $2v - 4$ hran.*

Důkaz: Můžeme předpokládat, že graf je souvislý, jinak bychom přidali další hrany. Necht' počet vrcholů v G je v , stěn je f a hran h . Jelikož nemáme smyčky ani násobné hrany, má každá stěna v nakreslení grafu na obvodu aspoň 3 hrany, přitom každou hranu započítáme ve dvou přilehlých stěnách. Pak tedy platí $e \geq \frac{1}{2} \cdot 3f$, neboli $\frac{2}{3}e \geq f$. Dosazením do vztahu Věty 8.2 Rovinné kreslení grafu theorem.8.2 získáme

$$2 = v + f - e \leq v + \frac{2}{3}e - e = v - \frac{1}{3}e$$
$$e \leq 3(v - 2) = 3v - 6. \square$$

Druhá část se dokazuje obdobně, ale nyní víme, že graf nemá ani trojúhelníky, a tudíž má každá stěna v nakreslení grafu na obvodu aspoň 4 hrany. Pak tedy platí $e \geq \frac{1}{2} \cdot 4f$, neboli $\frac{2}{4}e \geq f$. Dosazením do vztahu Věty 8.2 Rovinné kreslení grafu theorem.8.2 získáme

$$2 = v + f - e \leq v + \frac{2}{4}e - e = v - \frac{1}{2}e$$
$$e \leq 2(v - 2) = 2v - 4.$$

Tím jsme hotovi. □

Důsledek 8.4. Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše 5.
Každý rovinný graf bez trojúhelníků obsahuje vrchol stupně nejvýše 3. \square

Důkaz: Pokud by všechny vrcholy měly stupně alespoň 6, celý graf by měl aspoň $\frac{1}{2} \cdot 6v = 3v$ hran, což je ve sporu s Důsledkem 8.3. Rovinné kreslení grafu theorem.8.3. Některý vrchol musí tudíž mít menší stupeň než 6.

Obdobně postupujeme u druhého tvrzení. \square

8.2 Rozpoznání rovinných grafů

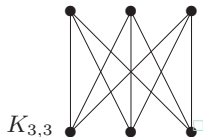
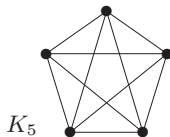
Při praktickém využití rovinných grafů je potřeba umět abstraktně zadaný graf rovinně nakreslit bez křížení hran. Na rozdíl od problému určení barevnosti grafu se naštěstí jedná o efektivně algoritmicky řešitelný problém. □

První algoritmus běžící v lineárním čase byl podán Hopcroftem a Tarjanem 1974 a od té doby se objevilo několik jednodušších algoritmů, ale stále nejsou dostatečně přístupné, abychom je mohli ukázat v omezeném čase na přednášce.

Věta 8.5. *Rozhodnout rovinnost a nalézt příslušné nakreslení daného grafu lze v lineárním čase (vůči počtu vrcholů).*

Místo obecných algoritmů pro rovinné kreslení grafů se zde podíváme na otázku, jak odůvodnit nerovinnost (malého) grafu.

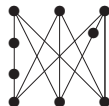
Příklad 8.6. Ukažme, že následující dva grafy, K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.



Při zdůvodnění využijeme znalosti předchozího oddílu. Všimněme si, že graf K_5 má 5 vrcholů a $10 > 3 \cdot 5 - 6$ hran. Podobně graf $K_{3,3}$ má 6 vrcholů a $9 > 2 \cdot 6 - 4$ hran, přitom neobsahuje žádné trojúhelníky. Proto podle Důsledku 8.3 Rovinné kreslení grafu theorem.8.3 žádný z nich není rovinný. \square

Důsledek 8.7. Grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné. \square

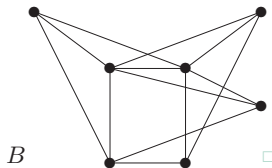
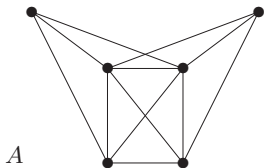
Definice: *Podrozdělením* grafu G rozumíme graf, který vznikne z G rozdělením některých hran novými vrcholy stupně 2.



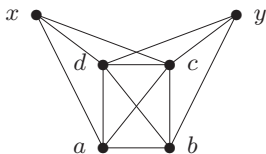
Důležitý abstraktní popis všech rovinných grafů našel K.Kuratowski:

Věta 8.8. *Graf G je rovinný právě když neobsahuje podrozdělení grafů K_5 nebo $K_{3,3}$ jako podgrafy.*

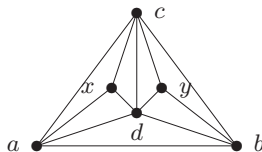
Příklad 8.9. Které z následujících dvou grafů jsou rovinné? Najděte rovinné nakreslení (včetně očíslovaných vrcholů), nebo zdůvodněte nerovinnost grafu.



