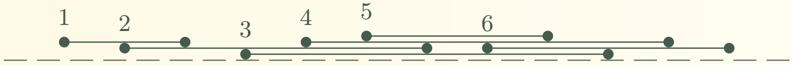
9 Krátce o průnikových grafech

Od této lekce teorie grafů se zaměříme lehce na několik vybraných partií teorie grafů blízkých autorovu srdci...

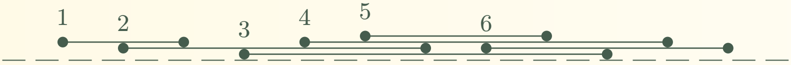
Naším prvním výběrem jsou *průnikové grafy*, což jsou grafy, jejichž vrcholy jsou jisté množiny a hrany spojují pronikající se dvojice. Pochopitelně hlavní motivací studia těchto grafů je jejich geometrická názornost a aplikovatelnost v reálných situacích.



9 Krátce o průnikových grafech

Od této lekce teorie grafů se zaměříme lehce na několik vybraných partií teorie grafů blízkých autorovu srdci...

Naším prvním výběrem jsou *průnikové grafy*, což jsou grafy, jejichž vrcholy jsou jisté množiny a hrany spojují pronikající se dvojice. Pochopitelně hlavní motivací studia těchto grafů je jejich geometrická názornost a aplikovatelnost v reálných situacích.



Stručný přehled lekce

- Co jsou průnikové grafy, příklad intervalových grafů.
- Chordální grafy a jejich vlastnosti.
- Některé další třídy průnikových grafů.
- Reprezentace grafů křivkami a úsečkami.

9.1 Intervalové a chordální grafy

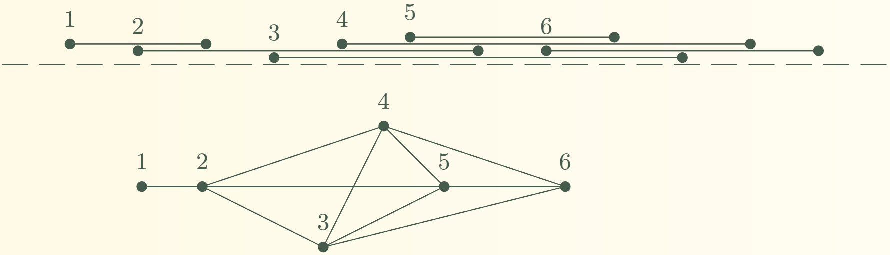
Definice 9.1. **Průnikovým grafem** množinového systému $\mathcal{M}$ nazveme graf $I_{\mathcal{M}}$ na vrch. $V = \mathcal{M}$ s množinou hran $E = \{A, B \in \mathcal{M} : A \cap B \neq \emptyset\}$.

9.1 Intervalové a chordální grafy

Definice 9.1. **Průnikovým grafem** množinového systému $\mathcal{M}$ nazveme graf $I_{\mathcal{M}}$ na vrch. $V = \mathcal{M}$ s množinou hran $E = \{A, B \in \mathcal{M} : A \cap B \neq \emptyset\}$.

Intervalové grafy

Podívejme se na průnikové grafy intervalů na přímce – *intervalové grafy* (zkratka INT).

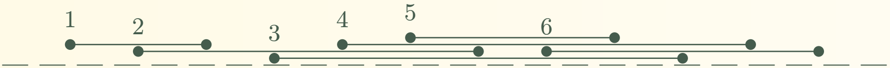


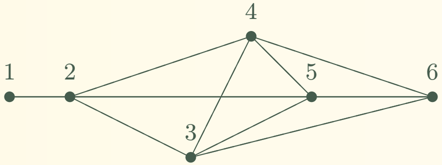
9.1 Intervalové a chordální grafy

Definice 9.1. **Průnikovým grafem** množinového systému $\mathcal{M}$ nazveme graf $I_{\mathcal{M}}$ na vrch. $V = \mathcal{M}$ s množinou hran $E = \{A, B \in \mathcal{M} : A \cap B \neq \emptyset\}$.

