

# MB101 – 1. demonstrovaná cvičení

## Důkazy matematických tvrzení

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

17.9. 2007

# Plán přednášky

- 1 Typy matematických důkazů
  - Matematická indukce
  - Důkaz sporem
- 2 Sumy
- 3 Počítání s procenty
- 4 Zlehka kombinatoriky

# Princip matematické indukce

Mějme tvrzení  $T(n)$  závislé na přirozeném čísle  $n$ . Pokud dokážeme

- 1 Pro nějaké přirozené  $k_0$  platí tvrzení  $T(k_0)$ ,
- 2 Pro libovolné přirozené  $k \geq k_0$  platí implikace  $T(k) \Rightarrow T(k + 1)$ ,

pak tvrzení  $T(n)$  platí pro libovolné přirozené  $n \geq k_0$ .

# Princip matematické indukce

Mějme tvrzení  $T(n)$  závislé na přirozeném číslu  $n$ . Pokud dokážeme

- 1 Pro nějaké přirozené  $k_0$  platí tvrzení  $T(k_0)$ ,
- 2 Pro libovolné přirozené  $k \geq k_0$  platí implikace  $T(k) \Rightarrow T(k + 1)$ ,

pak tvrzení  $T(n)$  platí pro libovolné přirozené  $n \geq k_0$ .

**Poznámka.** V bodě dva můžeme dokazovat i „slabší“ implikaci  $(T_{k_0} \wedge T_{k_0+1} \wedge \cdots \wedge T_k) \Rightarrow T(k + 1)$ .

Dokažte následující tvrzení:

1

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Dokažte následující tvrzení:

①

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

② Na kolik nejvíce částí dělí rovinu  $n$  přímek?



Dokažte následující tvrzení:

1

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- 2 Na kolik nejvíce částí dělí rovinu  $n$  přímek?
- 3 Všechna přirozená čísla jsou si rovna.

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel.



# Plán přednášky

- 1 Typy matematických důkazů
  - Matematická indukce
  - Důkaz sporem
- 2 Sumy
- 3 Počítání s procenty
- 4 Zlehka kombinatoriky

# Sumy

Aritmetická řada

$$\sum_{i=1}^n ik = k \frac{n(n+1)}{2}$$

# Sumy

Aritmetická řada

$$\sum_{i=1}^n ik = k \frac{n(n+1)}{2}$$

Geometrická řada ( $q \neq 0, 1$ ):

$$\sum_{i=0}^n q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

① Odvoďte přímo vztah  $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

① Odvoďte přímo vztah  $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

# Plán přednášky

- 1 Typy matematických důkazů
  - Matematická indukce
  - Důkaz sporem
- 2 Sumy
- 3 Počítání s procenty
- 4 Zlehka kombinatoriky

**Příklad** *Mirek si chce koupit nové auto. Auto stojí 300 000 Kč. Mirek by chtěl auto koupit na měsíční splátky. Prodávající společnost mu nabízí půjčku na koupi auta s ročním úrokovou mírou 6%. Mirek by chtěl auto splatit za tři roky. Jak vysoká bude měsíční splátka? (první splátku zaplatí po měsíci od koupě)*

# Plán přednášky

- 1 Typy matematických důkazů
  - Matematická indukce
  - Důkaz sporem
- 2 Sumy
- 3 Počítání s procenty
- 4 Zlehka kombinatoriky



Uvažujme slova složená pouze z písmen  $A$  a  $B$ . Kolik existuje slov délky  $n$  se sudým počtem písmen  $A$ ?

**Příklad** *Kolika různými způsoby může vypadat pořadí týmů v tabulce hokejové extraligy?*

**Příklad** *Kolika různými způsoby může vypadat pořadí týmů v tabulce hokejové extraligy?*

**Příklad** *Kolika způsoby lze vybrat z osmi obyvatel domu tříčlenný domovní výbor, který se skládá z předsedy, místopředsedy a pokladníka?*

**Příklad** *Kolika různými způsoby může vypadat pořadí týmů v tabulce hokejové extraligy?*

**Příklad** *Kolika způsoby lze vybrat z osmi obyvatel domu tříčlenný domovní výbor, který se skládá z předsedy, místopředsedy a pokladníka?*

**Příklad** *Kolika způsoby můžeme vytvořit čtyři smíšené páry z deseti chlapců a osmi dívek?*