9 Krátce o průnikových grafech

Od této lekce teorie grafů se zaměříme lehce na několik vybraných partií blízkých autorovu srdci.

Naším prvním výběrem jsou *průnikové grafy*, což jsou grafy, jejichž vrcholy jsou jisté množiny a hrany spojují pronikající se dvojice. Pochopitelně hlavní motivací studia těchto grafů je jejich geometrická názornost a aplikovatelnost v reálných situacích.

Stručný přehled lekce

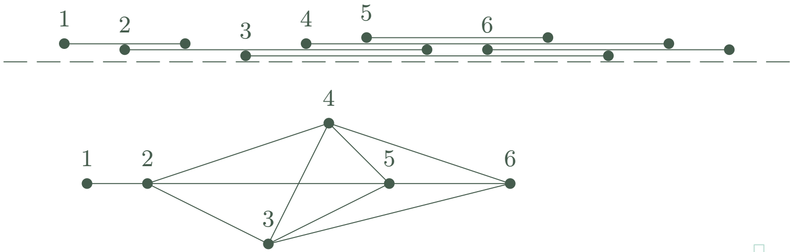
- Co jsou průnikové grafy, příklad intervalových grafů.
- Chordální grafy a jejich vlastnosti.
- Některé další třídy průnikových grafů.
- Reprezentace grafů křivkami a úsečkami.

9.1 Intervalové a chordální grafy

Definice: Mějme množinový systém $\mathcal{M}$. Jeho *průnikovým grafem* nazveme graf $I_{\mathcal{M}}$ na vrcholech $V = \mathcal{M}$ s množinou hran $E = \{A, B \in \mathcal{M} : A \cap B \neq \emptyset\}$. □

Intervalové grafy

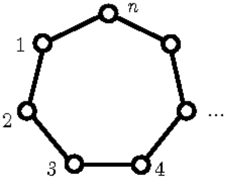
Jedná se o průnikové grafy intervalů na přímce (zkratka INT).



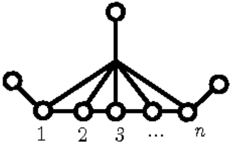
□

Fakt: Každá kružnice délky větší než tři v intervalovém grafu má chordu.

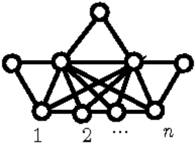
- Intervalové grafy lze popsat následujícícmi *zakázanými indukovanými podgrafy*:



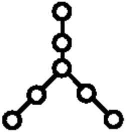
C_n; $n \geq 4$



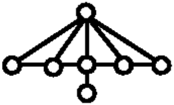
K_n; $n \geq 2$



L_n; $n \geq 1$



B_1



B_2

- Graf je intervalový, právě když neobsahuje indukovanou C_4 a jeho doplněk má tranzitivní orientaci.

- *Jednotkové intervalové* grafy jsou ty mající intervalovou reprezentaci se všemi intervaly délky 1. Jsou to právě ty intervalové grafy bez indukovaného $K_{1,3}$.

Chordální grafy

Definice: Graf G je *chordální* pokud neobsahuje žádnou indukovanou kružnici delší než tři. □

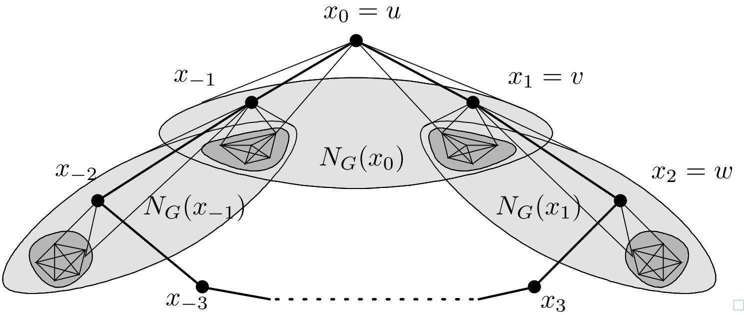
Věta 9.1. *Každý chordální graf G obsahuje simpliciální vrchol, tj. vrchol s takový, že všichni sousedé s tvoří kliku v G.*

Důkaz: Dokazujeme posloupnost tří snadných tvrzení o chordálním grafu G.