Intervalové grafy

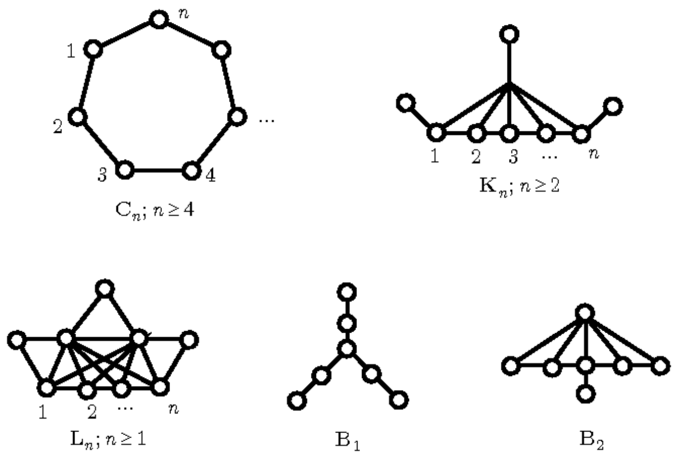
Podívejme se na průnikové grafy intervalů na přímce – *intervalové grafy* (zkratka INT).



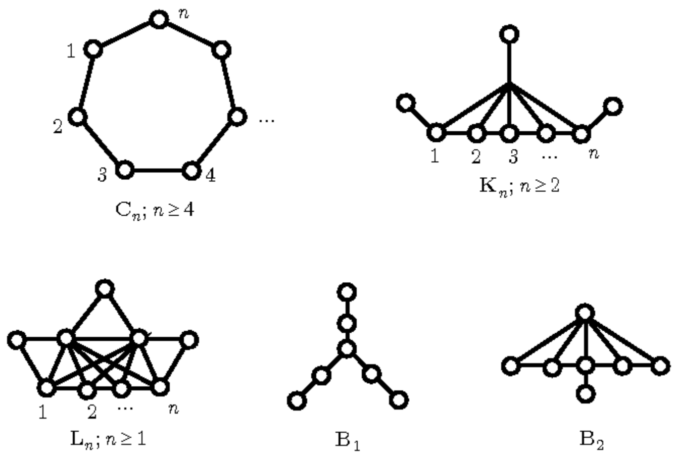


Fakt: Každá kružnice délky větší než tři v intervalovém grafu má chordu.

- Intervalové grafy lze popsat následujícícmi *zakázanými indukovanými podgrafy*:

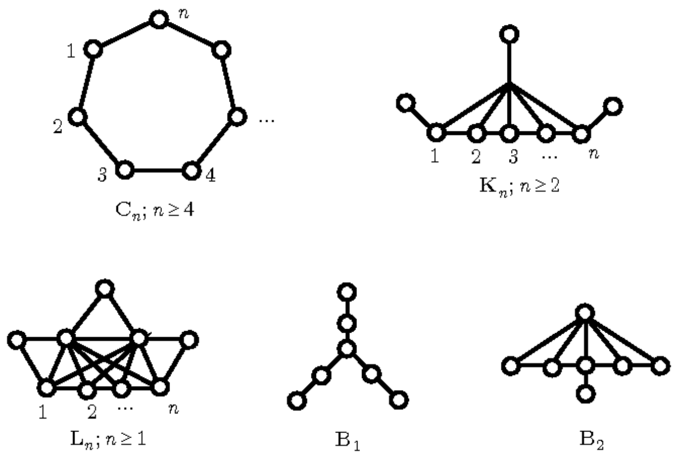


- Intervalové grafy lze popsat následujícícmi *zakázanými indukovanými podgrafy*:



- Graf je intervalový, právě když neobsahuje indukovanou C_4 a jeho doplněk má tranzitivní orientaci.

- Intervalové grafy lze popsat následujícícmi *zakázanými indukovanými podgrafy*:



- Graf je intervalový, právě když neobsahuje indukovanou C_4 a jeho doplněk má tranzitivní orientaci.