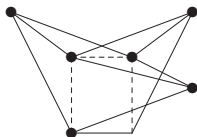
Po chvíli zkoumání určitě přijdeme na to, že graf *A* se dá nakreslit rovinně takto:



→



Graf *B* na druhou stranu rovinný není podle Věty 8.8 Rozpoznání rovinných grafů theorem.8.8, protože je v něm obsaženo podrozdělení grafu $K_{3,3}$, které je ukázáno na tomto obrázku:



Jednoznačnost rovinného nakreslení

Fakt: V 2-souvislém rovinném grafu je každá stěna ohraničená kružnicí.

Díky tomuto faktu lze snadno nadefinovat, že dvě rovinná nakreslení 2-souvislého grafu jsou *ekvivalentní*, pokud jejich stěny tvoří stejné soubory kružnic. \square

Klíčovým výsledkem nyní je:

Lema 8.10. *Kružnice C v 3-souvislém rovinném grafu G je stěnou jeho nakreslení, právě když podgraf $G - V(C)$ je souvislý graf. \square*

Důkaz: V jednom směru, pokud $G' = G - V(C)$ je souvislý, pak podle Jordanovy věty o kružnici leží celý G' uvnitř jedné oblasti C , tudíž druhá oblast C je stěnou v každém nakreslení G .

Naopak \square

\square

Důsledek 8.11. *Každá dvě rovinná nakreslení 3-souvislého grafu jsou ekvivalentní.*

Závěrem si ještě bez důkazu uvedeme, že rovinné grafy vždy mají “pěkné” nakreslení v rovině.

Věta 8.12. *Každý jednoduchý rovinný graf lze nakreslit v rovině (bez křížení hran) tak, že hrany jsou úsečky.*

8.3 Barvení map a rovinných grafů

Vzpomeňme si na již zmiňovaný převod mapy na graf – jedná se vlastně o vytvoření duálního grafu k této mapě. Aby v duálním grafu k mapě nevznikly smyčky, v mapě nesmí žádný stát sousedit sám se sebou, což je přirozený požadavek.

V roce 1976 Appel a Haken, a pak znovu v roce 1993 Robertson, Seymour, Sanders a Thomas, dokázali tuto větu, která rozřešila problém čtyř barev a která je jedním z nejslavnějších výsledků diskrétní matematiky vůbec:

Věta 8.13. *Každý rovinný graf bez smyček lze obarvit 4 barvami.* □

Důkaz této věty je nesmírně složitý (však byl také hledán po více než 100 let a k jeho úplnému provedení je stále třeba počítač), a proto si uvedeme slabší a mnohem jednodušší tvrzení:

Tvrzení 8.14. *Každý rovinný graf bez smyček lze obarvit 6 barvami.
Každý rovinný graf bez smyček a bez trojúhelníků lze obarvit 4 barvami.* □

Důkaz: Podle Důsledku 8.4 Rovinné kreslení grafu theorem.8.4 najdeme v každém podgrafu G vrchol v stupně nejvýše 5, a tudíž je G 5-degenerovaný a obarvíme jej podle Věty 7.5. Druhou část dokážeme obdobně, když nalezneme vrchol stupně ≤ 3 . □

Věta 8.15. Každý rovinný graf bez smyček má *výběrovou* barevnost nejvýše 5. \square

Důkaz (náznak): Poměrně přímočarou indukcí lze dokázat následující zesílené tvrzení:

Nechť rovinný graf G s vnější stěnou ohraničenou kružnicí C má všechny ostatní stěny trojúhelníky. Nechť každý vrchol mimo C má přiřazen seznam 5 barev, na C jsou seznamy 3 barev a jisté dva sousední vrcholy na C mají přímo předepsané (různé) barvy. Pak G lze výběrově obarvit.

.....

