$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_{n+3} = 4x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n - 4n$$

1, Řešme zhomogenizovanou rci

$$x_{n+3} = 4x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n$$

$$x^3 = 4x^2 - x - 6$$

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

	1	-4	1	6
-1	1	-5	6	0

$$(x+1)(x^2 - 5x + 6) =$$

$$= (x+1)(x-2)(x-3) = 0$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$$

Řešením dané homogenní dif. rce je vekt. prostor posloupnosti tvaru $a\cdot(-1)^n + b\cdot(2)^n + c\cdot 3^n$, $a,b,c\in\mathbb{R}$

$-4n$

$\Rightarrow$ Řešení předpokládáme ve tvaru $kn+l$, $k,l\in\mathbb{R}$:

$$k(n+3)+l = 4\big(k(n+2)+l\big) - k(n+1) - l - 6(kn+l) - 4n$$

koeficienty u n: $k = 4k - k - 6k - 4 \Rightarrow 4 = -4k \Rightarrow$

$k=-1$

abs. člen: $3k + l = 8k + 4l - k - l - 6l = 7k - 3l$

$-4k = -4l \Rightarrow k = l \Rightarrow l = -1$

$-n-1$ … partikulární řešení dané nehomogenní rce (bez poč. podmínek)

Prostor všech řešení dané rekurentní rce

$$-n-1+a(-1)^n+b\,2^n+c\,3^n \qquad a,b,c\in\mathbb{R}$$

$$x_0=2,\ x_1=2,\ x_2=11$$

$n=0$:

$$2=-1+a+b+c$$

$n=1$:

$$2=-2+(-a)+2b+3c$$

$n=2$:

$$11=-3+a+4b+9c$$

$$a+b+c=3$$
$$-a+2b+3c=4$$
$$a+4b+9c=14$$

$$a=3-b-c$$

$$b+c-3+2b+3c=3b+4c-3=4$$

$$3-b-c+4b+9c=3b+8c+3=14$$

$$3b+4c=7$$
$$3b+8c=11$$

$$4c=4 \Rightarrow c=1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=1$$

Jedinou posloupností vyhovující zadání je posloupnost

$$x_n = -n-1+(-1)^n+2^n+3^n$$

$$(x_1, x_2, x_3)$$

po měsíci bude stav:

$$\left(3x_2+3x_3, x_1, \tfrac{2}{3}x_2\right)$$

~ lineární zobrazení s maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Spočítáme vl. čísla a vektory:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2 + 3\lambda = -(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 1)$$

	-1	0	3	2
2	-1	-2	-1	0

$$\langle (6, 3, 1) \rangle$$

Dominantní vl. čísla $\lambda = 2$

odpovídající vl. vektor:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 \quad &= 0 \\ 2x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 2x_2 \Rightarrow -4x_2 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \Leftrightarrow \cancel{x_2 = 3x_3}$$

$$x_1 = 6x_3 \qquad x_2 = 3x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot A = U$$

$$A = L^{-1} U$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \;\Bigg|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;\Bigg|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;\Bigg|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\Bigg|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\Bigg|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = L^{-1} \cdot U$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

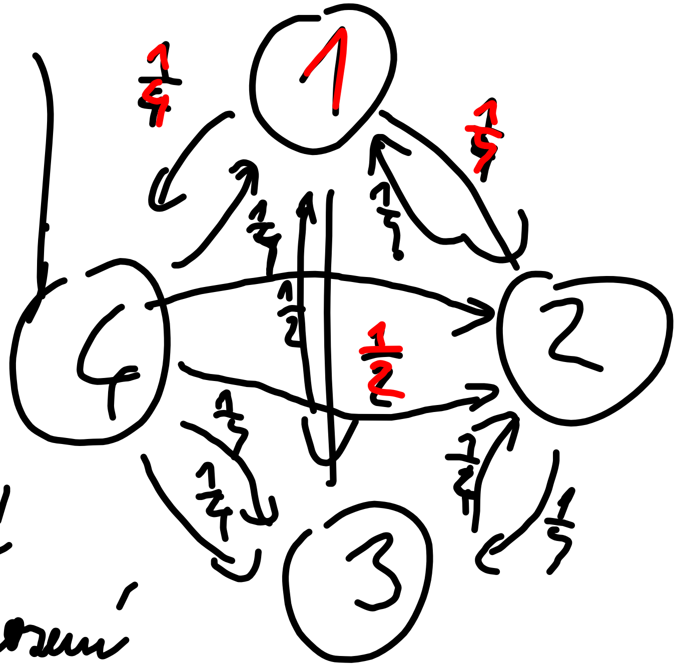
Poloha balónu v průběhu času

~ pravděpodobnostní vektor $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

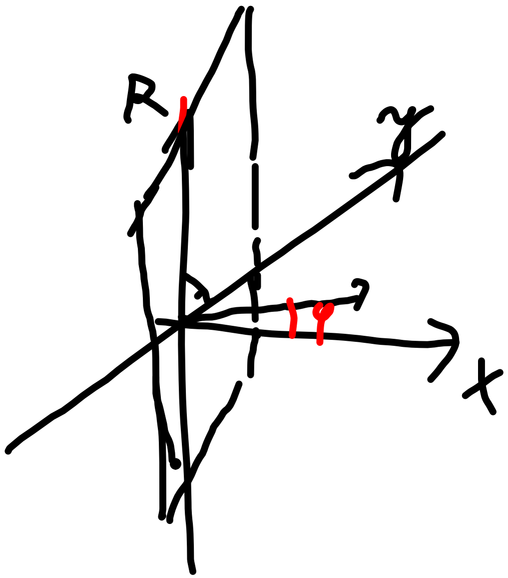
Počátek: $(1,0,0,0)$

Matice daného Markovova procesu:

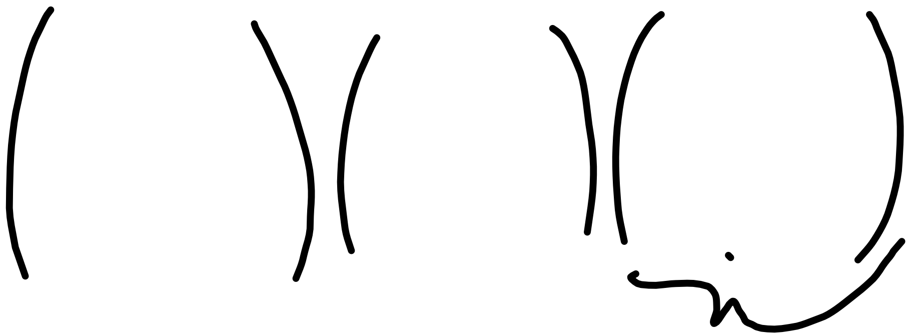
$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \\ \Sigma 1 \quad \Sigma 1 \quad \Sigma 1 \quad \Sigma 1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$ – místa, kde se nachází
může po jednom kroku



$f \sim A$ $g \sim B$ $h \sim C$



$$f \circ g \circ h\,(x) = A \cdot B \cdot C \cdot (x)$$