- *Jednotkové intervalové* grafy jsou ty mající intervalovou reprezentaci se všemi intervaly délky 1. Jsou to právě ty intervalové grafy bez indukovaného $K_{1,3}$.

Chordální grafy

Definice: Graf G je *chordální* pokud neobsahuje indukovanou kružnici delší než tři.

Chordální grafy

Definice: Graf G je *chordální* pokud neobsahuje indukovanou kružnici delší než tři.

Věta 9.2. *Každý chordální graf G obsahuje simpliciální vrchol, tj. vrchol s takový, že všichni sousedé s tvoří kliku v G.*

Chordální grafy

Definice: Graf G je *chordální* pokud neobsahuje indukovanou kružnici delší než tři.

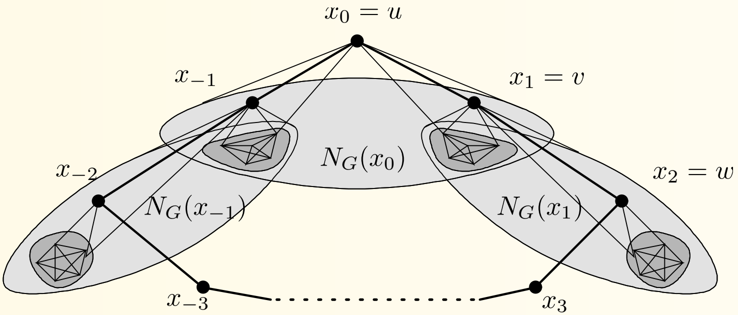
Věta 9.2. *Každý chordální graf G obsahuje simpliciální vrchol, tj. vrchol s takový, že všichni sousedé s tvoří kliku v G.*

Důkaz: Dokazujeme posloupnost tří snadných tvrzení o chordálním grafu G.

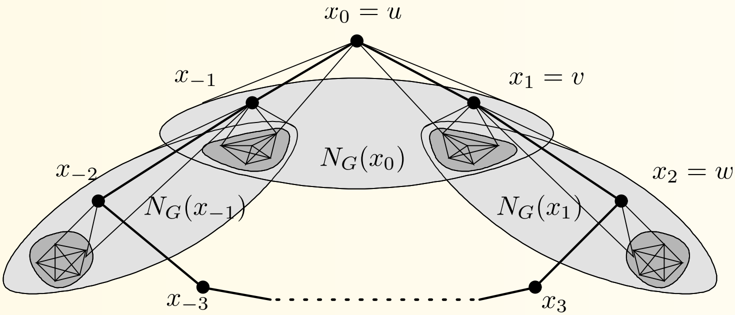
Řekneme, že graf H je *bisimpliciální*, pokud H je úplný nebo H obsahuje dva nespojené simpliciální vrcholy.

1. Pro každou kružnici C a hranu e v G existuje hrana f taková, že $C \setminus \{e\} \cup \{f\}$ obsahuje trojúhelník.

1. Pro každou kružnici C a hranu e v G existuje hrana f taková, že $C \setminus \{e\} \cup \{f\}$ obsahuje trojúhelník.
2. Nechť uv je hranou G a sousedé v tvoří (indukují) bisimpliciální podgraf. Pokud v je simpliciální mezi sousedy u, ale ne v celém G, pak existuje vrchol w spojený s v a nespojený s u takový, že w je simpliciální mezi sousedy v.
3. Pokud G není bisimpliciální, ale sousedé každého jeho vrcholu indukují bisimpliciální podgraf, pak G obsahuje kružnici C odporující bodu 1.
4. Tudíž G je bisimpliciální.



1. Pro každou kružnici C a hranu e v G existuje hrana f taková, že $C \setminus \{e\} \cup \{f\}$ obsahuje trojúhelník.
2. Nechť uv je hranou G a sousedé v tvoří (indukují) bisimpliciální podgraf. Pokud v je simpliciální mezi sousedy u, ale ne v celém G, pak existuje vrchol w spojený s v a nespojený s u takový, že w je simpliciální mezi sousedy v.
3. Pokud G není bisimpliciální, ale sousedé každého jeho vrcholu indukují bisimpliciální podgraf, pak G obsahuje kružnici C odporující bodu 1.
4. Tudíž G je bisimpliciální.