\square

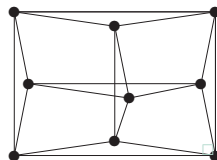
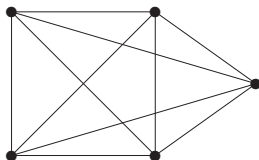
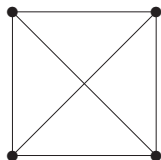
8.4 O průsečíkovém čísle grafů

Třebaže již dobře víme (a umíme algoritmicky rozpoznat), které grafy jsou rovinné, praxe požaduje „hezká nakreslení“ i nerovinných grafů do roviny. Jak tedy na **hezká kreslení** nerovinných grafů do roviny? □

Definice (rozšíření Definice 8.1 Rovinné kreslení grafu theorem.8.1):

Nakreslením grafu G do roviny rozumíme zobrazení, ve kterém jsou vrcholům G přiřazeny různé body roviny a hranám jednoduché křivky spojující koncové vrcholy. Přitom je požadováno, aby se žádné **tři hrany neprotínaly** v jednom bodě (jiném než koncový vrchol), aby žádná **hrana neprocházela** jiným vrcholem a aby se každá protínající dvojice hran skutečně „**křížila**“ (tj. ne jednostranný dotyk).

Příklad 8.16. Podívejme se na následující tři (korektní) nakreslení do roviny. Jsou všechna „optimální“, tj. je počet jejich křížení nejmenší možný?



Snadno vidíme, že první graf lze nakreslit i bez křížení a druhý graf jen s jedním křížením. Naopak třetí graf už s méně kříženími nakreslit nelze. Uměli byste toto dokázat? □

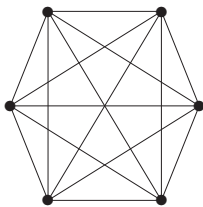
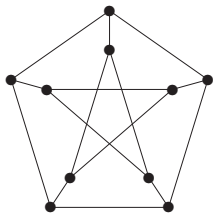
Definice 8.17. Průsečíkové číslo grafu G v rovině

je definováno jako nejmenší možný počet křížení dvojic hran přes všechna korektní nakreslení G do roviny. Značíme $cr(G)$.

Původ problému průsečíkového čísla spadá do doby druhé světové války, kdy P. Turán byl na nucených pracech v cihelně. Jejich úkolem bylo tlačit vozíky s cihlami po kolejnicích a na každé křižovatce s tím měli velké problémy. Proto Turán přemýšlel, jak navrhnout kolejiště lépe, aby minimalizoval počet křížení kolejnic.

V dnešní době je problém průsečíkového čísla velmi důležitý v praktických oblastech VLSI designu [Leighton] a „lidsky čitelné“ vizualizace grafů v různých schématech.

Příklad 8.18. Určeme průsečíková čísla následujících dvou grafů:



□

Asi snadno každý nalezne nakreslení prvního grafu (Petersenův) s pouze dvěma kříženími hran. Jak však dokázat, že jej nelze nakreslit s jedním křížením? Všimněme si, že každá jeho hrana je „ekvivalentní“ s každou jinou. To znamená, že by odstraněním jedné zvolené hrany z Petersenova grafu mělo vytvořit rovinný graf, ale to není pravda. □

Druhý graf K_6 lze nakreslit s 3 kříženími – začněme s kružnicí délky 5 a posledním vrcholem spojeným uvnitř. Zbýlých 5 hran pak už dokážeme dokreslit s vytvořením tří křížení. Zkuste si to! Proč není možných méně křížení? Předpokládejme, že dvě křížení hran postačují, pak bychom vypuštěním dvou dotčených hran získali rovinný graf. Ten by však měl 6 vrcholů a $13 > 3 \cdot 6 - 6$ hran, spor. □

Fakt: Přesné obecné hodnoty průsečíkových čísel nejsou známy ani pro úplné či úplné bipartitní grafy. □

Věta 8.19. *Problém určit, zda průsečíkové číslo $cr(G) \leq k$ pro G a k na vstupu je \mathcal{NP} -úplný. Toto platí dokonce i když G je kubický 3-souvislý graf.*

Zamyslete se sami, proč by problém průsečíkového čísla měl vůbec náležet do třídy \mathcal{NP} , není to tak zřejmé... □

V praxi se ukazuje, že určení průsečíkového čísla je přímo **zoufale těžký** problém, ještě mnohem beznadějnější než třeba barevnost. Snad jediným existujícím „pozitivním“ (i když zcela nepraktickým) algoritmickým výsledkem je následovné:

Věta 8.20. (Grohe) *Pro fixní k lze otestovat, zda $cr(G) \leq k$, v polynomiálním kvadratickém čase vzhledem k počtu vrcholů grafu.*

(2006: Dnes je známo i vylepšení v lineárním čase.) □

Poznámka: Dnes zatím ani nevíme, jak v polynomiálním čase přesně určit průsečíkové číslo grafu, který vznikne z rovinného grafu přidáním jedné hrany! (Umíme jen aproximovat s faktorem daným největším stupněm grafu.)