Řekneme, že graf H je *bisimpliciální*, pokud H je úplný nebo H obsahuje dva nespojené simpliciální vrcholy. □

1. Pro každou kružnici C a hranu e v G existuje hrana f taková, že $C \setminus \{e\} \cup \{f\}$ obsahuje trojúhelník.
2. Nechť uv je hranou G a sousedé v tvoří (indukují) bisimpliciální podgraf. Pokud v je simpliciální mezi sousedy u, ale ne v celém G, pak existuje vrchol w spojený s v a nespojený s u takový, že w je simpliciální mezi sousedy v.
3. Pokud G není bisimpliciální, ale sousedé každého jeho vrcholu indukují bisimpliciální podgraf, pak G obsahuje kružnici C odporující bodu 1.
4. Tudíž G je bisimpliciální.

□



Simpliciální dekompozice... (postupně odebíráme simpliciální vrcholy)

Fakt: Simpliciální dekompozici lze využít k efektivnímu rozpoznávání intervalových i chordálních grafů.

Věta 9.2. *Graf G je chordální právě když G je průnikovým grafem podstromů v nějakém stromě.*

Důkaz indukcí podle počtu vrcholů – odebíráme simpliciální... □

9.2 Třídy průnikových grafů

Zde si uvedeme jen stručný neformální přehled některých typů průnikových grafů, které jsou studovány.

- *Hranový* graf je průnikovým grafem hran v běžném grafu.
- *Kruhově-intervalové* grafy (CA) jsou průnikovými grafy intervalů na kružnici.
- *Kružnicové* grafy (CIR) jsou průnikovými grafy tětiv v kružnici.
- *Diskové* grafy (DISC) jsou průnikovými grafy kruhů v rovině. Lze uvažovat také jen jednotkové kruhy (unit-DISC).
- *Kvádrové* grafy (BOX) jsou průnikovými grafy kvádrů ve dvou, třech či více dimenzích, se stěnami rovnoběžnými se souřadnicemi.
- *Dotykové* . . . grafy jsou variantou průnikových grafů geometrických objektů, ve které se požaduje, aby vnitřky objektů byly po dvou disjunktní.

Věta 9.3. *Graf je rovinný právě když je dotykovým grafem kruhů v rovině.*

- Jiné, tzv. *viditelnostní* grafy nejsou definovány průniky objektů, ale jejich vzájemnou viditelností v geometrickém světě.

9.3 Průnikové grafy křivek a úseček

Niťovými grafy krátce nazveme průnikové grafy křivek v rovině.

Tvrzení 9.4. *Existují grafy, které jsou niťové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje dvojici křivek majících exponenciálně mnoho (k počtu vrcholů) vzájemných průsečíků.* □

Není tedy divu, že v následující větě bylo tou mnohem obtížnější částí dokázat příslušnost problému do třídy $\mathcal{NP}$ [Kratochvíl + Pelsmajer, Schaeffer, Štefankovič].

Věta 9.5. *Problém poznat, zda daný graf je niťový, je $\mathcal{NP}$-úplný.* □

Velmi podobně je definována třída *segmentových grafů*, což jsou průnikové grafy úseček v rovině. Opět je dokázáno, že jejich rozpoznávání je $\mathcal{NP}$-těžké, ale příslušnost problému do třídy $\mathcal{NP}$ je tentokrát otevřená kvůli následujícímu:

Tvrzení 9.6. *Existují grafy, které jsou segmentové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje úsečku, k zápisu jejíž souřadnic je třeba exponenciálně mnoho (k počtu vrcholů) bitů.* □

Hypotéza 9.7. Je každý rovinný graf segmentovým grafem?

“Zápalkové” grafy

Tímto pojmem nazýváme průnikové grafy úseček v rovině, přičemž dodatečnou podmínkou je, že žádné dvě úsečky se neprotínají ve svých vnitřních bodech. (Jedná se tedy o *dotykové grafy úseček*.)

Věta 9.8. *Graf je zápalkovým grafem s horizontálními a vertikálními „zápalkami“, právě když se jedná o rovinný bipartitní graf.* □

Zajímavá podotázka se týká toho, zda povolit „dvoustranné“ dotyky zápalek nebo ne.

. . . .

Věta 9.9. *Problém poznat, zda daný graf je zápalkový, je $\mathcal{NP}$-úplný.* □