$\square$

Přímým důsledkem Věty 9.2 je existence *simpliciální dekompozice* libovolného chordálního grafu; jedná se o seřazení jeho vrcholů do posloupnosti $v_1, v_2, \dots, v_n$ tak, že každé v_i, $i = 2, \dots, n$, je simpliciální v podgrafu indukovaném na $v_1, \dots, v_{i-1}$.

Fakt: Simpliciální dekompozici lze využít k efektivnímu rozpoznávání intervalových i chordálních grafů.

Přímým důsledkem Věty 9.2 je existence *simpliciální dekompozice* libovolného chordálního grafu; jedná se o seřazení jeho vrcholů do posloupnosti $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, že každé v_i, $i = 2, \ldots, n$, je simpliciální v podgrafu indukovaném na $v_1, \ldots, v_{i-1}$.

Fakt: Simpliciální dekompozici lze využít k efektivnímu rozpoznávání intervalových i chordálních grafů.

Věta 9.3. *Graf G je chordální právě když G je průnikovým grafem podstromů ve vhodném stromě.*

Přímým důsledkem Věty 9.2 je existence *simpliciální dekompozice* libovolného chordálního grafu; jedná se o seřazení jeho vrcholů do posloupnosti $v_1, v_2, \dots, v_n$ tak, že každé v_i, $i = 2, \dots, n$, je simpliciální v podgrafu indukovaném na $v_1, \dots, v_{i-1}$.

Fakt: Simpliciální dekompozici lze využít k efektivnímu rozpoznávání intervalových i chordálních grafů.

Věta 9.3. *Graf G je chordální právě když G je průnikovým grafem podstromů ve vhodném stromě.*

Důkaz (náznak): Povedeme indukcí podle počtu vrcholů G. Báze pro jeden vrchol je zřejmá. Navíc zřejmě každý průnikový graf podstromů v nějakém stromě musí být chordální.

Jinak nechť v je simpliciální vrchol chordálního grafu G. Indukcí sestrojíme průnikovou reprezentaci také chordálního grafu $G - v$. Pak sousedé v tvoří kliku, tudíž v průnikové reprezentaci grafu $G - v$ se v některém uzlu stromu všichni překrývají. Na tomto místě přidáme nový list stromu, který bude reprezentovat v a bude překryt reprezentanty sousedů v. $\square$

9.2 Třídy průnikových grafů

Zde si uvedeme jen stručný neformální přehled některých typů průnikových grafů, které jsou běžně studovány.

- *Hranový* graf je průnikovým grafem hran v běžném grafu.

9.2 Třídy průnikových grafů

Zde si uvedeme jen stručný neformální přehled některých typů průnikových grafů, které jsou běžně studovány.

- *Hranový* graf je průnikovým grafem hran v běžném grafu.
- *Kruhově-intervalové* grafy (CA) jsou průnikovými grafy intervalů na kružnici.

9.2 Třídy průnikových grafů

Zde si uvedeme jen stručný neformální přehled některých typů průnikových grafů, které jsou běžně studovány.

- *Hranový* graf je průnikovým grafem hran v běžném grafu.
- *Kruhově-intervalové* grafy (CA) jsou průnikovými grafy intervalů na kružnici.
- *Kružnicové* grafy (CIR) jsou průnikovými grafy tětiv v kružnici.

9.2 Třídy průnikových grafů

Zde si uvedeme jen stručný neformální přehled některých typů průnikových grafů, které jsou běžně studovány.

- *Hranový* graf je průnikovým grafem hran v běžném grafu.
- *Kruhově-intervalové* grafy (CA) jsou průnikovými grafy intervalů na kružnici.
- *Kružnicové* grafy (CIR) jsou průnikovými grafy tětiv v kružnici.
- *Diskové* grafy (DISC) jsou průnikovými grafy kruhů v rovině. Lze uvažovat také jen jednotkové kruhy (unit-DISC).

