

MB101 – 13. demonstovaná cvičení

Afinní geometrie

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

10.12. 2007

Plán přednášky

- 1 Domácí úlohy z minulého týdne
- 2 Návodné úlohy

Příklad 1. *Vyvrátte nebo dokažte:*

- *Necht' A je čtvercová matice $n \times n$. Pak je matice $A^T A$ je symetrická.*
- *Necht' čtvercová matice A má pouze kladné reálné vlastní hodnoty. Pak je A symetrická.*

Příklad 2. *Marek, Petr a Zuzka si házejí míčem. Každý z chlapců hodí balón s pravděpodobností $1/3$ druhému a s pravděpodobností $2/3$ Zuzce. Zuzka rozděluje balóny se stejnou pravděpodobností oběma chlapcům. Popište pohyb balónu jako Markovův proces. S jakou pravděpodobností se po dlouhé době bude míč nacházet u Zuzky?*

Příklad 2. *Marek, Petr a Zuzka si házejí míčem. Každý z chlapců hodí balón s pravděpodobností $1/3$ druhému a s pravděpodobností $2/3$ Zuzce. Zuzka rozděluje balóny se stejnou pravděpodobností oběma chlapcům. Popište pohyb balónu jako Markovův proces. S jakou pravděpodobností se po dlouhé době bude míč nacházet u Zuzky?*

Řešení. Matice

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

vlastní hodnotě 1 odpovídá vlastní vektor $(1, 1, 4/3)$, hledaná pravděpodobnost je tedy $2/5$. □

Příklad 3. *Nalezněte LU-rozklad následující matice:*

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nejprve vynásobíme matice odpovídající Gaussově eliminaci, dostáváme tak pro původní matici A , $XA = U$, kde X je dolní trojúhelníková daná zmíněným součinem, U horní trojúhelníková. Z této rovnosti máme $A = X^{-1}U$, což je hledaný rozklad (musíme tedy spočítat inverzi k X). □

Plán přednášky

- 1 Domácí úlohy z minulého týdne
- 2 **Návodné úlohy**

Příklad V bázi $([1, 2], (-1, 1), (1, 1))$ je dáno afinní zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ předpisem

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

vyjádřete je v bázi $([-1, 1], (1, 0), (1, -1))$.

Příklad *Nalezněte osu mimoběžek*

$$p : [-1, 2, 2] + (2, 1, 1)t,$$

$$q : [0, 2, -2] + (6, 0, 2)t.$$

Příklad *Nalezněte příčku mimoběžek*

$$p : [2, 2, 2] + (1, 0, 1)t,$$

$$q : [3, 3, 9] + (2, -1, 0)t,$$

jdoucí bodem [1, 3, 5]

Příklad *Rozhodněte, zda bod $[1, 2, 2]$ leží v konvexním obalu bodů $[1, 0, -1]$, $[-1, 4, 5]$, $[3, 4, 5]$ a $[7, -3, 1]$.*