MB101 – 10. demonstrovaná cvičení
Vlastní čísla a vlastní hodnoty

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

19.11. 2007

Plán přednášky

Příklad 1. *Určete nějakou bázi jádra a obrazu lineárního zobrazení* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *daného ve standardní bázi jako* $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 - 3x_2 + x_3, 5x_2 + x_3)$.

Příklad 1. *Určete nějakou bázi jádra a obrazu lineárního zobrazení* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, daného ve standardní bázi jako* $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 - 3x_2 + x_3, 5x_2 + x_3)$.

Řešení. Pro určnení jádra řešíme soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_2 + x_3 &= 0, \end{aligned}$$

ta má řešení $\langle(4, 1, -5)\rangle$. Uvedený vektor zadává rovněž bázi jádra. Bázi obrazu získáme např. zobrazením vektorů doplňujících bázi jádra na bázi celého prostoru, tedy např. vektorů $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, dostáváme bázi $((1, 2, 0), (1, -3, 5))$ $\square$

Příklad 2. *Určete matici lineárního zobrazení z příkladu 1. v bázi* $((1,0,1),(1,1,-1),(-1,-1,-1))$.

Příklad 2. *Určete matici lineárního zobrazení z příkladu 1. v bázi* $((1,0,1),(1,1,-1),(-1,-1,-1))$.

Řešení Matice přechodu ze dané báze ke standardní je

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

zpět potom

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matice zobrazení ve standardní bázi je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice zobrazení v dané bázi je potom

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Příklad 3. *Určete matici rotace v kladném smyslu kolem osy y (kartézského souřadného systému v $\mathbb{R}^3$) v bázi dané vektory* $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Příklad 3. *Určete matici rotace v kladném smyslu kolem osy y (kartézského souřadného systému v* $\mathbb{R}^3$*) v bázi dané vektory* $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Řešení.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(\varphi) + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\cos(\varphi) + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\varphi) \\ -\frac{1}{2}\cos(\varphi) + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cos(\varphi) + \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\varphi) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\varphi) & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$\square$

Plán přednášky

Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Najděte ortonormální bázi prostoru $V \subset \mathbb{R}^4$,
$V = \langle (0,1,1,1), (1,2,1,1), (2,1,1,1) \rangle$.

Určete matici zrcadlení v $\mathbb{R}^3$ podle roviny jdoucí počátkem a kolmé na vektor $(1, 2, 1)$.

Určete průnik podprostrorů $V_1 \cap V_2 \subset \mathbb{R}^4$, kde
$V_1 = \langle (0, 1, -1, 1), (1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0) \rangle$ a
$V_2 = \langle (1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 0) \rangle$.