9.2 Třídy průnikových grafů

Zde si uvedeme jen stručný neformální přehled některých typů průnikových grafů, které jsou běžně studovány.

- *Hranový* graf je průnikovým grafem hran v běžném grafu.
- *Kruhově-intervalové* grafy (CA) jsou průnikovými grafy intervalů na kružnici.
- *Kružnicové* grafy (CIR) jsou průnikovými grafy tětiv v kružnici.
- *Diskové* grafy (DISC) jsou průnikovými grafy kruhů v rovině. Lze uvažovat také jen jednotkové kruhy (unit-DISC).
- *Kvádrové* grafy (BOX) jsou průnikovými grafy kvádrů ve dvou, třech či více dimenzích, se stěnami rovnoběžnými se souřadnicemi.

9.2 Třídy průnikových grafů

Zde si uvedeme jen stručný neformální přehled některých typů průnikových grafů, které jsou běžně studovány.

- *Hranový* graf je průnikovým grafem hran v běžném grafu.
- *Kruhově-intervalové* grafy (CA) jsou průnikovými grafy intervalů na kružnici.
- *Kružnicové* grafy (CIR) jsou průnikovými grafy tětiv v kružnici.
- *Diskové* grafy (DISC) jsou průnikovými grafy kruhů v rovině. Lze uvažovat také jen jednotkové kruhy (unit-DISC).
- *Kvádrové* grafy (BOX) jsou průnikovými grafy kvádrů ve dvou, třech či více dimenzích, se stěnami rovnoběžnými se souřadnicemi.
- *Dotykové* . . . grafy jsou variantou průnikových grafů geometrických objektů, ve které se požaduje, aby vnitřky objektů byly po dvou disjunktní.

Věta 9.4. *Graf je rovinný právě když je dotykovým grafem kruhů v rovině.*

9.2 Třídy průnikových grafů

Zde si uvedeme jen stručný neformální přehled některých typů průnikových grafů, které jsou běžně studovány.

- *Hranový* graf je průnikovým grafem hran v běžném grafu.
- *Kruhově-intervalové* grafy (CA) jsou průnikovými grafy intervalů na kružnici.
- *Kružnicové* grafy (CIR) jsou průnikovými grafy tětiv v kružnici.
- *Diskové* grafy (DISC) jsou průnikovými grafy kruhů v rovině. Lze uvažovat také jen jednotkové kruhy (unit-DISC).
- *Kvádrové* grafy (BOX) jsou průnikovými grafy kvádrů ve dvou, třech či více dimenzích, se stěnami rovnoběžnými se souřadnicemi.
- *Dotykové* ... grafy jsou variantou průnikových grafů geometrických objektů, ve které se požaduje, aby vnitřky objektů byly po dvou disjunktní.

Věta 9.4. *Graf je rovinný právě když je dotykovým grafem kruhů v rovině.*

- Jiné, tzv. *viditelnostní* grafy nejsou definovány průniky objektů, ale jejich vzájemnou viditelností v geometrickém světě.

9.3 Průnikové grafy křivek a úseček

Definice: *Niťovými grafy* nazveme průnikové grafy (obyčejných) křivek v rovině.

9.3 Průnikové grafy křivek a úseček

Definice: *Niťovými grafy* nazveme průnikové grafy (obyčejných) křivek v rovině.

Tvrzení 9.5. *Každý rovinný graf je niťový.*

Tvrzení 9.6. *Existují grafy, které jsou niťové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje dvojici křivek majících exponenciálně mnoho vzájemných průsečíků.*

9.3 Průnikové grafy křivek a úseček

Definice: *Niťovými grafy* nazveme průnikové grafy (obyčejných) křivek v rovině.

Tvrzení 9.5. *Každý rovinný graf je niťový.*

Tvrzení 9.6. *Existují grafy, které jsou niťové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje dvojici křivek majících exponenciálně mnoho vzájemných průsečíků.*

Co se týče algoritmické složitosti, je poznání niťových grafů velmi obtížné. Vhledem k předchozímu tvrzení je však mnohem obtížnější dokázat příslušnost problému do třídy $\mathcal{NP}$ [Kratochvíl / Pelsmajer, Schaeffer, Štefankovič].

Věta 9.7. *Problém rozpoznat, zda daný graf je niťový, je* $\mathcal{NP}$*-úplný.*

9.3 Průnikové grafy křivek a úseček

Definice: *Niťovými grafy* nazveme průnikové grafy (obyčejných) křivek v rovině.

Tvrzení 9.5. *Každý rovinný graf je niťový.*

Tvrzení 9.6. *Existují grafy, které jsou niťové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje dvojici křivek majících exponenciálně mnoho vzájemných průsečíků.*

Co se týče algoritmické složitosti, je poznání niťových grafů velmi obtížné. Vhledem k předchozímu tvrzení je však mnohem obtížnější dokázat příslušnost problému do třídy $\mathcal{NP}$ [Kratochvíl / Pelsmajer, Schaeffer, Štefankovič].

Věta 9.7. *Problém rozpoznat, zda daný graf je niťový, je $\mathcal{NP}$-úplný.*

Velmi podobně je definována třída *úsečkových grafů*, což jsou průnikové grafy úseček v rovině. Opět je dokázáno, že jejich rozpoznávání je $\mathcal{NP}$-těžké [Kratochvíl], ale příslušnost problému do třídy $\mathcal{NP}$ zůstává otevřená kvůli následujícímu.

Tvrzení 9.8. *Existují grafy, které jsou úsečkové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje úsečku, k zápisu jejíž souřadnic je třeba exponenciálně mnoho bitů.*

9.3 Průnikové grafy křivek a úseček

Definice: *Niťovými grafy* nazveme průnikové grafy (obyčejných) křivek v rovině.

Tvrzení 9.5. *Každý rovinný graf je niťový.*

Tvrzení 9.6. *Existují grafy, které jsou niťové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje dvojici křivek majících exponenciálně mnoho vzájemných průsečíků.*

Co se týče algoritmické složitosti, je poznání niťových grafů velmi obtížné. Vhledem k předchozímu tvrzení je však mnohem obtížnější dokázat příslušnost problému do třídy $\mathcal{NP}$ [Kratochvíl / Pelsmajer, Schaeffer, Štefankovič].

Věta 9.7. *Problém rozpoznat, zda daný graf je niťový, je $\mathcal{NP}$-úplný.*

Velmi podobně je definována třída *úsečkových grafů*, což jsou průnikové grafy úseček v rovině. Opět je dokázáno, že jejich rozpoznávání je $\mathcal{NP}$-těžké [Kratochvíl], ale příslušnost problému do třídy $\mathcal{NP}$ zůstává otevřená kvůli následujícímu.

Tvrzení 9.8. *Existují grafy, které jsou úsečkové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje úsečku, k zápisu jejíž souřadnic je třeba exponenciálně mnoho bitů.*

Hypotéza 9.9. Je každý rovinný graf úsečkovým grafem?

„Zápalkové“ grafy

Výše jsem zmínili obecný pojem geometrických dotykových grafů, nyní se z tohoto úhlu pohledu podíváme na *dotykové grafy úseček* v rovině:
Tímto pojmem nazýváme ty průnikové grafy úseček v rovině, u nichž je dodatečnou podmínkou, že žádné dvě úsečky se neprotínají ve svých vnitřních bodech.
(Jakoby „zápalkové“ reprezentace v rovině.)

Věta 9.10. *Graf je dotykovým grafem disjunktních horizontálních a disjunktních vertikálních úseček, právě když se jedná o rovinný bipartitní graf.*

„Zápalkové“ grafy

Výše jsem zmínili obecný pojem geometrických dotykových grafů, nyní se z tohoto úhlu pohledu podíváme na *dotykové grafy úseček* v rovině:
Tímto pojmem nazýváme ty průnikové grafy úseček v rovině, u nichž je dodatečnou podmínkou, že žádné dvě úsečky se neprotínají ve svých vnitřních bodech.
(Jakoby „zápalkové“ reprezentace v rovině.)

Věta 9.10. *Graf je dotykovým grafem disjunktních horizontálních a disjunktních vertikálních úseček, právě když se jedná o rovinný bipartitní graf.*

Opět se jedná o výpočetně obtížnou třídu grafů [PH].

Věta 9.11. *Problém rozpoznat dotykový graf úseček je $\mathcal{NP}$-úplný.*

„Zápalkové“ grafy

Výše jsem zmínili obecný pojem geometrických dotykových grafů, nyní se z tohoto úhlu pohledu podíváme na *dotykové grafy úseček* v rovině:
Tímto pojmem nazýváme ty průnikové grafy úseček v rovině, u nichž je dodatečnou podmínkou, že žádné dvě úsečky se neprotínají ve svých vnitřních bodech.
(Jakoby „zápalkové“ reprezentace v rovině.)

Věta 9.10. *Graf je dotykovým grafem disjunktních horizontálních a disjunktních vertikálních úseček, právě když se jedná o rovinný bipartitní graf.*

Opět se jedná o výpočetně obtížnou třídu grafů [PH].

Věta 9.11. *Problém rozpoznat dotykový graf úseček je $\mathcal{NP}$-úplný.*

U „zápalkových“ grafů je možno dále zkoumat několik dodatečných omezení.

– Povolíme „oboustranné“ dotyky úseček, nebo *jen jednostranné*?

„Zápalkové“ grafy

Výše jsem zmínili obecný pojem geometrických dotykových grafů, nyní se z tohoto úhlu pohledu podíváme na *dotykové grafy úseček* v rovině:
Tímto pojmem nazýváme ty průnikové grafy úseček v rovině, u nichž je dodatečnou podmínkou, že žádné dvě úsečky se neprotínají ve svých vnitřních bodech.
(Jakoby „zápalkové“ reprezentace v rovině.)

Věta 9.10. *Graf je dotykovým grafem disjunktních horizontálních a disjunktních vertikálních úseček, právě když se jedná o rovinný bipartitní graf.*

Opět se jedná o výpočetně obtížnou třídu grafů [PH].

Věta 9.11. *Problém rozpoznat dotykový graf úseček je $\mathcal{NP}$-úplný.*

U „zápalkových“ grafů je možno dále zkoumat několik dodatečných omezení.

– Povolíme „oboustranné“ dotyky úseček, nebo *jen jednostranné*?

– Kolika úsečkám dovolíme dotyk v jednom bodě? $\rightarrow$ *k-dotykové* grafy

„Zápalkové“ grafy

Výše jsem zmínili obecný pojem geometrických dotykových grafů, nyní se z tohoto úhlu pohledu podíváme na *dotykové grafy úseček* v rovině:
Tímto pojmem nazýváme ty průnikové grafy úseček v rovině, u nichž je dodatečnou podmínkou, že žádné dvě úsečky se neprotínají ve svých vnitřních bodech.
(Jakoby „zápalkové“ reprezentace v rovině.)

Věta 9.10. *Graf je dotykovým grafem disjunktních horizontálních a disjunktních vertikálních úseček, právě když se jedná o rovinný bipartitní graf.*

Opět se jedná o výpočetně obtížnou třídu grafů [PH].

Věta 9.11. *Problém rozpoznat dotykový graf úseček je $\mathcal{NP}$-úplný.*

U „zápalkových“ grafů je možno dále zkoumat několik dodatečných omezení.

- Povolíme „oboustranné“ dotyky úseček, nebo *jen jednostranné*?
- Kolika úsečkám dovolíme dotyk v jednom bodě? $\rightarrow$ *k-dotykové* grafy
- Co když zobecníme úsečky na obyčejné křivky v rovině?

Dá se ukázat, že třídy dotykových grafů popsané předchozími body jsou různé a obtížnost jejich rozpoznání zůstává, až na triviální případy. . .